# Journal für die reine und angewandte Mathematik

**gegründet von A. L. Crelle 1826**

fortgeführt von

**C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,**
**L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger**

gegenwärtig herausgegeben von

**Helmut Hasse und Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

**W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt,**
**F. Hirzebruch, E. Hopf, M. Kneser, G. Köthe, K. Prachar,**
**P. Roquette, W. Schmeidler, L. Schmetterer, E. Stiefel**

**Band 204**

**In 4 Heften**

**WOLFGANG KRULL ZUM 60. GEBURTSTAG**

**am 26. August 1959**

**Walter de Gruyter & Co.**

**vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.**

**Berlin 1960**

Archiv-Nr. 180360
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Hans Jentzsch & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

## Inhaltsverzeichnis des Bandes 204


Seite

**Baer, Reinhold,** Normierte Funktionenalgebren . . . . . 41

**Baumann, Volker,** Normierte Funktionenalgebren. II. . . . . 67

**Berger, Robert,** Über den Modul der bei einer diskreten Bewertung ganzer Differentiale in einem Körper von Primzahlcharakteristik . . . . . 188

**Breuer, Manfred,** Eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Charakteristikentheorie auf Integralmannigfaltigkeiten von Differentialformen beliebigen Grades . . . . . 139

**Croisot, R.** siehe L. Lesieur

**Dieudonné, J.,** Sur une propriété des groupes libres . . . . . 30

**Dirac, G. A.,** Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem . . . . . 116

**Dubreil, Paul,** Propriétés des homomorphismes appliquant un demi-groupe D sur un autre, $\overline{D}$, ou sur un groupe, $\overline{G}$. . . . . 183

**Endler, Otto,** Über Fundamentalpolynome . . . . . 152

**Haupt, Otto,** Zur Verallgemeinerung des Rosenthalschen Struktursatzes für die ebenen dualisierbaren Kurven . . . . . 11

**Jacobson, Nathan,** Some groups of transformations by Jordan algebras. II. . 74

**Kunz, Ernst,** Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen . . . 165

**Lesieur, L. et R. Croisot,** Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees . . . . . 216

**Nagata, Jun-iti,** On a universal $n$-dimensional set for metric spaces . . . . . 132

**Pinl, M.,** Über lineare Übertragungen mit fallweise konstanter Torsion . . . . 108

**Ribenboim, P.,** Anneaux de Rees intégralement clos . . . . . 99

**Samuel, Pierre,** Sur l'image reciproque d'un diviseur . . . . . 1

**Specht, Wilhelm,** Nullstellenschranken für Polynome . . . . . 35

**Sperner, Emanuel,** Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen . . . . . 205

**Ausgabedaten der Hefte von Bd. 204**

**Heft 1/4 ausgegeben am 30. Juli 1960**

# Sur l'image reciproque d'un diviseur.

**A M. Wolfgang Krull, à l'occasion de son 60e anniversaire.**

Par *Pierre Samuel* à Clermont-Ferrand.

Considérons deux variétés algébriques $V$, $V'$ et un morphisme $f$ de $V'$ dans $V$ (c'est à dire une application rationelle et partout régulière de $V'$ dans $V$). Etant donné un diviseur $D$ sur $V$, nous cherchons à donner un sens à la notation $f^{-1}(D)$, où $f^{-1}(D)$ doit être un diviseur sur $V'$. Nous généralisons ainsi le problème que nous nous étions posé dans [6], et qui avait trait au cas où $f$ est birationnelle. Dans le présent travail nous nous proposons aussi de préciser et de complèter certains résultats de [6]. Pour la terminologie et les résultats nécéssaires de Géométrie Algébrique, nous renvoyons à [5].

## § 1. Préliminaires sur les groupes et les espaces vectoriels.

**Lemme 1.** *Soient $I$ un ensemble, $G$ le groupe $Z^{(I)}$ ordonné par l'ordre produit, $H$ un sous-groupe de $G$, et $w$ un homomorphisme de $H$ dans $Z$ tel que $w(x) > 0$ pour tout élément $x > 0$ de $H$. Notons $E$ l'espace vectoriel $R^{(I)}$ ordonné par l'ordre produit, $P$ le cone des éléments positifs de $E$, $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $H$, et $w$ la forme $R$-linéaire sur $F$ prolongeant $w$. On a alors $w(y) > 0$ pour tout élément $y > 0$ de $F$. De plus pour tout $i \in I$, on a*

$$(1) \qquad \inf_{\substack{y \in F \cap P \\ pr_i(y) > 0}} \frac{w(y)}{pr_i(y)} = \inf_{\substack{x \in H \cap P \\ pr_i(x) > 0}} \frac{w(x)}{pr_i(x)}.$$

Nous allons d'abord montrer que, pour tout élément $y$ de $F \cap P$ et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x$ de $H \cap P$ et un entier $q > 0$ tels que:

$$(2) \quad | w(y) - q^{-1} w(x) | \leqq \varepsilon q^{-1}, \quad | pr_i(y) - q^{-1} pr_i(x) | \leqq \varepsilon q^{-1} \text{ pour tout } i \in I.$$

Ecrivons en effet $y = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ où $x_j \in H$ et où les $b_j$ sont des nombres réels. Comme les indices $i \in I$ tels que $pr_i(x_j) \neq 0$ pour $j$ donné sont en nombre fini, il existe $\eta > 0$ tel que $\eta \sum_{j=1}^{n} | pr_i(x_j) | \leqq \varepsilon$ pour tout $i \in I$, et que $\eta \sum_{j=1}^{n} | w(x_j) | \leqq \varepsilon$. Or il existe des entiers $q > 0$, $s_j (j = 1, \ldots, n)$ et $n_i (i \in I)$ tels que $| b_j - q^{-1} j | \leqq q^{-1} \eta$ pour $j = 1, \ldots, n$ et que $| pr_i(y) - q^{-1} n_i | \leqq q^{-1} \varepsilon$ pour tout $i \in I$: en effet on prend $n_i = 0$ pour les indices $i$ tels que $pr_i(y) = 0$; il reste alors un nombre fini d'inégalités à vérifier, ce qui est possible en vertù d'un résultat bien connu sur les approximations diophantiennes ([1], Chap. VII, § 1, n° 1, prop. 2); on peut supposer $n_i \geqq 0$ pour tout $i$ puisque $pr_i(y) \geqq 0$. Comme $y = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$, on a $pr_i(y) = \sum_{j=1}^{n} b_j pr_i(x_j)$ pour tout $i \in I$, d'où, pour tout $i \in I$ $\left| q^{-1} n_i - \sum_{j=1}^{n} q^{-1} s_j pr_i(x_j) \right| \leqq q^{-1} \varepsilon + q^{-1} \eta \sum_{j=1}^{n} | pr_i(x_j) | \leqq 2 q^{-1} \varepsilon$. On a ainsi

$\left| n_i - \sum_{j=1}^{n} s_j pr_i(x_j) \right| \leqq 2\varepsilon$; comme le premier membre est un entier et qu'il est loisible de supposer $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il est nul et on a $n_i = \sum_{j=1}^{n} s_j pr_i(x_j)$ pour tout $i \in I$. Considérons l'élément $x = \sum_{j=1}^{n} s_j x_j$ de $H$; comme $pr_i(x) = n_i \geqq 0$, on a $x \in P$, et on a vu qu'on a l'inégalité $\left| pr_i(y) - q^{-1} pr_i(x) \right| \leqq q^{-1}\varepsilon$ pour tout $i \in I$. D'autre part on a $w(y - q^{-1}x) = w\left(\sum_{j=1}^{n} (b_j - q^{-1}s_j)\, x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - q^{-1}s_j)\, w(x_j)$, d'où la majoration $\left| w(y) - q^{-1}w(x) \right| = \left| w(y - q^{-1}x) \right| \leqq \sum_{j=1}^{n} \left| b_j - q^{-1}s_j \right| \left| w(x_j) \right| \leqq q^{-1}\eta \sum_{j=1}^{n} \left| w(x_j) \right| \leqq q^{-1}\varepsilon$. Ceci démontre les inégalités (2).

Supposons maintenant $y > 0$. Il existe alors un indice $i$ tel que $pr_i(y) > 0$. Si nous prenons $\varepsilon < \min\left(\frac{1}{2}, pr_i(y)\right)$, on a $q^{-1}\varepsilon < pr_i(y)$, d'où $q^{-1}pr_i(x) \geqq pr_i(y) - q^{-1}\varepsilon > 0$, $pr_i(x) > 0$, et $x > 0$ puisque $x \in P$. Comme $x \in H$, on a $w(x) > 0$, d'où $w(x) \geqq 1$ puisque $w(x)$ est un entier; ainsi $w(y) \geqq q^{-1}w(x) - q^{-1}\varepsilon \geqq q^{-1} - \frac{1}{2}q^{-1} = \frac{1}{2}q^{-1} > 0$. On a donc bien $w(y) > 0$ pour tout élément $y > 0$ de $F$.

Démontrons enfin (1). Il est clair que le premier membre est inférieur au second. D'autre part, si $y \in F \cap P$ et si $pr_i(y) > 0$, il résulte de (2) que $\dfrac{w(y)}{pr_i(y)}$ est adhérent à l'ensemble des nombres $\dfrac{w(x)}{pr_i(x)}$ où $x \in H \cap P$ et $pr_i(x) > 0$. CQFD.

**Lemme 2.** *Soient $I$ un ensemble, $E$ l'espace vectoriel $R^{(I)}$ muni de l'ordre produit, $(e_i)$ sa base canonique, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, et $w$ une forme linéaire sur $F$ telle que $w(x) > 0$ pour tout élément $x > 0$ de $F$. On suppose que, pour tout $i \in I$, l'ensemble des $x$ de $F \cap P$ tels que $pr_i(x) > 0$ est non vide. Pour tout $i \in I$, posons*

$$w_i = \inf_{\substack{x \in F \cap P \\ pr_i(x) > 0}} \frac{w(x)}{pr_i(x)} \tag{3}$$

*alors:*

a) *Pour toute forme linéaire positive $w'$ sur $E$ prolongeant $w$, on a $w'(e_i) \leqq w_i$ pour tout $i \in I$.*

b) *Pour tout $k \in I$, il existe une forme linéaire positive $w'$ sur $E$ prolongeant $w$ telle que $w'(e_k) = w_k$.*

c) *Pour qu'il existe une seule forme linéaire positive $w'$ sur $E$ prolongeant $w$, il faut et il suffit que, pour tout $k \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x$ de $F \cap P$ tel que $pr_k(x) > 0$ et que $\sum_{i \neq k} w_i pr_i(x) \leqq \varepsilon pr_k(x)$.*

a) Soient $k \in I$ et $x \in F \cap P$ tels que $pr_k(x) > 0$. Comme $w(x) = \sum_i pr_i(x)\, w'(e_i)$ et que $w'$ est une forme positive, on a $w'(e_k)\, pr_k(x) \leqq w(x)$, d'où $w'(e_k) \leqq w_k$.

b) Si $e_k \in F$, on a, en vertu de (3), $w_k \leqq \dfrac{w(e_k)}{pr_k(e_k)} = w(e_k)$; d'autre part, pour $x \in F \cap P$ on a $x - pr_k(x)\, e_k \in F \cap P$, d'où $w(x) - pr_k(x)\, w(e_k) \geqq 0$, $w(e_k) \leqq \dfrac{w(x)}{pr_k(x)}$ (si $pr_k(x) > 0$), et $w(e_k) \leqq w_k$; ainsi $w(e_k) = w_k$. Donc, dans tous les cas, nous pouvons prolonger $w$ en une forme linéaire $u$ sur $F + Re_k$ qui vérifie $u(e_k) = w_k$. Notons $D$ (resp. $N$) l'ensemble des éléments $x$ de $F + Re_k$ tels que $u(x) \geqq 0$ (resp. $u(x) = 0$).

Pour prolonger $u$ en une forme linéaire positive sur $E$, nous utiliserons la forme du théorème de Hahn-Banach donnée dans [2], Chap. II, § 3, exerc. 2. Vérifions que tous les points $x$ de $P \cap (F + Re_k)$ sont du même côté de l'hyperplan $N$ de $F + Re_k$, plus précisément qu'ils vérifient tous $u(x) \geqq 0$. En effet un tel point $x$ s'écrit $x = z + ae_k$ ($z \in F$, $a \in R$) avec $pr_i(z) \geqq 0$ pour $i \neq k$ et $pr_k(z) + a \geqq 0$. Si $a \leqq 0$, on a $pr_k(z) \leqq 0$, donc $z \in F \cap P$ et $w(z) \geqq 0$; comme $w(z) \geqq w_k pr_k(z)$ par définition de $w_k$, on a $u(x) = w(z) + aw_k \geqq (pr_k(z) + a)\, w_k \geqq 0$. Si $a > 0$, choisissons $y$ dans $F \cap P$ tel que $pr_k(y) > 0$ et que $\dfrac{w(y)}{pr_k(y)} \leqq w_k + \varepsilon (\varepsilon > 0)$; on voit aussitôt que $z + a(pr_k(y))^{-1} y \in F \cap P$, d'où $w(z) + a(pr_k(y))^{-1} w(y) \geqq 0$, et $w(z) + a(w_k + \varepsilon) \geqq 0$; comme ceci a lieu quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $w(z) + aw_k \geqq 0$, c'est à dire $u(x) \geqq 0$.

La seconde hypothèse du résultat cité est que, pour tout $y \in E$, il existe $x$ dans $P \cap (F + Re_k)$ tel que $x + by \in P$ pour $|b|$ assez petit. Or les indices $i$ tels que $pr_i(y) \neq 0$ sont en nombre fini; pour chacun d'eux il existe $x_i$ dans $F \cap P$ tel que $pr_i(x_i) > 0$; nous prendrons pour $x$ la somme des $x_i$, et la relation $x + by \in P$ aura lieu pour $|b| \leqq \min_i \left(\dfrac{pr_i(x)}{pr_i(y)}\right)$.

D'après le résultat cité, il existe un hyperplan $H$ de $E$ tel que tous les points de $P$ soient du même côté de $H$ et que $H \cap (F + Re_k) = N$. Donc $H$ est le noyau d'une forme linéaire $w'$ qui prolonge $u$. Comme $w'$ garde un signe constant sur $P$, et que $u$ prend des valeurs $> 0$ sur $F \cap P$, $w'$ est positive sur $P$. Ainsi $w'$ est une forme linéaire positive, et ceci démontre b).

c) Si $w'$ est unique, on a $w'(e_k) = w_k$ pour tout $k \in I$; prenons $\varepsilon > 0$; il existe $x \in F \cap P$ tel que $\dfrac{w(x)}{pr_k(x)} \leqq w_k + \varepsilon$; comme $w(x) = \sum_{i \in I} w'(e_i)\ pr_i(x) = w_k pr_k(x) + \sum_{i \neq k} w_i pr_i(x)$, on a bien $\sum_{i \neq k} w_i pr_i(x) \leqq \varepsilon\ pr_k(x)$. Réciproquement, si $x$ est un élément de $F \cap P$ vérifiant $pr_k(x) > 0$ et $\sum_{i \neq k} w_i pr_i(x) \leqq \varepsilon\ pr_k(x)$, et si $w'$ est une forme positive prolongeant $w$, on a $w(x) = w'(e_k)\ pr_k(x) + \sum_{i \neq k} w'(e_i)\ pr_i(x)$ d'où (puisque $w'(e_i) \leqq w_i$ par a)) $w(x) \leqq w'(e_k)\ pr_k(x) + \sum_{i \neq k} w_i pr_i(x)$, et donc $w(x) \leqq pr_k(x)\,(w'(e_k) + \varepsilon)$; par conséquent on a $w_k \leqq w'(e_k) + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $w_k \leqq w'(e_k)$ et $w'(e_k) = w_k$ (d'après a)). Ceci montre l'unicité de $w'$.

*Remarque* — Nous avons en fait démontré que, pour $k$ donné, la relation «pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in F \cap P$ tel que $pr_k(x) > 0$ et que $\sum_{i \neq k} w_i pr_i(x) \leqq \varepsilon\ pr_k(x)$» équivaut à «$w'(e_k) = w_k$ pour toute forme linéaire positive $w'$ sur $E$ prolongeant $w$».

## § 2. Application géométrique.

Soient $V$ et $V'$ deux variétés, que nous supposerons *normales* pour simplifier, et $f$ un morphisme de $V'$ dans $V$. Fixons une sous-variété $W'$ de codimension 1 de $V'$. Etant donné un diviseur $D$ sur $V$, nous nous proposons de définir le coéfficient $w'(D)$ de $W'$ dans le diviseur «image réciproque de $D$». Au sens ensembliste, $f^{-1}(D)$ est de codimension 1 sur $V'$ si l'intersection $D \cap f(V')$ est propre, c'est à dire si aucune composante de $D$ ne contient $f(V')$; sinon on a $f^{-1}(D) = V'$; nous excluerons provisoirement ce dernier cas.

Il est naturel d'imposer les *conditions suivantes* à l'application $w'$:

a) *$w'(D)$ est un nombre réel qui dépend linéairement de $D$;*

b) *$w'(D)$ est défini localement* (i. e. *$w'(D) = 0$ si l'ensemble $f^{-1}(D)$ ne contient pas $W'$*);

c) *si $D$ est un diviseur positif, on a $w'(D) \geqq 0$;*

d) *si $D$ est le diviseur $(x)$ d'une fonction $x$ sur $V$, $w'(D)$ est le coéfficient de $W'$ dans le diviseur $(x \circ f)$ de la fonction $x \circ f$ sur $W$.*

La condition b) montre que nous n'avons à nous occuper que des diviseurs qui contiennent la sous variété $W = f(W')$ de $V$, c'est à dire des diviseurs locaux de $V$ en $W$. Algébriquement soient $k$ un corps de définition de $V$, $W$, $V'$, $W'$ et $f$, $\mathfrak{o}$ l'anneau local $\mathfrak{o}_k(W; V)$ de $W$ sur $V$, et $h$ l'homomorphisme de $\mathfrak{o}$ dans $k(V')$ correspondant à $f$; l'anneau local $\mathfrak{o}'$ de $W'$ sur $V'$ est l'anneau d'une *valuation* discrète $w_1$ de $k(V')$ (puisque $V'$ est normale), qui domine $h(\mathfrak{o})$; nous supposerons $w_1$ normée. Les sous variétés $D$ de codimension 1 de $V$ qui contiennent $W$ mais ne contiennent pas $f(V')$ correspondant aux idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ qui ne sont pas contenus dans $h^{-1}(0)$; en notant $I$ l'ensemble de ces idéaux premiers, nous avons à définir l'homomorphisme $w'$ sur le groupe $G = Z^{(I)}$. D'après d), $w'$ est déjà connu sur le sous-groupe $H$ de $G$ formé par les diviseurs locaux de fonctions; les fonctions correspondant aux éléments de $H$ sont déterminées par le lemme suivant:

**Lemme 3.** *Soient $\mathfrak{o}$ un anneau de Krull, $S$ une partie multiplicativement stable de $\mathfrak{o}$ et $I$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ tels que $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$. L'ensemble des éléments $x \neq 0$ du corps des fractions de $\mathfrak{o}$ dont toutes les composantes du diviseur appartiennent à $I$, est égal à l'ensemble des éléments inversibles de $\mathfrak{o}_S$. De plus on a $\mathfrak{o}_S = \bigcap_{\mathfrak{p} \notin I} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.*

Rappelons qu'on appelle «anneaux de Krull» les anneaux que W. Krull a introduit sous le nom de «endliche diskrete Hauptordnungen»; à tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ correspond une valuation normée $v_\mathfrak{p}$ du corps des fractions $K$ de $\mathfrak{o}$ dont l'anneau est $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, et $\mathfrak{o}$ est l'intersection des $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; un diviseur de $\mathfrak{o}$ est une combinaison linéaire formelle $\sum_\mathfrak{p} n(\mathfrak{p})\, \mathfrak{p}$, et les composantes d'un tel diviseur sont les $\mathfrak{p}$ tels que $n(\mathfrak{p}) \neq 0$; le diviseur d'un élément $x \neq 0$ de $K$ est, par définition, $\sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(x) \cdot \mathfrak{p}$.

Ces rappels étánt faits, nous démontrerons d'abord la seconde assertion du lemme 3. Il est clair que $\mathfrak{o}_S \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ lorsque $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Inversement considérons un élément $x$ de $\bigcap_{\mathfrak{p} \notin I} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; on a $v_\mathfrak{p}(x) \geqq 0$ lorsque $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$; les idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$ de hauteur 1 tels que $v_{\mathfrak{p}_i}(x) < 0$ vérifient donc $\mathfrak{p}_i \cap S \neq \emptyset$, et il existe $s_i \in \mathfrak{p}_i \cap S$. Or ces $\mathfrak{p}_i$ sont en nombre fini; posons $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = -n(i)$ et $s = \prod s_i^{n(i)}$. On a évidemment $s \in S$ et $v_\mathfrak{p}(xs) \geqq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1. D'où $xs \in \mathfrak{o}$ et $x \in \mathfrak{o}_S$. Ceci prouve la seconde assertion. Il en résulte que les relations «$x \in \mathfrak{o}_S$» et «$v_\mathfrak{p}(x) \geqq 0$ lorsque $\mathfrak{p} \notin I$» sont équivalentes. Donc «$v_\mathfrak{p}(x) = 0$ lorsque $\mathfrak{p} \notin I$» équivaut à «$x \in \mathfrak{o}_S$ et $x^{-1} \in \mathfrak{o}_S$», ce qui démontre notre première assertion. CQFD.

En revenant aux notations d'avant le lemme, les fonctions $x$ sur $V$ dont le diviseur local $(x)_W$ appartient à $H$ ne sont donc autres que les éléments inversibles de l'anneau local $\mathfrak{o}_{h^{-1}(0)}$. Notons $B$ le groupe multiplicatif de ces fonctions. Pour $x \in B$, $h(x)$ est défini $(h(x) \in k(V'), h(x) \neq 0)$, et, comme l'image par $h$ d'un élément inversible $u$ de $\mathfrak{o}$ vérifie $w_1(h(u)) = 0$, l'entier $w_1(h(x))$ ne dépend que du diviseur $(x)_W$ de $x$; on a donc défini un homomorphisme $w$ de $H$ dans $Z$ qu'il s'agit de prolonger à $G = Z^{(I)}$. Pour celà nous allons appliquer les lemmes 1 et 2 du § 1; ceci est possible puisque:

1) Pour $D \in H$, $D > 0$, on a $w(D) > 0$. En effet, soit $x \in B$ tel que $D = (x)_W$; comme $D \geqq 0$, on a $v_\mathfrak{p}(x) \geqq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in I$; d'autre part $v_\mathfrak{q}(x) \geqq 0$ pour $\mathfrak{q} \notin I$ d'aprés le lemme 3; donc $x \in \mathfrak{o}$. Comme $D > 0$, il existe $\mathfrak{p} \in I$ tel que $v_\mathfrak{p}(x) > 0$; donc $x \in \mathfrak{p}$; a fortiori $x$ est élément de l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$, donc $h(x)$ de celui de $h(\mathfrak{o})$. Comme l'anneau de $w_1$ domine $h(\mathfrak{o})$, on a donc $w_1(h(x)) > 0$; d'où $w(D) > 0$.

2) Pour $\mathfrak{p} \in I$, il existe $x \in \mathfrak{p}$ tel que $x \notin h^{-1}(0)$; on a alors $x \in B$, $(x)_W \geqq 0$ et $pr_{\mathfrak{p}}((x)_W) > 0$.

Les lemmes 1 et 2 montrent alors qu'il existe un homomorphisme $w'$ de $G = Z^{(I)}$ dans $R$ tel que $w'(\mathfrak{p}) \geqq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in I$. D'aprés ce qu'on a vu dans la vérification 1) ci dessus, et d'après la formule (1) du lemme 1, le nombre réel $w_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p} \in I)$ correspondant au $w_{\mathfrak{p}}$ du lemme 2 est donné par la formule

$$w_{\mathfrak{p}} = \inf_{x \in \mathfrak{p} \cap B} \left( \frac{w_1(h(x))}{v_{\mathfrak{p}}(x)} \right). \tag{4}$$

Il est clair que $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{p} \cap \complement h^{-1}(0)$. Si, comme il est naturel, on pose $w_1(0) = +\infty$, on a aussi $w_{\mathfrak{p}} = \inf_{x \in \mathfrak{p}} \left( \frac{w_1(h(x))}{v_{\mathfrak{p}}(x)} \right)$. Pour toute partie $A$ de $\mathfrak{o}$, posons $w_1(h(A)) = \min_{x \in A} w_1(h(x))$. Comme l'ensemble des éléments $x$ de $\mathfrak{o}$ tels que $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqq n$ est la *puissance symbolique* $n$-ième $\mathfrak{p}^{(n)}$ de $\mathfrak{p}$, on a évidemment

$$w_{\mathfrak{p}} = \inf_{n \geqq 1} \left( \frac{w_1(h(\mathfrak{p}^{(n)}))}{n} \right). \tag{5}$$

*Remarque.* Comme $\mathfrak{p}^{(n)}\mathfrak{p}^{(q)} \subset \mathfrak{p}^{(n+q)}$, la fonction $f(n)$ vérifie $f(n+q) \leqq f(n) + f(q)$ pour tous entiers $n, q \geqq 1$. De là on déduit quasi-classiquement (cf. [4], th. 1) que la suite $\frac{f(n)}{n}$ a une limite, égale à $\inf \left( \frac{f(n)}{n} \right)$. Pour la commodité du lecteur, nous donnerons ici la démonstration de ce fait:

**Lemme 4.** *Soit $f$ une fonction à valeur réelles positives, définie pour $n \geqq 1$, et telle que $f(p+q) \leqq f(p) + f(q)$ (resp. $f(p+q) \geqq f(p) + f(q)$) pour tous entiers $p, q \geqq 1$. Alors la suite $\left( \frac{f(n)}{n} \right)$ a une limite finie* (resp. *finie ou $+\infty$*), *et cette limite est égale à* $\inf \left( \frac{f(n)}{n} \right)$ $\left( \text{resp. } \sup \left( \frac{f(n)}{n} \right) \right)$.

Posons en effet $L = \inf \left( \frac{f(n)}{n} \right) \left( \text{resp. } \sup \left( \frac{f(n)}{n} \right) \right)$, et donnons nous $\varepsilon > 0$ (modifications faciles lorsque $L = +\infty$). Il existe un entier $a$ tel que $L \leqq \frac{f(a)}{a} \leqq L + \varepsilon$ $\left( \text{resp. } L - \varepsilon \leqq \frac{f(a)}{a} \leqq L \right)$. Faisons la division euclidienne de $n$ par $a$: $n = aq + r$ avec $0 \leqq r \leqq a - 1$. On a $f(n) \leqq f(aq) + f(r) \leqq qf(a) + f(r)$ d'où $\frac{f(n)}{n} \leqq a^{-1}f(a) + (aq)^{-1}f(r)$ $\left( \text{resp. } \frac{f(n)}{n} \geqq \frac{qf(a)}{a(q+1)} \right)$. Pour $n$, donc $q$, suffisamment grand, on a ainsi

$$n^{-1}f(n) \leqq a^{-1}f(a) + \varepsilon \leqq L + 2\varepsilon$$

(resp. $n^{-1}f(n) \geqq a^{-1}f(a) - \varepsilon \geqq L - 2\varepsilon$). Donc $|n^{-1}f(n) - L| \leqq 2\varepsilon$ pour $n$ suffisamment grand. CQFD.

La formule (5) donne donc:

$$w_{\mathfrak{p}} = \lim_{n} \left( \frac{w_1(h(\mathfrak{p}^{(n)}))}{n} \right). \tag{6}$$

Lorsque les puissances symboliques de $\mathfrak{p}$ sont égales à ses puissances ordinaires (par exemple lorsque $\mathfrak{p}$ est principal, mais il y a d'autres cas), on a

$$w_1(h(\mathfrak{p}^{(n)})) = w_1(h(\mathfrak{p})^n) = n \cdot w_1(h(\mathfrak{p})),$$

d'où

$$w_{\mathfrak{p}} = w_1(h(\mathfrak{p})) = \min_{x \in \mathfrak{p}} (w_1(h(x))). \tag{7}$$

Nous avons donc démontré:

**Théorème 1.** *Avec les notations du début du § 2, il existe un homomorphisme $w'$ du groupe $G$ des diviseurs locaux en $W$ dont aucune composante ne contient $f(V')$ dans $R$ vérifiant les conditions* a), b), c), d). *Pour tout diviseur irréductible $\mathfrak{p} \in G$, on a $0 \leqq w'(\mathfrak{p}) \leqq w_{\mathfrak{p}}$ ($w_{\mathfrak{p}}$ étant défini par les formules* (4), (5) *ou* (6)). *Pour tout diviseur irréductible $\mathfrak{p} \in G$, il existe un homomorphisme $w'$ vérifiant* a), b), c) *et* d) *et tel que $w'(\mathfrak{p}) = w_{\mathfrak{p}}$. Pour que $w'(\mathfrak{p})$ soit uniquement déterminé, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathfrak{p}$, $x \notin h^{-1}(0)$ tel que $\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{q}}(x)\, w_{\mathfrak{p}} \leqq \varepsilon v_{\mathfrak{p}}(x)$.*

Un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ sera dit *presque-principal* (pour $w_1$ et $h$) s'il vérifie cette dernière condition; un idéal principal $\mathfrak{p}$ non contenu dans $h^{-1}(0)$ est évidemment presque-principal (pour $h$ et n'importe quelle valution $w_1$ qui domine $h(\mathfrak{o})$), mais on a vu dans [6] qu'il y en a d'autres. Un anneau local de Krull $\mathfrak{o}$ dont tout idéal premier $\mathfrak{p} \not\subset h^{-1}(0)$ de hauteur 1 est presque-principal pour $h$ et $w_1$ est dit *presque-factoriel* (pour $h$ et $w_1$); un anneau local factoriel est quasi-factoriel, mais il y en a d'autres (ibid.). Lorsque $W = f(W')$ est *simple* sur $V$, l'anneau local $\mathfrak{o}$ de $W$ sur $V$ est régulier, donc factoriel ([7]); l'homomorphisme $w'$ de $G$ dans $R$ est alors *unique*; or la théorie des intersections fournit, dans ce cas, un tel homomorphisme, à savoir

$$D \to i_{V \times V'}(W'_T;\ T \cdot (D \times V'))$$

où $T$ désigne le graphe de $f$ dans $V \times V'$ et $W'_T$ la sous-variété $(V \times W') \cdot T$ de $T$ correspondant à $W'$; d'autre part (7) est ici applicable, d'où, en notant $\mathfrak{o}d$ *l'idéal* principal de $\mathfrak{o}$ correspondant au diviseur $D$,

$$w'(D) = w_1(h(d)) = i_{V \times V'}(W'_T;\ T \cdot (D \times V')) \tag{8}$$

(la seconde égalité est d'ailleurs classique; cf. [5], Chap. II, § 5, n° 7 et § 6, n° 5).

Passons maintenant du local au *global*. Pour chaque sous-variété $W'$ de codimension 1 de $V'$, faisons choix d'un homomorphisme $w'_{W'}$, vérifiant les conditions du théorème 1. Pour tout diviseur $D$ sur $V$ dont aucune composante ne contient $f(V')$, la somme formelle $\sum_{W'} w'_{W'}(D) \cdot W'$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls (correspondant aux composantes de $f^{-1}(\mathrm{Supp}\,(D))$, l'image réciproque étant prise au sens ensembliste et Supp $(D)$ désignant, comme d'habitude, la réunion des composantes de $D$). Cette somme est donc un diviseur à coéfficients réels sur $W'$. Donc:

**Théorème 2.** *Etant données deux variétés normales $V$, $V'$ et un morphisme $f$ de $V'$ dans $V$, il existe un homomorphisme $f^0$ de l'espace vectoriel $G_f(V)$ des diviseurs à coéfficients réels sur $V$ dont aucune composante ne contient $f(V')$, dans l'espace vectoriel $G(V')$ des diviseurs à coéfficients réels sur $V'$ tel que*

1) *si $W'$ est une sous-variété de codimension 1 de $V'$ non contenue dans $f^{-1}(\mathrm{Supp}\,(D))$, alors $W'$ n'est pas composante de $f^0(D)$;*

2) *si $D$ est positif, $f^0(D)$ est positif;*

3) *si $D$ est le diviseur $(x)$ d'une fonction $x$ sur $V$, $f^0(D)$ est le diviseur $(x \circ f)$ de la fonction $x \circ f$ sur $V'$.*

*Pour que l'homomorphisme $f^0$ soit unique, il faut et il suffit que, pour toute sous-variété $W'$ de codimension 1 de $V'$, l'anneau local de $f(W')$ sur $V$ soit presque-factoriel pour l'homomorphisme $h$ de $\mathfrak{o}$ dans $k(V')$ défini par $f$ et pour la valuation $w_1$ de $k(V')$ correspondant à $W'$. Cette dernière condition est vérifiée lorsque $V$ est non-singulière.*

## § 3. Transitivité.

Considérons trois variétés normales $V$, $V'$, $V''$ et des morphismes $f$, $g$:

$$V'' \xrightarrow{g} V' \xrightarrow{f} V.$$

Soient, avec les notations du théoréme 2, $f^0$ un homomorphisme de $G_f(V)$ dans $G(V')$ associé à $f$ et $g^0$ un homomorphisme de $G_g(V')$ dans $G(V'')$ associé à $g$. Si $D$ est un diviseur sur $V$, $g^0(f^0(D))$ est défini si aucune composante de $f^0(D)$ ne contient $g(V'')$, donc, a fortiori, si $g(V') \not\subset f^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$; or cette dernière condition équivaut à $f(g(V'')) \not\subset \mathrm{Supp}(D)$. Donc l'homomorphisme $g^0 \circ f^0$ est défini sur $G_{f\circ g}(V)$. Comme il possède évidemment les propriétés 1), 2), 3) du théoréme 2 par rapport au morphisme $f \circ g$, nous voyons que $g^0 \circ f^0$ *est l'un des homomorphismes* $(f \circ g)^0$.

## § 4. Deux cas particuliers.

*Surjections.* On suppose ici que le morphisme $f: V' \to V$ est «génériquement surjectif», c'est à dire que $f(V')$ est dense dans $V$ (pour la topologie de Zariski). Avec les notations du § 2, l'homomorphisme $h$ correspondant de $\mathfrak{o}$ dans $k(V')$ est alors injectif; il identifie $k(V)$ à un sous-corps de $k(V')$. Dans ce cas $G_f(V) = G(V)$ et $f^0$ est définie pour tous les diviseurs sur $V$. Des exemples de ce cas ont été traités dans [6].

*Injections.* On suppose ici que $V'$ est une *sous-variété* de $V$ et que $f$ est l'application canonique de $V'$ dans $V$. Alors (notations du § 2), $h(\mathfrak{o})$ est l'anneau local de $W'$ sur $V'$, et est donc l'anneau de la valuation $w_1$. L'espace vectoriel $G_f(V)$ est celui des diviseurs dont le support ne contient pas $V'$. Pour un tel diviseur $D$, $f^0(D)$ peut être considéré comme un «diviseur induit par $D$ sur $V'$»; lorsque $W'$ est une composante de $f^0(D)$ qui est *simple* sur $V$, son coéfficient dans $f^0(D)$ est nécéssairement égal à la multiplicité d'intersection $i_v(W'; V' \cdot D)$. Nous allons maintenant traiter un exemple où $W'$ n'est pas simple sur $V$.

*Exemple.* Prenons pour $V$ un cône projetant une courbe plane non singulière $C$ de degré $d$, pour $V'$ une génératrice de $V$, et pour $W = W'$ le sommet du cône $V$. Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau local de $W$ sur $V$, $\mathfrak{a}$ l'idéal premier de $\mathfrak{o}$ correspondant à $V'$, $h$ l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{o}$ sur $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$ (qui est l'anneau local de $W$ sur $V'$), et $w_1$ la valuation normée dont l'anneau est $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$, nous noterons $v_\mathfrak{p}$ la valuation normée dont l'anneau est $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ (NB: ce sont les notations du § 2).

Nous allons d'abord montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$ correspondant à une génératrice, et pour tout entier $n \geqq 0$, *il existe un élément homogène $x_n$ de degré $n$ de $\mathfrak{o}$ tel que*

$$(9) \qquad v_\mathfrak{p}(x_n) \geqq dn - 2g, \ \sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_\mathfrak{q}(x_n) \leqq 2g, \ v_\mathfrak{a}(x_n) = 0 \ (\text{i. e. } x_n \notin \mathfrak{a})$$

(où $g$ désigne le genre de la courbe $C$ base de $V$). A l'exception de la condition $v_\mathfrak{a}(x_n) = 0$, ceci a été démontré dans [6], th. 4; pour tenir compte de cette condition, nous nous servirons du lemme suivant:

**Lemme 4.** *Soient $J$ une variété abélienne, $T$ une sous variété de $J$ engendrant $J$, $g$ le plus petit entier tel que $J = T + T + \cdots + T$ ($g$ fois), $a$ un point de $T$ et $b$ un point de $J$. Il existe alors $2g$ points $(t_i)$ de $T$ distincts de $a$ tels que $t_1 + \cdots + t_{2g} = b$.*

Posons en effet $T_{g-1} = T + \cdots + T$ ($g - 1$ fois); c'est une sous-variété de $J$, distincte de $J$. Par translation et symétrie $a + T_{g-1}$ et $b - a - T_{g-1}$ sont des sous-variétés distinctes de $J$; il existe donc $x \in J$ tel que $x \notin a + T_{g-1}$ et $x \notin b - a - T_{g-1}$, d'où

$b - x \notin a + T_{g-1}$. Il existe $t_1, \ldots, t_g$ et $t_{g+1}, \ldots, t_{2g}$ dans $T$ tels que $x = t_1 + \cdots + t_g$ et $b - x = t_{g+1} + \cdots + t_{2g}$. Aucun $t_i (i = 1, \ldots, g)$ n'est égal à $a$, sinon $x \in a + T_{g-1}$; de même aucun $t_j$ pour $j = g + 1, \ldots, 2g$. CQFD.

Ceci étant, soient $A$ et $P$ les points de la courbe $C$ correspondant à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{p}$, $J$ la jacobienne de $C$, $i$ l'application canonique de $C$ dans $J$, et $n$ un entier. En appliquant le lemme 4 au cas $T = i(C)$, $a = i(A)$, $b = -(nd - 2g)\, i(P)$, on voit qu'il existe un diviseur positif $D$ de degré $2g$ sur $C$ tel que $S(i(D)) = -(nd - 2g)\, i(P)$ et que $A$ ne soit pas composante de $D$; on a alors $S(i((nd - 2g)\, P + D)) = 0$, ce qui montre que $(nd - 2g)\, P + D$ est linéairement équivalent à $nE$ ($E$: section hyperplane de $C$). En appelant $\mathfrak{d}$ le diviseur sur $V$ correspondant à $D$, on voit donc qu'il existe un élément homogène $x_n$ de degré $n$ de $\mathfrak{o}$ tel que $(x_n) = (nd - 2g)\, \mathfrak{p} + \mathfrak{d}$. Comme $\mathfrak{a}$ n'est pas composante de $\mathfrak{d}$ et que $\mathfrak{d}$ est de degré $2g$, les relations (9) sont vérifiées.

Notons maintenant que la valuation $w_1$ de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$ est définie par les puissances de l'idéal maximal de cet anneau. On a donc $w_1(h(x_n)) = n$, d'où $w_\mathfrak{p} = \inf_{x \in \mathfrak{p}} \left( \frac{wh((x))}{v_\mathfrak{p}(x)} \right) \leqq \frac{n}{(dn - 2g)}$, et donc $w_\mathfrak{p} \leqq \frac{1}{d}$. De même $w_\mathfrak{q} \leqq \frac{1}{d}$ pour tout idéal premier homogène $\mathfrak{q}$ de hauteur 1. Prenant un élément homogène $z$ de degré 1 de $\mathfrak{o}$ non contenu dans $\mathfrak{a}$, les relations $\Sigma\, v_\mathfrak{p}(z) = d$, $\Sigma\, w'(\mathfrak{p})\, v_\mathfrak{p}(z) = w_1(h(z)) = 1$ ($w'$: homomorphisme prolongeant $w_1 h$; cf. Th. 1), et $w'(\mathfrak{p}) \leqq w_\mathfrak{p} \leqq \frac{1}{d}$, montrent qu'on a $w'(\mathfrak{p}) = w_\mathfrak{p} = \frac{1}{d}$ pour tout idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 contenant $z$; vu l'arbitraire de $z$, cette égalité a lieu pour tout idéal premier homogène de hauteur 1. Donc $w'$ est uniquement déterminée sur les combinaisons linéaires de génératrices de $V$. Comme tout diviseur sur $V$ est linéairement équivalent à une combinaison linéaire de génératrices ([3]), on en déduit l'*unicité* de $w'$. Nous avons vu que n'importe quelle autre génératrice de $V$ *induit sur la génératrice* $V'$ *le diviseur* $d^{-1}W$. Ceci généralise les résultats connus relatifs au cas de génératrices qui sont des sous-multiples d'intersections complètes.

## § 5. Indications sur le cas des composantes excédentaires.

Soient $\mathfrak{o}$ un anneau de Krull local, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$, $h$ un homomorphisme de $\mathfrak{o}$ dans un anneau intègre, et $w_1$ une valuation discrète normée dont l'anneau domine $h(\mathfrak{o})$. Nous avons vu au § 2 que lorsque $\mathfrak{p} \not< h^{-1}(0)$ le nombre réel,

$$w_\mathfrak{p} = \inf_{x \in \mathfrak{p}} \left( \frac{w_1(h(x))}{v_\mathfrak{p}(x)} \right) \tag{10}$$

joue un certain rôle dans la détermination des images réciproques de diviseurs. Nous nous proposons d'examiner si on peut encore donner un sens à (10) lorsque $\mathfrak{p} < h^{-1}(0)$ (géométriquement, avec les notations du § 2, l'image réciproque ensembliste du diviseur $D$ correspondant à $\mathfrak{p}$ est alors la variété $V'$ tout entière). Comme tout morphisme $f: V' \to V$ se décompose en la surjection $V' \to f(V')$ et l'injection $f(V') \to V$, et comme aucun diviseur de $f(V')$ n'a pour image réciproque $V'$ tout entière, nous pouvons nous borner au cas d'une *injection*. Dans ce cas $h(\mathfrak{o})$ est l'anneau de la valuation $w_1$. La donnée des valuations $v_\mathfrak{p}$ d'anneau $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ et $w_1$ d'anneau $h(\mathfrak{o}) = \frac{\mathfrak{o}}{h^{-1}(0)}$, ainsi que l'inclusion $\mathfrak{p} < h^{-1}(0)$ suggèrent l'utilisation des *valuations généralisées* de W. Krull. J'ignore encore ce qu'on peut faire lorsque $\mathfrak{p} \neq h^{-1}(0)$, et me contenterai de donner quelques indications sur le cas où $\mathfrak{p} = h^{-1}(0)$.

Dans ce cas la composition des places associées à $v_\mathfrak{p}$ et à $w_1$ définit une place du corps des fractions $K$ de $\mathfrak{o}$, à laquelle correspond une valuation $w$ de $K$ dont le groupe totalement ordonné $\Gamma$ est isomorphe à $Z \times Z$ ordonné lexicographiquement. L'isomorphisme de $\Gamma$ sur $Z \times Z$ n'est *pas canonique*; ce qui est donné intrinsèquement est: a) le sous-groupe isolé $\Delta$ de hauteur 1 de $\Gamma$ (image par $w$ de l'ensemble des éléments $x$ de $K$ tels que $v_\mathfrak{p}(x) = 0$; — b) un isomorphisme canonique de $\Gamma/\Delta$ sur le second facteur $Z$ de $Z \times Z$ (l'homomorphisme composé

$$K^* \xrightarrow{w} \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta \longrightarrow Z$$

étant $v_\mathfrak{p}$); — c) un isomorphisme canonique de $\Delta$ sur le premier facteur $Z$ (provenant de $w_1 \circ h$ par passage aux quotients).

Un isomorphisme de $\Gamma$ sur $Z \times Z$ est déterminé par le choix d'un élément de $\Gamma$ qui corresponde à $(0, 1)$; un tel élément peut être arbitrairement choisi parmi les $w(a)$ tels que $v_\mathfrak{p}(a) = 1$. Un tel élément étant choisi, nous noterons $w_a$ la valuation de $K$ obtenue en composant $w$ et l'isomorphisme de $\Gamma$ sur $Z \times Z$ correspondant à $a$. On a donc, pour tout $x \in K^*$

$$w_a(x) = (s_a(x),\ v_\mathfrak{p}(x)) \tag{11}$$

où $s_a$ est l'homomorphisme de $K$ dans $Z$ qui prolonge $w_1 \circ h$ et qui vérifie $s_a(a) = 0$ $(v_\mathfrak{p}(a) = 1)$. On vérifie facilement que, si $a'$ est un autre élément de $K$ tel que $v_\mathfrak{p}(a') = 1$, on a, en identifiant canoniquement $\Delta$ à $Z$ et en posant $q = w\left(\frac{a}{a'}\right) \in Z$,

$$s_{a'}(x) = s_a(x) + q v_\mathfrak{p}(x) \quad \text{(pour tout } x \in K). \tag{12}$$

Ceci étant, afin de pouvoir diviser par des entiers, plongeons $Z \times Z$ dans $R \times R$ (ordonné lexicographiquement lui aussi), et considérons l'ensemble des éléments $\frac{w_a(x)}{v_\mathfrak{p}(x)} = \left(\frac{s_a(x)}{v_\mathfrak{p}(x)}, 1\right) \in R \times R$ où $x$ parcourt $\mathfrak{p}$; il revient au même de considérer l'ensemble $N_a$ des nombres réels $\frac{s_a(x)}{v_\mathfrak{p}(x)}$ $(x \in \mathfrak{p})$. D'après (12), on a $N_{a'} = q + N_a \left(q = w\left(\frac{a}{a'}\right)\right)$; autrement dit $N_a$ est déterminé à une translation entière près.

Nous allons montrer que $N_a$ *est minoré*. D'après ce qui précède il suffit de le voir pour un élément a particulier. Or comme $\mathfrak{o}$ est un anneau de Krull, il existe un élément $a$ du corps des fractions $K$ de $\mathfrak{o}$ tel que $v_\mathfrak{p}(a) = 1$ et $v_\mathfrak{q}(a) \leqq 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ (prendre $b \in K$ tel que $v_\mathfrak{p}(b) = 1$; pour tout $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{p}$ tel que $v_{\mathfrak{q}_i}(b) > 0$, on choisit $c_i \in \mathfrak{q}_i$ tel que $c_i \notin \mathfrak{p}$; alors $a = b(c_1 c_2 \cdots c_r)^{-n}$ a les propriétés requises lorsque l'exposant $n$ est assez grand). Si $x$ est un élément de $\mathfrak{p}$ on a, en posant $v_\mathfrak{p}(x) = n$, $s_a(x) = s_a(xa^{-n}) - n s_a(a) = s_a(xa^{-1}) = w_1(h(xa^{-n}))$; comme $v_\mathfrak{p}(xa^{-n}) = 0$ et que $v_\mathfrak{q}(xa^{-n}) \geqq 0$ pour $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, on a $xa^{-n} \in \mathfrak{o}$, d'où $w_1(h(xa^{-n})) \geqq 0$. Ainsi l'ensemble $N_a$ est formé de nombres $\geqq 0$, et est donc bien minoré.

Par conséquent le nombre réel

$$\inf_{x \in \mathfrak{p}} \left(\frac{s_a(x)}{v_\mathfrak{p}(x)}\right) \tag{13}$$

existe. Si l'on change l'élément $a$, ce nombre subit une translation entière. Nous avons donc intrinsèquement défini *un nombre réel modulo* 1, à savoir la classe de (13). Nous le noterons $\overline{w}_\mathfrak{p}$.

On remarquera que les hypothèses faites impliquent que $\mathfrak{o}$ est un anneau de dimension 2. Ainsi l'élément $\overline{w}_\mathfrak{p}$ de $R/Z$ est défini lorsque $\mathfrak{o}$ est un anneau de Krull local de

dimension 2 et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$ tel que $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$ soit un anneau de valuation discrète (c. à. d. soit intégralement clos).

*Exemples.* 1) *Si* $\mathfrak{p}$ *est principal, on a* $\overline{w}_{\mathfrak{p}} = 0$. En effet, posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{o}a$. Comme ci dessus on a $s_a(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \mathfrak{p}$. D'autre part on a $a \in \mathfrak{p}$ et $s_a(a) = 0$. 2) *Cône du second degré.* — Prenons pour $\mathfrak{o}$ l'anneau local de l'origine sur le cône $x^2 = yz$, et pour $\mathfrak{p}$ l'idéal $(x, z)$ d'une de ses génératrices. On vérifie facilement que les puissances symboliques de $\mathfrak{p}$ sont données par les formules $\mathfrak{p}^{(2n)} = (z^n)$ et $\mathfrak{p}^{(2n+1)} = (z^n x, z^{n+1})$. D'autre part l'élément $a = \frac{x}{y}$ vérifie $v_{\mathfrak{p}}(a) = 1$ et $\mathfrak{p} < \mathfrak{o}a$. Enfin l'idéal maximal de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$ est engendré par la classe de $y$. On a $\inf\limits_{t \in \mathfrak{p}} \left(\frac{s_a(t)}{v_{\mathfrak{p}}(t)}\right) = \inf\limits_{n \geqq 1} \left(n^{-1} \min\limits_{t \in \mathfrak{p}} (n) \left(w_1 \left(h(ta^{-n})\right)\right)\right)$. Or l'ensemble des $ta^{-2n}$ pour $t \in \mathfrak{p}^{(2n)}$ est identique à celui des $t' z^n a^{-2n} = t' z^n y^{2n} x^{-2n} = t' y^n$ où $t' \in \mathfrak{o}$; le minimum de $w_1 \circ h$ sur cet ensemble est évidemment $n$, et le terme correspondant du inf est $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. L'ensemble des $ta^{-(2n+1)}$ pour $t \in \mathfrak{p}^{(2n+1)}$ est identique à celui des $(t' z^n x + t'' z^{n+1}) a^{-(2n+1)} = (t' x + t'' z)\, y^{n+1}\, x^{-1} = (t' y + t'' x)\, y^n$ pour $t', t'' \in \mathfrak{o}$; le minimum de $w_1 \circ h$ sur cet ensemble est $n + 1$, et le terme correspondant du inf est $\frac{(n+1)}{(2n+1)}$. On a donc $\inf\limits_{t \in \mathfrak{p}} \left(\frac{s_a(t)}{v_{\mathfrak{p}}(t)}\right) = \frac{1}{2}$, et $\overline{w}_{\mathfrak{p}}$ *est la classe de* $\frac{1}{2}$ modulo 1.

## Bibliographie.


[1] *Bourbaki*, Topologie Générale, Chap. V—VIII, Act. Sci. Indus., n° 1029.
[2] *Bourbaki*, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I—II, ibid., n° 1189.
[3] *Samuel*, Composantes singulières d'intersection, Coll. Géom. Alg. Liège (1949), 87—90.
[4] *Samuel*, Some asymptotic properties of powers of ideals, Ann. of Math. 56 (1952), 11—21.
[5] *Samuel*, Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique, Erg. der Math., NF, 4 (1956).
[6] *Samuel*, Multiplicités de certaines composantes singulières, Illin. J. Math. 3 (1959), 319—328.
[7] *Zariski*, The concept of a simple point..., Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 1—52.


Eingegangen 27. Mai 1959.

# Zur Verallgemeinerung des Rosenthalschen Struktursatzes für die ebenen dualisierbaren Kurven.

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

## Einleitung.

**1.** In seiner grundlegenden Untersuchung der Singularitäten ebener Kurven [10]*) hat Herr A. Rosenthal unter anderem den folgenden Struktursatz bewiesen ([10], S. 521): Der Träger einer jeden dualisierbaren Kurve (in der projektiven Ebene $E_2$) ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Konvexbogen. In den folgenden Zeilen soll auf eine Modifikation des von Herrn Rosenthal gegebenen Beweises hingewiesen werden, bei der übrigens wesentliche Schlüsse dieses Beweises wieder benutzt werden. Zugleich wird aber diese Modifikation zu einem Beweis für Kurven im $n$-dimensionalen Raum und zwar unter einer gewissen Abschwächung der Voraussetzungen verallgemeinert (vgl. auch Ziff. 3 dieser Einleitung).

**2.** Der Gedankengang des Rosenthalschen Beweises ist der folgende: Es wird gezeigt erstens, daß auf einer dualisierbaren Kurve weder die Spitzen noch die Wendepunkte dicht liegen; zweitens, daß eine (im Endlichen gelegene) Kurve mit stetiger Tangente und ohne Spitzen in endlich viele Teile zerfällt, die für sich betrachtet keine mehrfachen Punkte besitzen. Daraus folgt dann die Darstellbarkeit (des Trägers) der Kurve als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen, einfachen, stetig differenzierbaren Bogen ohne Spitzen und Wendepunkte. Da aber jeder Bogen der letzteren Art Vereinigung endlich vieler Konvexbogen ist, ergibt sich der Struktursatz.

**3.** Der Beweis von Herrn Rosenthal für „erstens" (vgl. Ziff. 2) stützt sich auf seine weitreichenden Sätze über die Verteilung der Spitzen und Wendepunkte auf einer (beliebigen) Kurve; und für die Folgerung aus „zweitens" auf einen Satz von Hjelmslev. Demgegenüber geht die in Ziff. 1 erwähnte Modifikation so vor: Als dualisierbar ist jede keine Strecken enthaltende Kurve erklärt, die (a) stetig tangierbar ist (d. h. die an jeder Stelle genau eine Tangente besitzt, welche sich stetig mit der Stelle ändert), für die ferner (b) der Schnittpunkt einer Tangente $T$ mit den Tangenten in den benachbarten Stellen gegen den Berührpunkt von $T$ konvergiert. — Aus (a) folgt aber, daß zu jeder Stelle eine Umgebung $U$ auf der Kurve existiert, deren Träger $K$ von endlichem Ordnungswert ist relativ zu einem Geradenbüschel, dessen Geraden keine Kurventangenten enthalten (vgl. Nr. 2. 2.). Infolgedessen ist dieser Träger $K$ abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen einfachen Bogen $B_k$, deren keiner eine Spitze enthält (vgl. Nr. 3. 2. und 4. 1.). Tritt noch (b) hinzu, so ist jeder der Bogen $B_k$

*) Ziffern in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit. Andere Verweise (z. B. „vgl. Nr. 1. 2.") beziehen sich auf die vorliegende Arbeit.

von endlichem Ordnungswert bezüglich des Systems aller Geraden (Nr. 4. 2. 1.). Aber jeder Bogen endlichen Ordnungswertes ist abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen total ordnungshomogenen Bogen; und solche Bogen sind in der Ebene einzig die Konvexbogen (Bogen „zweiter Ordnung"). Damit ist der Struktursatz für jede Umgebung $U$ bzw. für deren Träger $K$ bewiesen. Und da die Kurve Vereinigung von endlich vielen solchen Umgebungen ist, gilt der Rosenthalsche Satz auch für die ganze Kurve.

**4.** Der in Ziff. 3 skizzierte Gedankengang wird in der vorliegenden Arbeit nicht eingehalten, und zwar aus zwei Gründen: (I) gelten unsere Überlegungen auch bei einer Abschwächung der in Ziff. 3. genannten Forderungen (a) und (b). Es genügt nämlich, an Stelle von (a), vorauszusetzen: (a′) die Kurve ist tangierbar (besitzt also an jeder Stelle genau eine Tangente) und ist lokal von beschränkter Schwankung der Tangente, abgekürzt: b. T. S., d. h. zu jeder Stelle gehört eine Umgebung, in welcher die Richtungen der Tangenten einen (von Null) verschiedenen Winkelraum freilassen. Und die Forderung (b) läßt sich abschwächen zu: (b′) die Tangente ist eingeschränkt beweglich, abgekürzt: e. b. T., d. h. zu jeder Stelle der Kurve gehören zwei Umgebungen $V$ und $W$ derart, daß — etwas ungenau gesagt — der Schnittpunkt der Tangente an dieser Stelle mit den Tangenten an den benachbarten Stellen $t'$ in $W$ liegt, wenn $t'$ zu $V$ gehört. — Übrigens zeigen Beispiele, daß (bei gewöhnlich differenzierbaren Kurven) die Eigenschaften b. T. S. und e. b. T. voneinander unabhängig sind. (Vgl. Nr. 4. 2.) — (II) lassen sich die Betrachtungen auch für Kurven im $n$-dimensionalen Raum durchführen. — Im Hinblick auf (I) und (II) ist es aber zweckmäßig, zuerst die benötigten Sätze nur für Kontinua zu beweisen, ohne Rücksicht darauf, daß es sich um Träger von Kurven handelt, und erst hinterher den Übergang von der Kurve zum Träger zu vollziehen; denn der Schluß z. B. von der Tangierbarkeit der Kurve auf die des Trägers ist im allgemeinen nur für geeignete Teilbogen der Kurve möglich (nämlich für die sogenannten freien Teilbogen), was aber für unsere Zwecke ausreicht.

**5.** Entsprechend dem in Ziff. 4. Dargelegten beschäftigen sich die §§ 1—4 der vorliegenden Arbeit lediglich mit Kontinuen, während § 5 mit Hilfe des Vorangehenden zum Struktursatz für Kurven (vgl. Nr. 5. 5. 2.) gelangt. Zu diesem Satz ist für den Fall des $E_n$ mit $n \geqq 3$ noch zu bemerken: Der genauen Verallgemeinerung des Satzes für $n = 2$ würde es entsprechen, daß der Träger der Kurve darstellbar ist als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen Bogen des *Ordnungswertes* $n$. Demgegenüber spricht unser Struktursatz für $n \geqq 3$ nur von der abgeschlossenen Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen totalordnungshomogenen Bogen von endlichem (oder beschränktem) Ordnungswert; denn man weiß bisher nicht, *welche* Ordnungswerte bei ordnungshomogenen Bogen von endlichem (oder beschränktem) Ordnungswert im $E_n$ mit $n \geqq 3$ wirklich auftreten — wenigstens nicht ohne Hinzunahme von Differenzierbarkeitsbedingungen. (Für $n = 2$ tritt nur der Ordnungswert zwei auf).

Bemerkt sei noch, daß im § 1 unter anderem auch gezeigt wird: Die Menge der Spitzen eines Kontinuums von endlichem Ordnungswert relativ zu $n$ unabhängigen Büscheln von Hyperebenen ist *separiert*. (Unseres Wissens wurde bisher nur behauptet, daß diese Menge nirgends dicht ist.)

Herrn Rosenthal danke ich herzlich für die Durchsicht des Manuskriptes und für verschiedene, von ihm angeregte Verbesserungen.

## § 1. Über die Menge der Stützpunkte der Kontinua von endlicher Relativordnung im projektiven $E_n$.

**1. 1.** Die $k$-dimensionalen linearen Unterräume des projektiven $n$-dimensionalen Raumes $E_n$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ bezeichnen wir auch als $k$-Ebenen; die $(n-1)$-Ebenen heißen auch Hyperebenen. Eine Menge $M < E_n$ heiße beschränkt (auch (quasi-)*euklidisch*), wenn es eine $(n-1)$-Ebene $E^u$ gibt, die fremd zu $\overline{M}$[1]) ist; im *affinen* $n$-dimensionalen Raum $A_n$ wird die Bezeichnung „beschränkt" bezogen auf eine ausgezeichnete $(n-1)$-Ebene $E^u$, nämlich die *uneigentliche*. Beschränkte Mengen in $E_n$ oder $A_n$ können wie beschränkte Mengen des euklidischen Raumes behandelt werden[2]). „Umgebungen" im $E_n$ oder $A_n$ werden *stets* als *beschränkt* angenommen, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird.

Unter einem $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$ mit der Achse $C$ verstehen wir die Gesamtheit aller $(n-1)$-Ebenen, in denen die $(n-2)$-Ebene $C$ enthalten ist. Die $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$, $1 \leqq k \leqq n$ mit den Achsen $C_1, \ldots, C_k$ heißen unabhängig, wenn der Durchschnitt aller $C_\varkappa$ leer ist.

**1. 1. 1.** Eine Menge $M < E_n$ heißt von endlichem Ordnungswert relativ (*zu*) $k$ unabhängigen $(n-1)$-*Büscheln* $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$, wenn die Achsen dieser $\mathfrak{b}_\varkappa$ fremd sind zu $\overline{M}$ und wenn der Durchschnitt $H \cap M$ endlich ist für jede $(n-1)$-Ebene $H \in \mathfrak{b}_\varkappa$ und jedes $\varkappa = 1, \ldots, k$ $(1 \leqq k \leqq n)$.

Eine Menge $M$ heiße tangierbar im Punkt $p \in M$, der Häufungspunkt von $M$ ist, wenn $M$ in $p$ nur eine einzige Tangente[3]) besitzt; es existieren dann in $p$ an $M$ entweder genau eine, von $p$ ausgehende Halbtangente oder genau zwei von $p$ ausgehende Halbtangenten mit gemeinsamer Trägergeraden (welch' letztere die Vereinigung der beiden Halbtangenten ist). Im Falle genau einer Halbtangente in $p$ heißt $p$ Spitze von $M$; im zweiten Falle heißt $M$ in $p$ oder auch $p$ selbst gewöhnlich differenzierbar. Ist $M$ in jedem Punkte tangierbar, so heiße $M$ selbst tangierbar (schlechthin).

**1. 1. 2.** Es gilt nun der

**Satz.** Vor. *Es sei $K$ ein Kontinuum*[4]) *im projektiven $E_n$. Ferner sei $K$ von endlichem Ordnungswert relativ zum $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$.*

Beh. *Die Menge $T$ der Stützpunkte*[5]) *von $K$ mit den $(n-1)$-Ebenen aus $\mathfrak{b}$ ist* separiert[6]) *(in $K$ und $E_n$).*

---

[1]) Mit $\overline{M}$ bzw. $\underline{M}$ wird die abgeschlossene Hülle bzw. der offene Kern von $M$ in $E_n$ bezeichnet. Der $E_n$ ist kompakt (d. h. ein bikompakter Hausdorffraum) und ist sogar *rational* (d. h. er besitzt eine abzählbare Basis). — Die *leere Menge* wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

[2]) Wir setzen $A_n = E_n - E^u$. Es heißt also $M < A_n$ beschränkt im $A_n$, wenn die *in bezug auf* $E_n$ gebildete abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von $M$ fremd ist zu $E^u$; also: $M$ ist beschränkt in $A_n$, wenn $M$ enthalten ist etwa in einer Kugel. — *Umgebungen* im $E_n$ oder $A_n$ werden ausnahmslos als *beschränkt* angenommen. — Wegen $A_n = E_n - E^u$ ist *in $A_n$ abgeschlossen* z. B. eine von $p \in A_n$ ausgehende (oder $p$ als Anfangspunkt besitzende) Halbgerade, wenn $p$ zur Halbgeraden gehört.

[3]) Unter einer *Halbtangente* $h$ an $M < E_n$ in dem zu $M$ gehörigen Häufungspunkt $p \in M$ als Berührpunkt wird verstanden jeder Limes von Halbgeraden $h_k$ mit $p$ als Anfangspunkt und durch $p_k \in M - \{p\}$ mit $p = \lim p_k$ (dabei ist $h = \lim h_k$ auf den Raum aller von $p$ ausgehenden Halbgeraden bezogen). Als *Tangente* an $M$ im (Berühr-)Punkt $p$ wird jede Gerade bezeichnet, die Träger einer Halbtangente ist.

[4]) Unter einem *Kontinuum* im $E_n$ (bzw. im $A_n$) wird eine mehrpunktige, zusammenhängende, abgeschlossene (bzw. überdies beschränkte) Menge verstanden.

[5]) Es sei $s \in M < E_n$ und $H$ eine $(n-1)$-Ebene mit $s \in H$; ferner sei $U$ eine beschränkte Umgebung von $s$ (im $E_n$), und zwar etwa ein konvexer Körper (eine Kugel). Für ein solches $U$ ist dann $U - U \cap H$ Vereinigung zweier fremder, zusammenhängender Mengen $U^+$, $U^-$, die wir als die beiden *Seiten* von $H$ *in* $U$ bezeichnen. Existiert nun (mindestens) ein derartiges $U$, für welches $M \cap U^+ = \emptyset$ oder $M \cap U^- = \emptyset$ ist, so heißt $s$ *Stützpunkt* von $M$ auf $H$, andernfalls *Schnittpunkt* (vgl. z. B. [3], S. 24, Nr. 1. 4.; für uns kommen nur Kontinua $M$ in Betracht).

**1. Zusatz.** Die Menge derjenigen *Spitzen* von $K$, deren Spitzentangenten in keiner $(n-1)$-Ebene aus $\mathfrak{b}$ liegen, ist separiert (und abzählbar).

**2. Zusatz.** Ist $K$ von endlichem Ordnungswert gleichzeitig relativ zu $n$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln, so ist (sogar) die Menge $T_s$ *aller* Spitzen von $K$ separiert (und abzählbar [7])).

*Bew.* (1) Es sei $\mathfrak{b}'$ die Menge aller $(n-1)$-Ebenen $S \in \mathfrak{b}$, auf denen Stützpunkte $s$ mit $K$ liegen. Der in sich dichte Kern von $T$ sei $D$. Wir führen den Beweis des Satzes (in bekannter Weise) indirekt aus der Annahme, es sei $D \neq \emptyset$. Es sei $s_1 \in D$ und $S_1 \in \mathfrak{b}'$ mit $s_1 \in S_1$. Da die Achse $C$ von $\mathfrak{b}$ fremd ist zu $K = \overline{K}$, kann und soll $C$ als uneigentlich, also $\mathfrak{b}$ als *Parallel*büschel (d. h. als Büschel paralleler $(n-1)$-Ebenen) angenommen werden, weil nur Umgebungen von $s_1$ in Betracht kommen. Es sei nun $V^*$ eine (euklidische) Umgebung von $s_1$ im $E_n$ (etwa ein Parallelflach, von dem zwei Seiten auf $(n-1)$-Ebenen aus $\mathfrak{b}$ liegen). Gemäß der Definition des Stützpunktes liegt eine Umgebung $V_1 \subset V^*$ von $s_1$ in $K$ ganz auf der einen Seite [5]) von $S_1$. Da $K$ endlichen Ordnungswert relativ zu $\mathfrak{b}$ besitzt, ist $s_1$ isolierter Punkt von $K \cap S_1$; demgemäß sei $V_1 = K \cap V_1$ so klein gewählt, daß $S_1 \cap V_1 = \{s_1\}$ ist. Wegen $s_1 \in D$ ist $s_1$ Häufungspunkt von Stützpunkten $s \in D$. Es gibt also $s \in D \cap V_1$ in beliebiger Nähe von $s_1$. Nun sei $W_1$ eine offene, von $S_1$ und einem anderen $S_1' \in \mathfrak{b}$ begrenzte Parallelschicht [8]), die zu $V_1 - \{s_1\}$ nicht fremd ist. Wird die „Dicke" von $W_1$, d. h. der Abstand $d(W_1)$ von $S_1$ und $S_1'$ hinreichend klein gewählt, so enthält *jedes* $S \in \mathfrak{b}$ mit $S \subset W_1$ einen in $V_1$ gelegenen *Schnitt*punkt $r_1$ mit $K$ (gemäß [3], S. 24, Nr. 1. 5.); es sei $d(W_1)$ derart hinreichend klein und jedenfalls kleiner als $2^{-1}$ gewählt. Da $s_1 \in D \cap V_1$ ist, gibt es zu $S_1$ beliebig benachbarte $S_2 \in \mathfrak{b}'$ mit $S_2 \subset W_1$ derart, daß ein $s_2 \in D \cap V_1$ existiert mit $s_2 \in S_2$; da nämlich $H \cap K$ für jedes $H \in b$ endlich ist, so besitzt die Projektion $\mathfrak{b}'$ von $D$ in $\mathfrak{b}$ keine in $\mathfrak{b}$ isolierten $(n-1)$-Ebenen, so daß $\mathfrak{b}'$ in sich dicht ist.

Da $s_2$ ein Stützpunkt, aber $r_1$ ein Schnittpunkt ist, gilt $s_2 \neq r_1$.

(2) Es sei nun schon ein $S_k \in \mathfrak{b}'$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert $(k \geqq 2)$: Auf $S_k$ liegen $(k-1)$ verschiedene Schnittpunkte $r_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k-1$, sowie ein (von den $r_\varkappa$ verschiedener) Stützpunkt $s_k \in D$ mit $r_\varkappa, s_k \in V_1 \subset K$. Wir schlagen um jedes der $r_\varkappa$ sowie um $s_k$ je eine offene Kugel $Z_\varkappa^{(k)}$ bzw. $Z_k^{(k)}$, deren abgeschlossene Hüllen in $V_1$ enthalten sind, paarweise positiven Abstand und einen Radius kleiner als $2^{-2k}$ besitzen. Dann gibt es eine offene, $S_n$ enthaltende Parallelschicht $U_k$, begrenzt von zwei $(n-1)$-Ebenen aus $\mathfrak{b}$ mit $d(U_k) < 2^{-k}$ derart, daß jedes $S \in \mathfrak{b}$ mit $S \subset U_k$ einen in $Z_\varkappa^{(k)}$ gelegenen Schnittpunkt $r_\varkappa'$ besitzt, $\varkappa = 1, \ldots, k-1$ (vgl. [3], S. 24, Nr. 1. 5.). Ferner gibt es auf $K$ eine Umgebung $V_k = K \cap V_k$ von $s_k$ mit $S_k \cap V_k = \{s_k\}$ derart, daß $V_k$ ganz auf der einen Seite von $S_k$ (in $V_1$) liegt. Und es gibt eine offene, von $S_k$ begrenzte, zu $V_k$ nicht fremde, in $U_k$ enthaltene Parallelschicht $W_k$ mit folgenden Eigenschaften: Jedes $S \in \mathfrak{b}$ mit $S \subset W_k$ enthält außer den $r_\varkappa'$ noch einen, in $V_k$ gelegenen Schnittpunkt $r_k'$, der zu $s_k$ beliebig benachbart ist, falls S zu $S_k$ hinreichend benachbart ist. Da $s_k \in D$ ist, gibt es ein $S_{k+1} \in \mathfrak{b}'$ mit $S_{k+1} \subset W_k$, welches außer den $r_\mu'$, $\mu = 1, \ldots, k$, noch einen Stützpunkt $s_{k+1} \in D \cap V_k$ enthält. Mit den $r_1', \ldots, r_k', s_{k+1}$ verfährt man wie mit den $r_1, \ldots, r_{k-1}, s_k$,

---

[6]) Eine Menge (im $E_n$ oder $A_n$) heißt *separiert*, wenn ihr in sich dichter Kern leer ist. Jede *Teilmenge* einer separierten Menge ist separiert. Die *Vereinigung endlich vieler* separierter Mengen ist separiert. Die Menge der isolierten Punkte einer separierten Menge $M$ ist dicht in $M$ (vgl. [1], S. 73/74). Im $E_n$ (also auch im $A_n$) ist jede separierte Menge abzählbar [7]) (weil der $E_n$ rational [1]) ist; vgl. [1], S. 85, Nr. 13. 5. 81).

[7]) „*abzählbar* (viele)" bedeutet hier: keine oder endlich viele oder abzählbar unendlich viele.

[8]) Unter einer (abgeschlossenen bzw. offenen) *Parallelschicht* $W$ in $A_n$ verstehen wir einen konvexen Körper, der von zwei parallelen $(n-1)$-Ebenen $H', H''$ begrenzt wird (mit $H' \cup H'' \subset W$ bzw. $(H' \cup H'') \cap W = \emptyset$).

wobei man überall $k$ durch $k+1$ ersetzt und von den Kugeln $Z_\mu^{(k+1)}$, $\mu = 1, \ldots, k$, mit den Zentren $r'_\mu$ und mit Radien kleiner als $2^{-2(k+1)}$ noch fordert, daß $\overline{Z}_\mu^{(k+1)} < Z_\mu^{(k)}$ gilt; ferner soll $U_{k+1} < W_k$ sein.

(3) Vermittelst vollständiger Induktion erhält man eine Folge von $S_k \in \mathfrak{b}'$ mit folgenden Eigenschaften: (a) Die $S_k$ konvergieren gegen ein $S_0 \in \mathfrak{b}$. Denn es ist $S_{k+1} < W_k < U_k$ und $d(U_k) < 2^{-k}$. — (b) Es enthält $S_k$ mindestens $k-1$ Schnittpunkte $r_1^{(k)}, \ldots, r_{k-1}^{(k)}$. — (c) Die Folge der $r_t^{(k)}$, $k, t = 2, 3, \ldots; k > t$, konvergiert bei festem $t$ für $k \to \infty$ gegen einen Punkt $r_t \in K$ und diese $r_t$ sind sämtlich verschieden. Denn bei festem $t$ ist $r_t^{(k)}$ in $\overline{Z}_t^{(k)}$ enthalten, ferner ist $\overline{Z}_t^{(k+1)} < \overline{Z}_t^{(k)}$ und der Durchmesser von $\overline{Z}_t^{(k)}$ geht gegen Null für $k \to \infty$. Wegen $r_t^{(k)} \in K$ und $K = \overline{K}$ sowie $C \cap K = \emptyset$ (wobei $C$ die Achse von $\mathfrak{b}$) ist $r_t \in K - C$. Außerdem sind die $\overline{Z}_1^{(k)}, \ldots, \overline{Z}_{k-1}^{(k)}$ paarweise fremd, woraus $r_t \neq r_{t'}$, für $t \neq t'$; $t, t' = 2, \ldots, k-1$, bei beliebigem $k$, also $r_t \neq r_{t'}$, für beliebige $t, t' = 2, 3, \ldots$ mit $t \neq t'$ folgt. — Somit enthält $S_0 \in \mathfrak{b}$ unendlich viele verschiedene, zu $K$ gehörige (nicht auf der Achse $C$ liegende) Punkte. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß $K$ von endlichem Ordnungswert relativ zu $\mathfrak{b}$ ist.

*Betr. Zusatz 1.* Eine Spitze $q$ von $K$, deren Spitzentangente in keinem $H \in \mathfrak{b}$ enthalten ist, muß Stützpunkt auf dem $q$ enthaltenden $Q \in \mathfrak{b}$ sein. Die Menge dieser Spitzen ist also Teilmenge von $T$ und folglich erst recht[6]) separiert in $K$, also abzählbar. Übrigens ist die Menge aller Spitzen von $K$ abzählbar auch als Teilmenge aller Ecken von $K$ (vgl. [6], II. Bd., Nr. 2. 3. 2. 2., Satz 1., Beh. 1.)[9]).

*Betr. Zusatz 2.* Ist $r$ Spitze von $K$ und $R$ die Spitzentangente in $r$, ist ferner $r \in Q_\nu$ und $Q_\nu \in \mathfrak{b}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, so ist $R$ in mindestens einem der $Q_\nu$ nicht enthalten; denn die $\mathfrak{b}_\nu$ sind unabhängig (vgl. Nr. 1. 1.), also $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n = \{r\}$. Ist daher $N_\nu$ die Menge aller Spitzen von $K$, deren Tangenten in keinem $H \in \mathfrak{b}_\nu$ enthalten sind, so ist die Menge $N$ aller Spitzen von $K$ Vereinigung der endlich vielen $N_\nu$, deren jede gemäß Zusatz 1. separiert ist. Aber die Vereinigung endlich vieler separierter Mengen ist wieder separiert[6]).

**1. 2.** Eine Menge $M$ heiße von *endlichem Ordnungswert* im Punkte $p \in M$ *relativ zu $k$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln* $\mathfrak{b}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; $1 \leqq k \leqq n$, wenn eine Umgebung $U$ von $p$ (im $E_n$) existiert derart, daß $U \cap M$ von endlichem Ordnungswert relativ zu einem jeden der $\mathfrak{b}_\varkappa$ ist, und wenn insbesondere $\overline{M}$ fremd zur Achse $C_\varkappa$ von $\mathfrak{b}_\varkappa$ für alle $\varkappa = 1, \ldots, k$ ist. Die gleiche Eigenschaft hat dann die abgeschlossene Hülle $\overline{V}$ einer jeden Umgebung $V$ von $p$, falls $\overline{V} < U$. Ist $M$ von endlichem Ordnungswert in jedem Punkt $p \in M$ relativ zu $k$, durch $p$ bestimmten, unabhängigen $(n-1)$-Büscheln $\mathfrak{b}_\varkappa(p)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, so heiße $M$ lokal *von endlichem Ordnungswert relativ zu* je *$k$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln.*

*Anmerkung.* Eine im $E_n$ abgeschlossene Menge $M = \overline{M}$ ist *lokal* von endlichem Ordnungswert relativ zu je $k$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln $(1 \leqq k \leqq n)$ *genau* dann, wenn es eine endliche offene Überdeckung $(V_1, \ldots, V_m)$ von $M$ gibt derart, daß jedes $\overline{V}_\mu \cap M$, $\mu = 1, \ldots, m$, von endlichem Ordnungswert ist relativ zu $k$ durch $V_\mu$ bestimmten unabhängigen $(n-1)$-Büscheln.

*Zusatz.* Ist $k = n$, so können die $V_\mu$ in der Anmerkung als ($n$-dimensionale (beschränkte) konvexe) Polyeder gewählt werden, deren Seiten auf $(n-1)$-Ebenen liegen, die den Büscheln angehören, nämlich als Durchschnitte von $n$ Raumstücken, deren jedes von zwei, dem gleichen $(n-1)$-Büschel angehörigen $(n-1)$-Ebenen begrenzt wird.

---

[9]) Es sei hier auf einen Fehler in [6], II. Bd., Nr. 2. 1. 4., hingewiesen. Dort muß es im 2., 3., 4. und 5. Satz statt „allgemeine Deriviertenfunktion" heißen: „vordere oder hintere extreme Deriviertenfunktion". Gleiches gilt für Nr. 2. 2. 5.; 3. Satz, B.

*Beweis.* Die *Anmerkung* folgt aus der Bikompaktheit von $\overline{M}$ im $E_n$. — Der *Zusatz* ergibt sich so: Da die $n$ Büschel unabhängig und die Achsen zu $\overline{M}$ fremd sind, geht durch jeden zu $p$ hinreichend, aber beliebig benachbarten Punkt $q$ aus jedem der Büschel genau eine $(n-1)$-Ebene, und der Durchschnitt dieser $n$ Hyperebenen ist $\{q\}$.

**1. 2. 1.** Es gilt nun der folgende

**Hilfssatz.** Vor. (1) *Es sei $K$ ein Kontinuum im projektiven $E_n$.* — (2) *Es sei $K$ lokal von endlichem Ordnungswert relativ zu je $n$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln. Demgemäß sei zu jedem Punkt $p \in K$ eine Umgebung $V(p)$ gewählt, so daß $K \frown \overline{V}(p)$ von endlichem Ordnungswert ist relativ zu $n$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln $\mathfrak{b}_\nu(p)$, $\nu = 1, \ldots, n$; im übrigen kann $V(p)$ beliebig klein sein.*

Beh. *Es gibt endlich viele Punkte $p_\varrho \in K$, $\varrho = 1, \ldots, r$, so daß die zugehörigen $V(p_\varrho) = V_\varrho$ eine offene Überdeckung von $K$ der folgenden Art liefern:* (1) *Es ist $K$ darstellbar als Vereinigung endlich vieler Kontinua $K_{\varrho\tau}$, $\tau = 1, \ldots, t_\varrho$; $\varrho = 1, \ldots, r$.* — (2) *Für festes $\varrho$ sind die $K_{\varrho 1}, \ldots, K_{\varrho t_\varrho}$ paarweise fremd und in $K \frown \overline{V}_\varrho$ enthalten. Jedes $K_{\varrho\tau}$ ist dabei von endlichem Ordnungswert relativ zu den $\mathfrak{b}_\nu(p_\varrho)$.* — (3) *Zu jedem Punkt $p \in K$ gehört ein $\varrho'$ und ein $\tau'$ sowie eine Umgebung $U = U(p)$ von $p$ derart, daß $p \in K_{\varrho'\tau'}$ und $K \frown \overline{U} = K_{\varrho'\tau'} \frown \overline{U}$ ist.*

*Bew.* (1) Zufolge Vor. (1) ist $K = \overline{K}$. Zufolge Vor. (2) ist daher die Anmerkung in Nr. 1. 2. anwendbar. Nach dem Zusatz zu Nr. 1. 2. genügt es dann, die Beh. für konvexe Polyeder $\overline{V}_\mu$ zu beweisen, deren jedes in einem $V(p)$ enthalten ist. Wir schreiben $V$ statt $V_\mu$; es ist $V = \underline{V}$. — (2) Nach Annahme ist die Begrenzung $V_g = \overline{V} - V$ enthalten in lauter $(n-1)$-Ebenen aus $n$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln $\mathfrak{b}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Da $K$ von endlichem Ordnungswert relativ zu allen $\mathfrak{b}_\nu$ sein soll, ist $K \frown V_g$ endlich. Weil $K$ ein Kontinuum ist, besitzt daher (vgl. [7], S. 161, XVII, (α)) $K \frown \overline{V}$ nur endlich viele Komponenten. Und zwar enthält jede *mehrpunktige* Komponente $K_{\mu\tau}$ von $K \frown \overline{V}$ (innere) Punkte von $V = \underline{V}$ und ist ein Kontinuum; hingegen liegen sämtliche einpunktigen Komponenten $K'$ von $K \frown \overline{V}$ in $V_g$. Jeder Punkt von $K \frown V_g$, insbesondere also jede dieser einpunktigen Komponenten $K'$ von $K \frown \overline{V}$, ist aber innerer Punkt von anderen $V_\varrho$ (also $\varrho \neq \mu$, wenn $V = V_\mu$); jedes $K'$ ist daher Teil einer mehrpunktigen Komponente eines $K \frown \overline{V}_\varrho$. Somit kann bei Betrachtung von $K \frown \overline{V}_\mu$ von einpunktigen Komponenten abgesehen werden. Die gleiche Überlegung, wie sie für die (einpunktigen) $K'$ angestellt wurde, gilt aber für jeden Punkt $p \in K$; also: Jedes $p \in K$ liegt in einem $V_{\varrho'} = V''$ bzw. in einem $K_{\varrho'\tau'} = K''$, also in $K'' \frown V''$. Da die $K_{\varrho'\tau}$ paarweise fremd sind, gibt es eine Umgebung $U''$ von $K''$ und damit von $p$ mit $\overline{U}'' < V''$ derart, daß $K'' \frown U''$ von allen übrigen $K_{\varrho'\tau} \frown V''$, $\tau = 1, \ldots, t_{\varrho'}$; $\tau' \neq \tau$ positiven Abstand besitzt. Daher existiert auch eine, in $U''$ enthaltene Umgebung $U$ von $p$ mit der in Beh. (3) angegebenen Eigenschaft.

## § 2. Kontinua von lokal beschränkter Schwankung der Tangenten.

**2. 1.** Den $n$-dimensionalen affinen Raum[2]) bezeichneten wir mit $A_n$ (Nr. 1. 1.). Unter einem abgeschlossenen konvexen *Kegel* $F'$ im $A_n$ mit dem Punkt $p \in A_n$ als Scheitel und mit einer konvexen, abgeschlossenen Menge $B$, die in einer zu $p$ fremden $(n-1)$-Ebene enthalten ist, als „Generator" verstehen wir die $p$ enthaltende Menge aller Punkte des $A_n$ auf allen denjenigen, von $p$ ausgehenden („erzeugenden") Halbgeraden, die Punkte des Generators enthalten. Unter einem abgeschlossenen, konvexen *Doppelkegel* $F$ mit dem Scheitel $p$ wird verstanden die Vereinigung eines konvexen Kegels $F'$ (mit dem

Scheitel $p$) und desjenigen Kegels $F''$ mit dem gleichen Scheitel, dessen erzeugende Halbgeraden komplementär zu denen von $F'$ (auf den gemeinsamen Trägergeraden) sind.

Es sei $M$ eine im $A_n$ beschränkte Menge. Es heiße $M$ von beschränkter Tangentenschwankung, abgekürzt: b. T. S., wenn es einen abgeschlossenen, konvexen Doppelkegel $F = F(M) = F(q)$ gibt mit $q$ als Scheitel (wobei auch $q \in M$ sein kann) und von folgender Eigenschaft: Die durch $q$ gezogene Parallele zu einer beliebigen Tangente an $M$ in einem beliebigen Punkt von $M$ liegt in $F(q)$. Weiter heißt $M$ von b. T. S. *im Punkt* $p \in M$, wenn es eine Umgebung von $p$ auf $M$ gibt, die von b. T. S. ist. Schließlich heißt $M$ *lokal* von beschränkter Tangentenschwankung, wenn $M$ in jedem seiner Punkte von b. T. S. ist.

1. *Anmerkung.* Die beschränkte abgeschlossene Menge $M < A_n$ ist lokal von beschränkter Tangentenschwankung genau dann, wenn eine offene endliche Überdeckung $(V_1, \ldots, V_r)$ von $M$ existiert derart, daß $M \cap \overline{V}_\varrho$ von b. T. S. für jedes $\varrho = 1, \ldots, r$ ist. (Vgl. Entsprechendes in Nr. 1. 2.).

2. *Anmerkung.* Daß die Forderung stetiger Tangierbarkeit von $M$ ziemlich stark ist, zeigt der nachstehend konstruierte einfache Bogen $B$ (in der Ebene); denn dieses $B$ ist *nicht stetig tangierbar, obwohl $B$ in jedem Punkt gewöhnlich differenzierbar sowie von beschränkter Tangentenschwankung ist und überdies eingeschränkt bewegliche Tangente* besitzt (eingeschränkte Beweglichkeit der Tangente in $p_0 \in B$ bedeutet dabei: Der Schnittpunkt der Tangente an $B$ in $p \in B - \{p_0\}$ mit der Tangente $T_0$ an $B$ in $p_0$ liegt beliebig nahe an $p_0$, falls $p$ hinreichend benachbart zu $p_0$ ist). (Vgl. auch Nr. 4. 2.).

Einen Bogen $B$ mit den genannten Eigenschaften kann man so erhalten: Es seien $x, y$ rechtwinklige, kartesische Koordinaten in der euklidischen Ebene. Dann sei $Q$ die Menge aller $(x, y)$ mit $0 \leqq x \leqq 2^{-1}$; $x^3 \leqq y \leqq x^2$. Weiter sei $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots$, wobei nähere Verfügung über die reellen Zahlen $a_k$ vorbehalten bleibt. Der Durchschnitt der Geraden $y = a_k x$ mit $Q$ ist eine Strecke $S_k$, deren Endpunkte sind: $e_{2,k} = (x_{2,k} = a_k;$ $y_{2,k} = a_k^2)$ und $e_{3,k} = (x_{3,k} = (a_k)^{\frac{1}{2}};\ y_{3,k} = a_k \cdot (a_k)^{\frac{1}{2}})$. Es soll zunächst $x_{3,k+1} < x_{2,k}$ für jedes $k$ sein; dies ist genau dann der Fall, wenn $0 < a_{k+1} < a_k^2 (< a_k)$ ist. (Übrigens folgt dann $a_k \to 0$ für $k \to \infty$). Die Steigung $s_k'$ der Verbindungsstrecke $S_k'$ von $e_{2,k}$ mit $e_{3,k+1}$ ist $s_k' = (a_k^2 - a_{k+1}(a_{k+1})^{\frac{1}{2}}) : (a_k - (a_{k+1})^{\frac{1}{2}}) > a_k$. Wird der Anfangspunkt der Koordinaten mit $e_0 = (0, 0)$ bezeichnet, so ist $\{e_0\} \cup \bigcup_k (S_k \cup S_k')$ ein einfacher Bogen mit $e_0$ als Anfangspunkt. Man runde die von $S_k$ und $S_k'$ bzw. von $S_k'$ und $S_{k+1}$ gebildeten Ecken geeignet ab, wobei alle Strecken $S_k$, $S_k'$ gleichzeitig durch geeignet gewählte, hinreichend schwach gekrümmte, stetig differenzierbare Bogen vom Ordnungswert 3 je mit einem einzigen Wendepunkt ersetzt werden. Dann erhält man einen einfachen Bogen $B$, der überall gewöhnlich differenzierbar und mit Ausnahme höchstens von $e_0$ auch *stetig* differenzierbar (tangierbar) ist, der ferner überall eingeschränkt bewegliche Tangente besitzt. Daß in $e_0$ für $B$ stetige Tangierbarkeit vorliegt, läßt sich so verhindern: Man setze $v_k = a_k - (a_{k+1})^{\frac{1}{2}}$. Dann ist $s_k' = a_k^2 (v_k)^{-1} (1 - a_k) + 3a_k^2 - (3a_k - v_k)\, v_k$. Da $a_{k+1}$ durch $a_k$ und $v_k$ eindeutig bestimmt ist, kann $v_k$ im Rahmen der Bedingung $0 < v_k < a_k$ beliebig gewählt werden (denn es ist für jedes solche $v_k$ auch $0 < a_{k+1} = (a_k - v_k)^2 < a_k^2$). Für hinreichend kleine Wahl der $v_k$ ergibt sich daher $s_k' \to \infty$. Da andererseits die Steigung $s_k$ von $S_k$ gleich $a_k$ ist und diese die kleinste, $s_k'$ aber die größte Steigung einer Tangente an $S_k \cup S_k'$ bzw. an den durch Abrundung entstehenden Bogen ist, folgt: Die Parallelen durch $e_0$ zu den Tangenten, sowie Sehnen und Paratingenten an $B$ liegen sämtlich im abgeschlossenen 1. und 3. Quadranten; es ist also $B$ sogar ein Lipschitzbogen, d. h. von beschränkter Schwankung der (Richtungen der) Sehnen (und Paratingenten).

**2. 2.** Es gilt der folgende

**Satz.** Vor. *Es sei $M$ beschränkt und abgeschlossen im affinen $A_n$. Ferner sei $M$ von beschränkter Tangentenschwankung.*

Beh. *Zu $M$ existieren $n$ unabhängige $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, mit folgenden Eigenschaften:* (1) *Die $\mathfrak{b}_\nu$ sind sämtlich Parallelbüschel.* — (2) *Keine $(n-1)$-Ebene aus irgend einem der $\mathfrak{b}_\nu$ enthält eine Tangente an $M$.* — (3) *Es ist $M$ von endlichem Ordnungswert relativ zu einem jeden der $\mathfrak{b}_\nu$.*

*Bew.* (I) Nach Vor. existiert zu $M$ ein konvexer Doppelkegel $F$ derart, daß die durch einen Punkt $0 \in A_n$ gezogenen Parallelen zu den Tangenten an $M$ sämtlich in $F$ liegen. Nun lassen sich $(n-1)$-Büschel der gewünschten Art etwa so bestimmen: Es sei $H'$ eine zu $F - \{0\}$ fremde $(n-1)$-Ebene durch 0 und es sei $H' \cap E^u$ als uneigentliche $(n-2)$-Ebene in $E^u$ ausgezeichnet, so daß $E^u$ zu einem $A_{n-1}$ wird. In diesem $A_{n-1}$ ist dann $D = F \cap E^u$ beschränkt und konvex. Daher gibt es in diesem $A_{n-1}$ solche $A_{n-2}$, etwa $C_1, \ldots, C_n$, die zu $D$ fremd sind und deren Durchschnitt leer ist. Die $(n-1)$-Büschel im $A_n$ mit den $C_\nu$ als Achsen sind daher unabhängig. Außerdem ist jedes $C_\nu$ fremd zu $M = \overline{M}$, weil $\overline{M}$ beschränkt ist. Damit ist Beh. (1) und (2) bewiesen.

(II) Es ist $M = \overline{M}$ von endlichem Ordnungswert relativ zu jedem der in Ziff. (I) konstruierten Büschel $\mathfrak{b}_\nu$. In der Tat: Wir setzen $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_\nu$. Hat nun die $(n-1)$-Ebene $H \in \mathfrak{b}$ einen unendlichen Durchschnitt mit $M$, so besitzt $M \cap H$ einen Häufungspunkt $q_0 \in M = \overline{M}$ (weil $M$ kompakt ist). Daher existiert eine Folge von Punkten $q_r \in M \cap H$ mit $q_0 = \lim q_r$ und $q_r \neq q_t$ für $r \neq t$. Die Folge der $q_r$ enthält aber eine Teilfolge von Punkten $q'_k$ mit $q_0 = \lim q'_k$ derart, daß die von $q_0$ ausgehenden, $q'_k$ enthaltenden Halbgeraden gegen eine Halbgerade $h$ mit $q_0$ als Anfangspunkt konvergieren (denn der Raum der Halbgeraden mit $q_0$ als Anfangspunkt ist kompakt). Die Trägergerade von $h$ ist dann Tangente am $\overline{M} = M$ in $q_0$ und liegt in $H \in \mathfrak{b}$. Dies widerspricht aber der in Ziff. (I) des Beweises angegebenen Konstruktion von $\mathfrak{b}$. Damit ist auch die Beh. (3) bewiesen.

**2. 3.** Mit Hilfe des Satzes in Nr. 2. 2. ergibt sich der nachstehende

**Satz.** Vor. *Es sei $K$ im affinen $A_n$ ein Kontinuum von* lokal *beschränkter Tangentenschwankung.*

Beh. *Die Menge $S$ der Spitzen von $K$ ist separiert.*

Bew. Wir wählen zu jedem Punkt $p \in K$ eine Umgebung $V$ von $p$, die von b. T. S. ist. Zufolge des Satzes in Nr. 2. 2. ist also $K$ lokal von endlicher Ordnung relativ zu je $n$ unabhängigen $(n-1)$-(Parallel-)Büscheln. Daher sind die Vor. des Hilfssatzes in Nr. 1. 2.1. erfüllt; mithin ist $K$ darstellbar als Vereinigung endlich vieler Kontinua $K_{\varrho\tau}$, deren jedes von endlicher Ordnung relativ zu je $n$ unabhängigen (Parallel-)Büscheln ist. Gemäß Nr. 1. 1. 2., Zusatz 2., ist daher die Menge $S_{\varrho\tau}$ der Spitzen von $K_{\varrho\tau}$ separiert. Ist nun $p$ eine beliebige Spitze von $K$, so existieren (gemäß Nr. 1. 2. 1., Hilfssatz) zu $p$ solche $\varrho'$, $\tau'$ sowie eine Umgebung $U = U(p)$ von $p$ derart, daß $p \in K_{\varrho'\tau'}$ sowie $K \cap \overline{U} = K_{\varrho'\tau'} \cap \overline{U}$ ist; daher ist also $p$ auch Spitze von $K_{\varrho'\tau'}$. Somit ist die Menge $S$ aller Spitzen von $K$ Teilmenge der Vereinigung aller $S_{\varrho\tau}$. Da aber diese $S_{\varrho\tau}$ sämtlich separiert sind und da ihre Anzahl endlich ist, gilt dies auch[6]) für ihre Vereinigung und sodann[6]) für $S$.

## § 3. Darstellung der Kontinua von lokal beschränkter Tangentenschwankung als (abgeschlossene Hüllen von) Bogensummen.

### 3. 1. Bogensummen[10]).

**3. 1. 1.** Als *einfacher* (abgeschlossener) *Bogen* $B = \overline{B}$ (im $E_n$ oder $A_n$) werde jedes topologische Bild einer abgeschlossenen Strecke im $E_n$ bzw. $A_n$ bezeichnet. Die Bilder der Endpunkte der Urbildstrecke heißen *Endpunkte* des Bogens, während die übrigen Punkte von $B$ als *innere Punkte* von $B$ und die Menge der inneren Punkte als *offener Teil* $\underset{\sim}{B}$ von $B$ bezeichnet wird. Nimmt man von einem einfachen Bogen einen Endpunkt bzw. beide Endpunkte weg, so erhält man einen *halboffenen* bzw. *offenen* einfachen Bogen; letzterer ist gleich $\underset{\sim}{B}$. — Ist die Achse eines $(n-1)$-Büschels $\mathfrak{b}$ fremd zur abgeschlossenen Hülle $\overline{R}$ der Menge $\underset{\sim}{R}$ und besitzt $R$ relativ $\mathfrak{b}$ den Ordnungswert 1, so heißt $R$ auch *einfach relativ* $\mathfrak{b}$.

Unter einer Bogensumme verstehen wir jede (ev. auch leere) Vereinigung $\mathsf{U}_k B_k$ von abzählbar vielen[7]), einfachen, abgeschlossenen Bogen $B_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Sind die $B_k$ paarweise fremd bis auf höchstens Endpunkte, so sprechen wir von einer Bogensumme im engeren Sinne, abgekürzt i. e. S.

*Die Vereinigung abzählbar vieler Bogensummen ist eine Bogensumme.*

**3. 1. 2.** *Jeder halboffene oder offene einfache Bogen ist darstellbar als Bogensumme im engeren Sinne.* (Denn dies ist richtig für die halboffene bzw. offene Urbildstrecke.) *Jeder abgeschlossene einfache Bogen $B$ ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme im engeren Sinne, deren Bogen nur innere Punkte von $B$ enthalten* (weil der abgeschlossene Bogen abgeschlossene Hülle des offenen Bogens ist); *die Bogen können sogar als paarweise fremd gewählt werden.*

**3. 1. 3.** Es gilt nun (vgl. [9], S. 101, Nr. 1.):

*Jede Bogensumme $\mathsf{U}_k B_k$ ist darstellbar als Bogensumme $\mathsf{U}_m B'_m$ im engeren Sinne, wobei jedes $B'_m$ Teilbogen eines $B_k$ ist.*

Bew. (vgl. [9], S. 101). Es sei $S = \mathsf{U}_k B_k$ die gegebene Bogensumme. Man setze $B'_k = B_k - S_k$, wobei $S_k = \mathsf{U}_{\varkappa=1}^{k-1} B_k \cap B_\varkappa$ ist; es kann $S_k$ oder $B'_k$ ev. auch leer sein. Wegen der Abgeschlossenheit von $B_k$, also von $S_k$, ist $B'_k$ offen in $B_k$ und folglich Vereinigung von abzählbar vielen in $B_k$ offenen paarweise fremden Bogen $B_{kr}$, $r = 1, 2, \ldots$. Dabei ist also $B_{kr}$ mehrpunktig und entweder ein offener oder halboffener oder abgeschlossener einfacher Bogen (je nachdem $B_{kr}$ keinen oder einen oder (falls $S_k = 0$) beide Endpunkte von $B_k$ enthält). Zufolge Nr. 3. 1. 2 ist daher jedes $B_{kr}$ und damit (weil die $B_{k1}, B_{k2}, \ldots$ paarweise fremd sind) auch $B'_k$ darstellbar als Bogensumme i. e. S. Da ferner die $B'_k$ paarweise fremd sind (nach Kontruktion) und $S = \mathsf{U}_k B'_k$ gilt, so ist auch $S$ darstellbar als Bogensumme i. e. S.

**3. 1. 4.** Weiter gilt:

*Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Hüllen $\overline{S}_\mu$, $\mu = 1, \ldots, m$, von Bogensummen $S_\mu = \mathsf{U}_k B_{\mu k}$ ist abgeschlossene Hülle einer Bogensumme*, nämlich von $\mathsf{U}_{\mu=1}^m \mathsf{U}_k B_{\mu k}$.

In der Tat: $\overline{\mathsf{U}_{\mu=1}^m S_\mu} = \mathsf{U}_{\mu=1}^m \overline{S}_\mu$ und $S_1 \cup \cdots \cup S_m$ ist Bogensumme.

**3. 1. 5.** *Die abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von (beliebig vielen) abgeschlossenen Hüllen $\overline{M}_i$ ist gleich der abgeschlossenen Hülle der Vereinigung der $M_i$, also:*

$$\overline{\mathsf{U}_i M_i} = \overline{\mathsf{U}_i \overline{M}_i}.$$

[10]) Die Feststellungen in Nr. 3. 1. 1.—3. 1. 5. 1. gelten allgemein für topologische Räume (nicht nur für den $E_n$ und den $A_n$).

Nämlich: Wegen $M_i < \overline{M_i}$ ist $\mathsf{U}_i M_i < \mathsf{U}_i \overline{M_i}$ und $\overline{\mathsf{U}_i M_i} < \overline{\mathsf{U}_i \overline{M_i}}$. Andererseits ist $M_i < \mathsf{U}_i M_i$, also $\overline{M_i} < \overline{\mathsf{U}_i M_i}$ für jedes $i$; daraus ergibt sich $\mathsf{U}_i \overline{M_i} < \overline{\mathsf{U}_i M_i}$ und daher

$$\overline{\mathsf{U}_i \overline{M_i}} < \overline{\overline{\mathsf{U}_i M_i}} = \overline{\mathsf{U}_i M_i}.$$

**3. 1. 5. 1.** *Die abgeschlossene Hülle einer Bogensumme $\mathsf{U}_k B_k$ ist abgeschlossene Hülle einer Bogensumme im engeren Sinne $\mathsf{U}_r B_r''$, wobei jedes $B_r''$ Teilbogen eines $B_k$ ist und nur innere Punkte dieses $B_k$ enthält.*

Bew. Gemäß Nr. 3. 1. 3. ist $\mathsf{U}_k B_k = \mathsf{U}_m B_m'$, wobei jedes $B_m'$ Teil eines $B_k$ ist. Gemäß Nr. 3. 1. 2. ist jedes $B_m'$ (mit $B_m' = \overline{B_m'}$) abgeschlossene Hülle einer Bogensumme i. e. S., etwa $B_m' = \mathsf{U}_t B_{mt}'$, wobei jedes $B_{mt}'$ nur innere Punkte von $B_m'$ also auch von $B_k$ enthält. Die Anwendung von Nr. 3. 1. 5. führt zur Beh., wenn noch die $B_{mt}'$ mit $B_r''$ bezeichnet werden.

**3. 2.** Wir zeigen nun:

**Satz.** Vor. *Es sei $K$ ein beschränktes Kontinuum im projektiven $E_n$ (oder, was auf das Gleiche hinausläuft, ein Kontinuum im affinen $A_n$) und lokal von beschränkter Tangentenschwankung.*

Beh. *Es ist $K$ darstellbar* (**A**) *sowohl als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme im engeren Sinne etwa $K = \overline{\mathsf{U}_k B_k}$, wobei die einfachen Bogen $B_k$ von beschränkter Tangentenschwankung sind und folgende Eigenschaften besitzen: Es gibt insgesamt endlich viele $(n-1)$-(Parallel-)Büschel $\mathfrak{b}_r$, $r = 1, \ldots, r_0$; $r_0 \geqq n$, derart, daß jedes $B_k$ den Ordnungswert Eins besitzt relativ zu $n$, durch $B_k$ bestimmten, unabhängigen unter den Büscheln $\mathfrak{b}_r$ (wobei also $B_k$ fremd ist zu den Achsen dieser $\mathfrak{b}_r$); dabei liegt keine Tangente an $B_k$ in einer Hyperebene aus einem dieser $n$ Büschel.* — (**B**) *wie als Bogensumme im engeren Sinne.*

**1. Zusatz.** Jeder der $B_k$ ist rektifizierbar (gemäß [8], S. 76).

**2. Zusatz.** Die Beh. (A) und (B) gelten auch dann, wenn $K$ als lokal von *endlichem Ordnungswert relativ* zu je $n$ unabhängigen $(n-1)$-Büscheln vorausgesetzt wird.

Bew. (**I**) Gemäß des Satzes in Nr. 2. 2. ist $K$ auch lokal von endlicher Ordnung relativ je zu $n$ unabhängigen $(n-1)$-(Parallel-)Büscheln. Daher genügt es, den 2. Zusatz zu beweisen. — (**II**) Im Falle der Vor. des 2. Zusatzes ist aber der Hilfssatz in Nr. 1. 2. 1. anwendbar. Daher genügt es sogar, die Beh. (A) und (B) für jedes der in der Beh. dieses Hilfssatzes genannten Kontinua $K_{\varrho\tau}$ zu beweisen. Ist nämlich $K_{\varrho\tau}$ abgeschlossene Hülle einer Bogensumme (Beh. (A)) bzw. Bogensumme (Beh. (B)), so auch $K = \mathsf{U}_{\varrho\tau} K_{\varrho\tau}$ (gemäß Nr. 3. 1. 4. bzw. 3. 1. 1.). Und beim Übergang zu Bogensummen im engeren Sinne geht man gemäß Nr. 3. 1. 3. zu Teilbogen der Bogen der ursprünglichen Bogensumme über, zerstört also die Eigenschaften der letzteren nicht, soweit sie für die Beh. in Betracht kommen. — (**III**) (**a**) Zur Abkürzung setzen wir $K = K_{\varrho\tau}$. Es ist $K$ von endlichem Ordnungswert relativ zu einem jeden von $n$ unabhängigen Büscheln $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$. Daher gelten (gemäß [3], S. 21/22) die Beh. (A) und (B) für $K$ bezüglich eines jeden einzelnen der $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$. — (**III**) (**b**) Zufolge (III) (a) gilt Beh. (B) für $K$; denn Beh. (B) ist unabhängig vom Bezugsbüschel. — (**III**) (**c**). Um auch Beh. (A) zu beweisen, also Bogen $B_k$ zu bestimmen, die einfach *gleichzeitig* relativ zu sämtlichen $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ sind, kann man so vorgehen: Da Beh. (A) für $K$ bezüglich $\mathfrak{b}_1$ gilt (vgl. (III) (a)), ist $K = \overline{\mathsf{U}_{\mu_1} B_{\mu_1}^1}$, wobei die $B_{\mu_1}^1$ sämtlich abgeschlossen (bis auf Endpunkte paarweise fremd) und einfach relativ $\mathfrak{b}_1$ sind, ferner von endlichem Ordnungswert relativ zu jedem der $\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$. Da Beh. (A) für $K$, also für jedes $B_{\mu_1}^1$ bezüglich $\mathfrak{b}_2$ gilt (vgl. (III) (a)), ist $B_{\mu_1}^1 = \overline{\mathsf{U}_{\mu_2} B_{\mu_1\mu_2}^{12}}$ für jedes $\mu_1$, wobei die abgeschlossenen Bogen $B_{\mu_1\mu_2}^{12}$ einfach relativ $\mathfrak{b}_2$ sowie zugleich einfach rela-

tiv zu $\mathfrak{b}_1$ (als Teilbogen von $B^1_{\mu_1}$) sind. Aus Nr. 3. 1. 5 folgt $K = \overline{\bigcup_{\mu_1} \bigcup_{\mu_2} B^{12}_{\mu_1\mu_2}}$. Ebenso kann man jedes $B^{12}_{\mu_1\mu_2}$ als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von Bogen $B^{123}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ darstellen, deren jeder jetzt gleichzeitig zu $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ relativ einfach ist. Wendet man wieder Nr. 3. 1. 5. an und wiederholt diese Schlüsse im ganzen $n$-mal, so ergibt sich die Beh. (A).

## § 4. Struktursatz für tangierbare Kontinua von lokal eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit (und von lokal beschränkter Tangentenschwankung).

**4. 1.** Wir zeigen zunächst

**Satz.** Vor. (1) *Es sei $K$ ein tangierbares Kontinuum in $A_n$.* — (2) *Es existiere ein $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$, relativ zu dem $K$ endlichen Ordnungswert besitzt und wobei kein $H \in \mathfrak{b}$ Tangenten an $K$ enthält, wobei ferner ein $H \in \mathfrak{b}$ fremd ist zu $K$.*

Beh. *Es ist $K$ ein relativ zu $\mathfrak{b}$ einfacher Bogen genau dann, wenn $K$ keinen einfachen Bogen enthält, der eine Spitze besitzt*[11]).

*Anmerkung.* Ein Kontinuum, das relativ zu $\mathfrak{b}$ die Ordnung Eins besitzt, ist ein einfacher Bogen.

*Bew. Dann.* Es existiere ein $H \in \mathfrak{b}$ mit mehrpunktigem $K \frown H$; es sei etwa $p, q \in K \frown H$, $p \neq q$. Da $K$ endlichen Ordnungswert relativ zu $\mathfrak{b}$ besitzt, existiert ein einfacher Teilbogen $B$ von $K$ mit den Endpunkten $p$ und $q$ (vgl. [11], S. 272, Satz 2.; auch [3], S. 30). *Entweder* ist $B \frown H = B$; dann ist $K$ von unendlichem Ordnungswert relativ zu $\mathfrak{b}$, im Widerspruch zur Vor. *Oder* es ist $B - B \frown H$ nicht leer. Da $B$ beschränkt ist und nicht in $H$ liegt, gibt es in $\mathfrak{b}$ eine $(n-1)$-Ebene $H' \neq H$, durch die $B$ in einem inneren (d. h. von $p$ und $q$ verschiedenen) Punkt $t$ gestützt wird (da ein $H \in \mathfrak{b}$ fremd ist zu $K$, kann $\mathfrak{b}$ als Parallelbüschel angenommen werden). Es ist aber $t$ kein Endpunkt von $B$ und daher (nach Annahme) keine Spitze von $B$. Da $B$ als Teilmenge von $K$ ebenfalls tangierbar ist, existiert die Tangente an $B$ im Stützpunkt $t$; sie liegt in $H'$ (weil andernfalls $t$ Schnittpunkt mit $H'$ wäre). Es liegt daher eine Tangente an $B$ und damit an $K$ in $H' \in \mathfrak{b}$, im Widerspruch zur Vor. — *Nur dann.* Es sei also $K$ ein relativ zu $\mathfrak{b}$ einfacher Bogen; $a$ und $b$ seien die Endpunkte von $K$. Es gibt $A, B \in \mathfrak{b}$ mit $a \in A$, $b \in B$. Wir schließen jetzt indirekt. Es sei nämlich $s \in K$, $s \neq a$, $s \neq b$ und $s$ Spitze von $K$. Ist $S \in \mathfrak{b}$ mit $s \in S$, so ist $s$ Stützpunkt von $K$ auf $S$; denn nach Vor. liegt die Spitzentangente (in $s$) nicht in $S$. Da $a$ und $b$ auf verschiedenen Seiten von $S$ liegen (weil $K$ einfach relativ zu $\mathfrak{b}$ ist), da ferner eine Umgebung von $s$ auf $K$ ganz auf der einen Seite von $S$ liegt, etwa auf der gleichen Seite wie $a$, so muß der Teilbogen von $K$ mit den Endpunkten $s$ und $b$ in einem seiner inneren Punkte von $S$ getroffen werden. Dies widerspricht der Annahme, daß $K$ einfach relativ zu $\mathfrak{b}$ sei.

**4. 2.** Es sei $p \in M$ Häufungspunkt von $M < E_n$; ferner seien $q_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n-1$, untereinander und von $p$ verschiedene Punkte von $M$. Durch $p, q_1, \ldots, q_{n-1}$ wird mindestens eine $(n-1)$-Ebene bestimmt; eine solche sei $G$. Unter einer $(n-1)$-Schmiegebene von $M$ in $p$ wird jeder Limes $Z$ von solchen $G$ für gegen $p$ konvergierende $q_1, \ldots, q_{n-1}$ verstanden.

Weiter bezeichnen wir $M$ als *im Punkt $p$* von eingeschränkt beweglicher Tangente oder von eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit, abgekürzt: von e. T. B., wenn zu jeder $(n-1)$-Schmiegebene $Z$ an $M$ im (Häufungs-)Punkt $p$ von $M$ (mit $p \in M$) eine Umgebung $U = U(Z; p)$ von $p$ und eine Umgebung $W = W(Z; p)$

[11]) Unter einer *Spitze* eines einfachen *Bogens* $B$ verstehen wir jede Spitze (im Sinne von Nr. 1. 1. 1.) der Punktmenge $B$, die zugleich innerer Punkt (im Sinne von Nr. 3. 1. 1.) des Bogens ist.

von $p$ existiert derart, daß für jede Tangente $T = T(q)$ an $M$ in jedem (Häufungs-)Punkt $q \in M \cap W$ gilt: $Z \cap T \cap U \neq \emptyset$. Falls $M$ von e. T. B. in jedem Häufungspunkt $p$ von $M$ ist, heißt $M$ selbst (*lokal*) von eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit.

Anmerkung. Eine etwas schärfere Forderung wird bei der folgenden Definition gestellt, die sich enger an eine bei den ebenen dualisierbaren Kurven gestellte (vgl. [10], § 5, S. 518/19) anschließt: Es wird dabei die Bedingung $Z \cap T \cap U \neq \emptyset$ ersetzt durch $Z \cap T$ einpunktig und $Z \cap T \subset U$ für $q \neq p$.

Anmerkung. Es sei $B$ ein einfacher tangierbarer, sogar in jedem Punkt gewöhnlich differenzierbarer Bogen. Es gibt derartige $B$, die (a) von b. T. S. sind aber nicht von e. T. B.; und (b) von e. T. B. aber nicht von b. T. S.

Ein Beispiel für (a) ist der durch $y = f(x)$ mit $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin x^{-1}$ für $0 < |x| < 1$ definierte Bogen. — Um Beispiele zu (b) zu erhalten, kann man in Nr. 2. 1. etwa die Bedingung aufgeben, daß $s'_k > 0$ sei, vielmehr $s'_k$ in geeigneter Weise gegen $-\infty$ konvergieren lassen.

**4. 2. 1.** Es gilt nun der folgende

**Satz.** Vor. (1) *Es sei $B \subset E_n$ ein (abgeschlossener) Bogen, der einfach ist relativ zum $(n-1)$-Büschel $\mathfrak{b}$ und fremd zu einem $H \in \mathfrak{b}$.* — (2) *Es enthalte $B$ keine hyperebenen*[12]) *Teilbogen.* — (3) *Es sei $B$ tangierbar und in keinem $H \in \mathfrak{b}$ sei eine Tangente von $B$ enthalten.* — (4) *Es sei $B$ von eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit.*

Beh. *Es ist $B$ von endlichem Ordnungswert bezüglich des Systems* aller $(n-1)$-*Ebenen des $E_n$*[13]).

*Bew.* Gemäß Vor. (1) kann $B$ als beschränkt im $A_n$ und $\mathfrak{b}$ als Parallelenbüschel angenommen werden. — (I) Zufolge Vor. (1) und (3) ist der Satz in Nr. 4. 1. anwendbar. — Demgemäß besitzt der relativ einfache Bogen $B$ keine Spitze (in einem seiner inneren Punkte). — (II) Es sei nun $G$ irgend eine $(n-1)$-Ebene ($G \notin \mathfrak{b}$), für die $D = B \cap G$ unendlich ist. Wegen der Kompaktheit von $B$ enthält $D$ einen Häufungspunkt $p$ und es existieren $q'_k \in D$ mit $q'_k \to p$ für $k \to \infty$, wobei $q'_k \neq p$, $q'_k \neq q'_m$ für $k \neq m$; $k, m = 1, 2, \ldots$. Es ist $G$ eine $(n-1)$-Schmiegebene von $B$ in $p$ (im Sinne von Nr. 4. 2.). Die Folge $\{q'_k\}$ enthält eine Teilfolge $\{q_k\}$ derart, daß die $q_k$ in einer einseitigen Umgebung von $p$ auf $B$ liegen und monoton auf $B$ gegen $p$ konvergieren. Alsdann sei $B_k$ der durch $q_k$ und $q_{k+1}$ als Endpunkte bestimmte Teilbogen von $B$. Nach Vor. (2) ist $B_k \neq B_k \cap G$. Daher gibt es eine zu $G$ parallele (von $G$ verschiedene) $(n-1)$-Ebene $G'_k$, von welcher der beschränkte Bogen $B_k$ in einem inneren Punkt $s_k$ von $B_k$ gestützt wird. Da $s_k$ weder Endpunkt noch Spitze von $B_k$ ist (vgl. Ziff. (I)), muß die Tangente $T_k$ in $s_k$ an $B_k$ enthalten sein in $G'_k$. Nun konvergieren aber mit den $q_k$ auch die $s_k$ gegen $p$ (auf $B$). Daher gibt es in beliebiger Umgebung $W$ von $p$ (in $A_n$) solche Punkte $s_k \in B$, für deren Tangenten $T_k$ gilt: $U \cap T_k \cap G = \emptyset$ für jede Umgebung $U$ von $p$. Dies widerspricht der Vor. (4).

**4. 3.** Unter Benutzung des Satzes in Nr. 4. 2. 1. erhalten wir jetzt den

**Satz.** Vor. (1) *Es sei $K$ ein Kontinuum im $A_n$ ohne hyperebene Teilbogen.* — (2) *Es sei $K$ tangierbar und lokal von beschränkter Tangentenschwankung.* — (3) *Es sei $K$ von eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit.*

Beh. *Es ist $K$ darstellbar als abgeschlossene Hülle $\bar{S}$ einer Bogensumme $S$ im engeren Sinne der folgenden Art: In $S = \bigcup_k B_k$ sind die einfachen Bogen $B_k$ gewöhnlich differenzier-*

---

[12]) Eine Menge $M \subset E_n$ heißt *hyperebenen*, wenn es eine $(n-1)$-Ebene $H$ mit $M \subset H$ gibt.

[13]) Eine Menge $M \subset E_n$ heißt von *endlichem Ordnungswert* bezüglich des *Systems aller $(n-1)$-Ebenen $H$*, wenn $M \cap H$ endlich ist für jedes $H$. Besitzen die Mächtigkeiten dieser $M \cap H$ sogar ein Maximum $j$, wobei also $j$ eine natürliche Zahl ist, so heißt $M$ von dem (*beschränkten*) *Ordnungswert* $j$ ($j \geqq 1$).

*bar (also frei von Spitzen), ferner ist jedes $B_k$ von* endlichem *Ordnungswert bezüglich des Systems aller Hyperebenen des $A_n$. Überdies ist $B_k$ einfach relativ zu n unabhängigen $(n-1)$-(Parallel-)Büscheln.*

**Zusatz.** In der Beh. kann man die $B_k$ auch ersetzen durch lauter total ordnungshomogene[14]) Bogen von beschränktem bzw. endlichem Ordnungswert.

Bew. (I) Weil $K$ ein Kontinuum und lokal von b. T. S. ist, folgt aus dem Satz der Nr. 3. 2., daß $K = \overline{\mathsf{U}_k B_k}$ ist; jedes $B_k$ ist dabei einfach relativ zu je $n$ unabhängigen $(n-1)$-Parallelbüscheln $\mathfrak{b}$ und kein $H \in \mathfrak{b}$ enthält Tangenten an $B_k$. — (II) Mit $K$ ist aber auch $B_k$ tangierbar und von e. T. B. und enthält keine hyperebenen Teilbogen. — (III) Zufolge Ziff. (I) und (II) sind daher für die $B_k$ die Vor. des Satzes in Nr. 4. 2.1. erfüllt. Daraus folgt die Beh. — *Betr. den Zusatz.* Jeder einfache (abgeschlossene) Bogen $B_k$ von endlicher Ordnung (bezüglich des Systems aller $(n-1)$-Ebenen) ist (vgl. [4], S. 89) abgeschlossene Hülle einer Bogensumme $\mathsf{U}_r B_{kr}$ i. e. S., wobei jedes $B_{kr}$ (total) ordnungshomogen von beschränktem oder endlichem Ordnungswert ist. Demzufolge ist $K$ abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Hüllen von Bogensummen; gemäß Nr. 3. 1. 5. und 3. 1. 5. 1. ist also $K$ selbst abgeschlossene Hülle einer Bogensumme i. e. S., deren einzelne Bogen, als Teilbogen der $B_{kr}$ (vgl. Nr. 3. 1. 5. 1.) total ordnungshomogen sind.

**4. 3. 1.** In der affinen *Ebene* $A_2$ gilt aber (vgl. [2], S. 60, sowie [5], S. 28, § 6) der Satz, daß die einzigen (total) ordnungshomogenen Bogen von endlichem oder beschränktem Ordnungswert die Konvexbogen (Ordnung Zwei) sind (bezüglich des Systems aller Geraden des $A_2$). Der Satz in Nr. 4. 3. spezialisiert sich daher zum folgenden:

**Satz.** *Es sei K ein Kontinuum in der (affinen) Ebene $A_2$, das keine Strecken enthält, ferner tangierbar sowie von beschränkter Tangentenschwankung und von eingeschränkter Tangentenbeweglichkeit ist. Dann ist K abgeschlossene Hülle einer Bogensumme aus (abzählbar vielen) Konvexbogen.*

## § 5. Anwendung auf (Durchlaufungs-) Kurven. Der Struktursatz von Rosenthal für ebene dualisierbare Kurven.

Es soll jetzt noch untersucht werden, inwiefern die auf Kontinua sich beziehenden Sätze insbesondere von § 4 zu Ergebnissen auch für Durchlaufungskurven führen.

**5. 1.** Unter einer (Durchlaufungs-)*Kurve* im $E_n$ bzw. $A_n$ verstehen wir ein eindeutiges stetiges Streckenbild im $E_n$ bzw. $A_n$. Präziser gesagt: Ist $J = [\alpha, \beta]$ eine abgeschlossene Strecke auf der reellen Zahlgeraden (d. h. im $A_1$) und ist $p \mid J$ eine eindeutige stetige Abbildung von $J$ in $E_n$ bzw. $A_n$, so wird als Kurve $\underline{C}(J)$ die Menge der Paare $(\tau, p(\tau))$ mit $\tau \in J$ bezeichnet; ist $J'$ abgeschlossene Teilstrecke von $J$, so heißt $\underline{C}(J')$ *Teilkurve* von $\underline{C}(J)$. Der Bildpunkt $p(\tau)$ heiße Träger der Stelle $(\tau, p(\tau)) = \underline{p}(\tau)$ und die Menge aller Bildpunkte $p(\tau)$ der *Träger* $C = C(J)$ der *Kurve* $\underline{C}(J)$.

*Keine Teilkurve soll einen einpunktigen Träger besitzen.* Für den *Fall des* $A_n$ wird überdies die *Beschränktheit des Trägers* der Kurve gefordert.

---

[14]) Es sei $M \subset E_n$ von endlichem Ordnungswert bezüglich des Systems aller $(n-1)$-Ebenen (vgl. Fußnote 13). Der *Punkt* $x \in M$ heißt von endlichem (bzw. beschränktem) Ordnungswert, wenn jede Umgebung von $x$ auf $M$ von endlichem (bzw. beschränktem) Ordnungswert ist. Der Ordnungswert des Punktes $x$ ist dann endlich (bzw. gleich dem Minimum der Ordnungswerte aller Umgebungen von $x$). Und $M$ wird als *total ordnungshomogen* bezeichnet, wenn alle Punkte von $M$ den gleichen (endlichen und nicht beschränkten bzw. beschränkten) Ordnungswert besitzen und wenn dieser Ordnungswert gleich dem von $M$ ist.

Abkürzend läßt sich also die Kurve $\underline{C}(J)$ erklären als das *orientierte*, d. h. mit einem Durchlaufungssinn versehene, im Kleinen zusammenhängende Kontinuum $C(T)$. Entsprechend der dem Träger $C(J)$ durch die Abbildung $p \mid J$ aufgeprägten Orientierung werden zu jeder Stelle $\underline{p}(\tau)$ als ihre *vorderen* und *hinteren Umgebungen* $\underline{C}(U^{\pm})$ die Mengen der Stellen $\underline{p}(\tau')$ mit $\tau' \in U^{\pm}$ erklärt, wobei $U^{+}$ bzw. $U^{-}$ eine vordere bzw. hintere Umgebung von $\tau$ auf $J$ bezeichnet.

Demgemäß ist eine vordere bzw. hintere Halbtangente $T^{\pm}(\tau)$ an die Kurve in (mit) der Berührstelle $\underline{p}(\tau)$ erklärt als Limes von Halbgeraden mit $\underline{p}(\tau)$ als Anfangspunkt durch von $\underline{p}(\tau)$ verschiedene Träger $\underline{p}(\tau')$, wenn $\tau'$ auf $J$ von vorne bzw. von hinten gegen $\tau$ konvergiert (dies und das Folgende nach [10], S. 482ff.). Jede Gerade, die Träger einer Halbtangente $T^{\pm}(\tau)$ ist, heißt Kurven*tangente* $T(\tau)$ mit der Berührstelle $\underline{p}(\tau)$. Es sind $T^{\pm}(\tau)$ und $T(\tau)$ im allgemeinen mehrdeutige Funktionen von $\tau$. Man beachte, daß in $\underline{p}(\tau)$ nur eine einzige Tangente existieren kann, dabei aber $T^{+}(\tau)$ und $T^{-}(\tau)$ nicht eindeutig bestimmt sind, daß nämlich zwei verschiedene $T^{+}(\tau)$ und zwei verschiedene $T^{-}(\tau)$ vorhanden sind (mit dem gleichen Träger $T(\tau)$) (vgl. [10], S. 486). Im Falle der Eindeutigkeit von $T(\tau)$ bzw. von $T^{+}(\tau)$ oder von $T^{-}(\tau)$ heißt die *Kurve* $\underline{C}(J)$ in $\underline{p}(\tau)$ tangierbar bzw. vorn oder hinten differenzierbar. Ist $\underline{C}(J)$ in $\underline{p}(\tau)$ vorn *und* hinten differenzierbar und besitzen $T^{+}(\tau)$ und $T^{-}(\tau)$ gleichen Träger, so heißt $\underline{C}(J)$ in $\underline{p}(\tau)$ vollständig differenzierbar; und zwar heißt $\underline{p}(\tau)$ gewöhnlich *differenzierbar* bzw. Spitze von $\underline{C}(J)$, je nachdem $T^{+}(\tau)$ und $T^{-}(\tau)$ verschieden oder identisch sind. Ist $\underline{C}(J)$ in jeder Stelle tangierbar bzw. ist $T(\tau)$ überdies als Funktion von $\tau$ stetig in $\underline{p}(\tau)$, so heißt die *Kurve* tangierbar bzw. *stetig* tangierbar; entsprechend ist der Ausdruck stetig (vollständig) differenzierbar zu verstehen.

Man erhält schließlich die Definition einer Kurve, die in $\underline{p}(\tau)$ (bzw. überall) von beschränkter Tangentenschwankung (b. T. S.) oder von eingeschränkt beweglicher Tangente (e. T. B.) ist, indem man in der Definition von Nr. 2. 1. bzw. 4. 2. „Punkt" durch „Stelle" und „Umgebung eines Punktes" durch „Umgebung einer Stelle" ersetzt.

Anmerkung. Ist die Kurve $\underline{C}(J)$ an der Stelle $\underline{p}(\tau)$ z. B. tangierbar, so ist die zugehörige Tangente an die Kurve in $\underline{p}(\tau)$ auch Tangente an den Träger $C(J)$ in $p(\tau)$. Aber zugleich ist der Träger $C(J)$ nicht notwendig z. B. tangierbar in $p(\tau)$. *Beispiele*: (a) Kurve mit Doppelpunkt und verschiedenen Tangenten im Doppelpunkt; (b) Auf einer Kreisperipherie $K$ (in der Ebene) seien $a, b$ die Endpunkte eines Bogens $B$ der Länge $4^{-1}\pi$. Man ziehe in $a$ und $b$ die Tangenten an $K$; ihr Schnittpunkt sei $c$. Man ersetze $B$ durch die beiden Strecken $ac$ und $bc$. Sodann durchlaufe man die Menge $K' = (K - B) \cup ac \cup bc$ folgendermaßen: Von $a$ (stets monoton) längs $ac$ nach $c$, von $c$ über $a$ und $b$ nach $c$ und zurück nach $b$. An den beiden *Stellen* mit dem Träger $c$ ist die so erklärte Kurve stetig tangierbar, im *Punkt* $c$ ist es der Träger $K'$ der Kurve nicht.

(2) Es kann die *Kurve* $\underline{C}(J)$ in $\underline{p}(\tau)$ von b. T. S. sein, aber der *Träger* $C(J)$ im Punkt $p(\tau)$ nicht von b. T. S.. Beispiel (vgl. [10], S. 485ff.): In der Ebene $A_2$ sei $S$ die Strecke $x = 0, -1 \leqq y \leqq 1$; ferner sei $K_r$ der Kreis $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Man konstruiert folgende Kurve: Zunächst wird $S$ von $y = -1$ bis $y = +1$ durchlaufen, wobei $x = y = 0$ etwa dem Werte $\tau = 4^{-1}$ entspreche; sodann durchlaufe man $S$ zurück von $y = +1$ bis $y = 0$ und jetzt der Reihe nach, jeweils in $x = y = 0$ beginnend und einmal im gleichen Sinne monoton, die Kreise $K_{r_1}, K_{r_2}, \ldots$, wobei $r_k = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Eine

Umgebung $\underline{C}(U)$ von $\underline{p}(4^{-1})$ auf $\underline{C}(J)$ ist v. b. T. S., nicht aber eine Umgebung des Trägers $p(4^{-1}) = (0, 0)$ auf $C(J)$.

**5. 2.** Aus der Kompaktheit von $J$, der Stetigkeit von $p \mid J$ und dem Umstand, daß $E_2$ bzw. $A_2$ ein rationaler $T_2$-Raum ist, folgt u. a. (vgl. z. B. [6], Bd. I., S. 202, 4. Satz): Der Träger $C(J)$ von $\underline{C}(J)$ ist ein (kompaktes) Kontinuum. Das Bild jeder abgeschlossenen Menge in $J$ ist abgeschlossen auf $C(J)$. Und mithin: Sind $q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, unendlich viele (sämtlich verschiedene) Punkte von $C(J)$, so existiert eine Teilfolge $((k_m))$ von $((k))$, ein $q \in C(J)$, ein $\tau \in J$ und eine Folge von $\tau_{k_m} \in J$, wobei $\tau_{k_m} \neq \tau_{k_r}$ für $k \neq r$, mit folgenden Eigenschaften: $\tau = \lim \tau_{k_m}$, und die $\tau_{k_m}$ liegen sämtlich entweder in einer vorderen oder sämtlich in einer hinteren Umgebung von $\tau$ auf $J$; ferner ist $q = \lim q_{k_m}$, wobei $q_{k_m} = p(\tau_{k_m})$ ist.

**5. 2. 1.** Mit Hilfe der Bemerkung in Nr. 5. 2. ergibt sich noch: Eine Gerade $G$ ist Tangente an den *Träger* $C(J)$ im Punkt $q$ genau dann, wenn es mindestens eine Stelle $\underline{p}(\tau)$ der Kurve $\underline{C}(J)$ mit $q = p(\tau)$ gibt, so daß $G$ Träger einer Tangente an die Kurve $\underline{C}(J)$ an der Stelle $\underline{p}(\tau)$ ist. — Ferner: Ist $H$ eine $(n-1)$-Ebene, die mit dem Träger $C(J)$ der Kurve $\underline{C}(J)$ einen unendlichen Durchschnitt besitzt, so enthält $H$ eine Tangente an die Kurve $\underline{C}(J)$.

**5. 3.** Unser Ziel ist die Darstellung des Trägers $C(J)$ einer Kurve $\underline{C}(J)$ als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme, deren einzelne Bogen tangierbar, lokal von b. T. S. und von e. T. B. sind, falls dies für die *Kurve* zutrifft. Der Schluß z. B. von der Tangierbarkeit der Kurve auf die des Trägers ist aber (vgl. Nr. 5. 1., Anmerkung) im allgemeinen nicht statthaft; für unsere Bogensumme kommen also nur Bogen besonderer Art in Betracht. Wir untersuchen zunächst solche Bogen für sich (Nr. 5. 3. 1.—5. 4.) in ihrer Beziehung zur Kurve und konstruieren dann (Nr. 5. 5.) die gewünschte Bogensumme.

**5. 3. 1.** Ein einfacher (abgeschlossener oder offener) Bogen $B$ (vgl. Nr. 3. 1. 1.) heißt freier Teilbogen *des* beschränkten *Kontinuums* $K$, wenn $\underset{\sim}{B} < K$ offen in $K$ ist, d. h. wenn $\overline{B}$ in $K$ enthalten ist und wenn jeder Punkt von $\underset{\sim}{B}$ eine zu $K - \underset{\sim}{B}$ fremde Umgebung (in $E_n$) besitzt (dabei wird (vgl. Nr. 3. 1. 1.) mit $\underset{\sim}{B}$ der größte, in $B$ enthaltene offene, einfache Bogen bezeichnet).

*Ist $B$ freier Teilbogen von $K$, so ist auch jeder Teilbogen $B'$ von $B$ freier Teilbogen von $K$.*

In der Tat: Es gilt $K - \underset{\sim}{B'} = (K - \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{B'})$. Ist $p \in \underset{\sim}{B'}$, so gibt es nach Vor. eine zu $K - \underset{\sim}{B}$ fremde Umgebung $U$ von $p$ (im $E_n$). Außerdem gibt es eine zu $\underset{\sim}{B} - B'$ fremde Umgebung $U'$ von $p$(im $E_n$); denn andernfalls wäre $B$ nicht einfacher Bogen. Somit ist $U \cap U'$ eine zu $K - \underset{\sim}{B'}$ fremde Umgebung von $p$.

**5. 3. 2.** Wir erklären weiter: Ein einfacher Bogen $B$ heißt *freier Teilbogen der Kurve* $\underline{C}(J)$, wenn $B$ freier Teilbogen des *Trägers* $C(J)$ ist. Und eine Teilkurve $\underline{C}(J')$ der Kurve $\underline{C}(J)$ heißt *freie Teilkurve* von $\underline{C}(J)$, wenn der Träger $C(J')$ von $\underline{C}(J')$ freier Teilbogen von $\underline{C}(J)$ ist. Es gilt:

*Jeder Teilbogen $B^0$ des Trägers $B^*$ einer freien Teilkurve $\underline{C}(J^*)$ von $\underline{C}(J)$ ist als Träger einer freien Teilkurve $\underline{C}(J^0)$ von $\underline{C}(J^*)$ und von $\underline{C}(J)$ darstellbar. Und zwar läßt sich $J^0$ so wählen, daß bei $p \mid J^0$ die Endpunkte von $J^0$ und die von $B^0$ einander eineindeutig entsprechen.*

Bew. Zunächst ist jeder Teilbogen eines freien Teilbogens von $\underline{C}(J)$ selbst freier Teilbogen von $\underline{C}(J)$ (Nr. 5. 3. 1.). Es seien $w'$, $w''$ die Endpunkte von $B^0$, ferner sei $W'$

bzw. $W''$ die Menge aller $\tau \in J^* = \overline{J^*}$ mit $w' = p(\tau)$ bzw. $w'' = p(\tau)$. Es ist $W' = \overline{W'}$ und $W'' = \overline{W''}$. Daher enthält $W'$ bzw. $W''$ ein kleinstes $\tau$, etwa $\tau'$ bzw. $\tau''$; es ist $\tau' \neq \tau''$. Ist etwa $\tau' < \tau''$, so existiert wegen der Abgeschlossenheit von $W'$ und $W''$ sowie wegen $W' \cap W'' = \emptyset$ ein größtes $\tau \in W'$, etwa $\bar{\tau}'$ mit $\tau' < \bar{\tau}' < \tau''$. Zwischen $\bar{\tau}'$ und $\tau''$ gibt es also kein $\tau \in W' \cup W''$, so daß für $p \mid J^0$ das $\bar{\tau}'$ bzw. das $\tau''$ eineindeutig dem $w'$ bzw. $w''$ entspricht.

**5. 3. 3.** In Nr. 5. 3. 2. handelte es sich um die Darstellbarkeit eines freien Teilbogens $B^0$ von $C(J)$ als Träger einer freien Teilkurve von $\underline{C}(J)$; dabei war aber $B^0$ *schon als Teilbogen des Trägers einer freien Teilkurve von* $\underline{C}(J)$ *vorausgesetzt.* Jetzt soll die entsprechende Darstellbarkeitsfrage für einen *beliebigen* freien Teilbogen von $C(J)$ behandelt werden. Die Beantwortung dieser Frage ist enthalten im nachstehenden

**Hilfssatz.** Vor. *Es sei $C(J)$ eine Kurve mit beschränktem Träger. Ferner sei $B$ ein freier Teilbogen von $\underline{C}(J)$.*

Beh. *Es ist $\overline{B}$ entweder Träger einer freien Teilkurve $\underline{C}(J^*)$ von $\underline{C}(J)$ oder Vereinigung der Träger zweier freier Teilkurven $\underline{C}(J_1)$, $\underline{C}(J_2)$ von $\underline{C}(J)$, deren Träger $C(J_1)$ und $C(J_2)$ einpunktigen Durchschnitt besitzen.*

Bew. (1) Es sei $q \in \underset{\sim}{B}$ beliebig. Dann gibt es ein $\tau = \tau(q) \in J$ mit $p(\tau) = q$ (wobei $\tau$ im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist) und eine Umgebung von $\tau$ auf $\underline{J}$, nämlich eine, $\tau$ enthaltende, in $\underline{J}$ offene Strecke $U$ mit $C(U) \subset \underset{\sim}{B}$, also mit $C(\overline{U}) \subset \overline{B}$. (Man beachte, daß $C(U)$ *nicht* notwendig Umgebung *von $q$ auf $\underset{\sim}{B}$* zu sein braucht; vielmehr kann $q$ ein „Endpunkt" der zusammenhängenden Menge $C(U) \subset \underset{\sim}{B}$, also des Teilbogens $C(U)$ von $\underset{\sim}{B}$ sein). Da, wegen $C(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i C(U_i)$, die Vereinigung beliebig vieler solcher $U$, wieder ein $U$ (mit $C(U) \subset \underset{\sim}{B}$) ist, so gibt es ein *größtes* unter diesen $U$, das wir mit $U(\tau)$ bezeichnen; es ist $U(\tau)$ eine in $J$ offene Strecke. Mindestens einer der Endpunkte von $C(\overline{U}(\tau))$ ist von $q$ verschieden, weil für keine Teilstrecke $J'$ von $J$ der Träger $C(J')$ einpunktig sein soll (vgl. Nr. 5. 1.).

(2) Es seien $z', z''$ die Endpunkte von $B$. Ferner seien $u', u''$ die Endpunkte des (vgl. Ziff. (1)) einfachen Teilbogens $C(\overline{U}(\tau))$ von $\overline{B}$ mit $\tau = \tau(q)$; dabei ist $u' \neq u''$. Es gilt nun:

*Mindestens eines der $u', u''$ fällt mit einem der $z', z''$ zusammen.*

In der Tat: Die Endpunkte von $J$ bzw. von $U(\tau)$ seien $\alpha, \beta$ bzw. $\alpha', \beta'$, wobei etwa $\alpha \leqq \alpha' < \beta' \leqq \beta$ ist. Vom Fall, daß $\alpha = \alpha'$ *und* $\beta = \beta'$ ist, also $J = \overline{U}(\tau)$, kann abgesehen werden; in diesem Fall ist nämlich $C(\overline{U}(\tau)) = C(J) \subset \overline{B} \subset C(J)$, also $C(\overline{U}(\tau)) = C(J) = \overline{B}$ und damit $u' = z'$, $u'' = z''$. Es sei demgemäß etwa $\alpha \leqq \alpha' < \beta' < \beta$. Angenommen, die $u', u''$ seien beide verschieden von den $z', z''$, es sei also $C(\overline{U}(\tau)) \subset \overline{C(\overline{U}(\tau))} \subset \underset{\sim}{B}$. Dann ist jedenfalls $p(\beta') \in \underset{\sim}{B}$. Daher gibt es (wegen der Stetigkeit von $p \mid J$ und wegen $\alpha' < \beta' < \beta$) eine Umgebung $V$ von $\beta'$ in $J$ mit $\overline{V} \subset \underline{J}$ derart, daß $C(V) \subset \underset{\sim}{B}$ gilt. Weil $\beta' \in \overline{U}(\tau)$, also $U(\tau) \cap V \neq \emptyset$ ist, ist $W = U(\tau) \cup V$ eine Strecke, in der $\tau$ enthalten ist; wegen $C(W) = C(U) \cup C(V) \subset \underset{\sim}{B}$ ist somit $W$ ebenfalls ein $U$ von der in Ziff. (1) erklärten Art. Aber $W$ ist *echte*, in $J$ offene Obermenge von $U(\tau)$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von $U(\tau)$.

(3) In Ziff. (1) war zu *beliebigem* $q \in \underset{\sim}{B}$ bzw. $\tau = \tau(q)$ ein größtes $U(\tau)$ bestimmt worden. Und für dieses $U(\tau)$ mußte nach Ziff. (2) mindestens einer der Endpunkte $u', u''$ von $C(U(\tau))$ mit einem der Endpunkte $z', z''$ von $\overline{B}$ zusammenfallen. Ist gleichzeitig $u' = z'$ und $u'' = z''$, so ist die Beh. unseres Hilfssatzes richtig. Es sei also für *jedes* $q \in \underset{\sim}{B}$

(und für jedes $\tau$ mit $q = p(\tau)$) entweder $u'' \neq z''$ (und $u' = z'$) oder $u' \neq z'$ (und $u'' = z''$). Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{f}'$ der zu allen $q \in \underset{\sim}{B}$ gehörigen $U(\tau)$ mit $u' = z'$. Dann existiert $u_0'' = \sup\,(u''; U(\tau) \in \mathfrak{f}')$, wobei sup gebildet wird bezüglich der linearen Anordnung der Punkte $u$ von $B$ auf $B$ und wobei in dieser Anordnung $z' = u' < z''$ angenommen ist. Es gibt also eine Folge von $u_k''$, $k = 1, 2, \ldots$, die auf $B$ monoton gegen ein $u_0''$ konvergieren. Ist $U_k'' = (\alpha_k, \beta_k)$ dasjenige $U(\tau)$, für welches $u_k''$ Endpunkt von $C(U_k'')$ ist, so kann man aus den $U_k''$ solche auswählen, für die — wir bezeichnen sie wieder mit $U_k''$ — neben $u_0'' = \lim u_k''$ auch $\alpha_0 = \lim \alpha_k$, $\beta_0 = \lim \beta_k$ existiert. Wegen der Stetigkeit von $p \mid J$ „konvergieren"[15]) die $C(\overline{U_k''})$ gegen $C(\overline{U_0''})$, wenn $\overline{U_0''} = [\alpha_0, \beta_0]$ gesetzt wird, und es ist $\underline{C}(\overline{U_0''})$ freie Teilkurve von $\underline{C}(J)$, deren Träger der freie Teilbogen $B''$ von $B$ mit den Endpunkten $u_0''$ und $z'$ ist. Entsprechend erhält man einen Teilbogen $B' = C(\overline{U_0'})$ von $B$ mit den Endpunkten $u_0'$ und $z''$. Und jedes $q \in \underset{\sim}{B}$, für das ein $U(\tau)$ mit $u' = z'$ bzw. mit $u'' = z''$ existiert, ist in $\overline{B''}$ bzw. in $\overline{B'}$ enthalten ($\overline{B'} \cup \overline{B''} < \overline{B}$). *Jedes* $q \in \underset{\sim}{B}$ ist also in $\overline{B'}$ oder in $\overline{B''}$ enthalten.

(4) Ist $\overline{B'} = \overline{B}$ oder $\overline{B''} = \overline{B}$, so ist $\overline{B}$ Träger einer freien Teilkurve. Andernfalls ist $\overline{B} = \overline{B'} \cup \overline{B''}$ mit $\overline{B'} \cap \overline{B''} \neq \emptyset$, weil jedes $q \in \underset{\sim}{B}$ in $\overline{B'} \cup \overline{B''} < \overline{B}$ enthalten ist. Dabei sind $\overline{B'}$ sowie $\overline{B''}$ Träger je von freien Teilkurven. Nach Nr. 5. 3. 2. ist aber $\overline{B_1} = \overline{B''} - \underset{\sim}{B'}$ (als Teilbogen der freien Teilkurve $\underline{C}(\overline{U_0''})$) Träger einer freien Teilkurve und $\overline{B_1} \cap \overline{B'}$ enthält als einzigen Punkt den von $z'$ und $z''$ verschiedenen Endpunkt von $B'$. Damit ist auch für diesen Fall die Beh. unseres Hilfssatzes bewiesen.

**5. 4.** Wir untersuchen nun, inwieweit man aus der Tangierbarkeit usw. einer Kurve auf die Tangierbarkeit usw. des Trägers einer freien Teilkurve schließen kann. Hierüber gilt der

**Hilfssatz.** Vor. *Es sei $B = C(J')$ Träger der freien Teilkurve $\underline{C}(J')$.*

Beh. *Ist die Kurve $\underline{C}(J)$ tangierbar bzw. von beschränkter Tangentenschwankung bzw. von eingeschränkter Beweglichkeit der Tangente, so gilt dies auch für den offenen Teilbogen $\underset{\sim}{B}$ des Trägers $B$ von $\underline{C}(J')$.*

Bew. Gemäß Nr. 5. 3. 2. wird *vorausgesetzt*, daß bei der Abbildung $p \mid J'$ die Endpunkte $\alpha'$, $\beta'$ von $J'$ und die Endpunkte $z'$, $z''$ von $B$ einander eineindeutig entsprechen.

(1) Es genügt der Beweis der folgenden

*Beh.* (1): Zu jedem $q \in \underset{\sim}{B}$ existiert mindestens ein Urbild $\tau = \tau(q) \in J'$ mit $q = p(\tau)$ von folgender Art: Zu jeder Umgebung $U$ von $\tau(q)$ auf $\underline{J'}$ gibt es eine Umgebung $W = W(U)$ von $q$ auf dem Träger $C(J)$ der *ganzen* Kurve $\underline{C}(J)$, so daß $W$ im Träger $C(U)$ von $\underline{C}(U)$, also in $\underset{\sim}{B}$ enthalten ist. (Das gleiche gilt dann für jede, in $W(U)$ enthaltene Umgebung von $q$ auf $C(J)$).

Denn aus der (in Ziff. (2) zu beweisenden) Beh. (1) folgt: (I) Für das gemäß Beh. (1) gewählte $\tau(q)$ ist jede Tangente $T(q)$ an $C(J)$ in $q \in \underset{\sim}{B}$ zugleich Tangente $T(\tau)$ in $\underline{p}(\tau)$ an ($\underline{C}(U)$, also an) $\underline{C}(J)$. Umgekehrt ist (vgl. Nr. 5. 2. 1.) jede Tangente $T(\tau)$ in $\underline{p}(\tau)$ an $\underline{C}(J)$ zugleich Tangente $T(q)$ in $q$ an $C(J)$. Daher ist die Menge der $T(q)$ identisch mit der Menge der $T(\tau)$ (für $\tau = \tau(q)$). — (II) Ist $\bar{\tau} \in J$ mit $q = p(\bar{\tau})$, wobei $q \in \underset{\sim}{B}$, und ist $\bar{\tau}$ im übrigen beliebig, so ist wieder jedes $T(\bar{\tau})$ ein $T(q)$. Also: Durch die Tangenten an den freien Teilbogen $B$ von $\underline{C}(J)$ in jedem $q \in \underset{\sim}{B}$ werden *genau* alle Tangenten an $\underline{C}(J)$ in allen Stellen $\underline{p}(\bar{\tau})$ mit dem Träger $q = p(\bar{\tau})$ geliefert. — (III) Ist nun $\underline{C}(J)$ speziell an der Stelle

[15]) Es handelt sich um topologische Konvergenz, die hier gleichwertig ist mit der metrischen (vgl. z. B. [6], I. Bd., S. 127, Nr. 5. 2. 4., und S. 206, Nr. 6. 3. 4. 4.).

$\underline{p}(\tau)$ mit $q = p(\tau) \in \underset{\sim}{B}$ tangierbar, so auch an jeder anderen Stelle $\underline{p}(\bar{\tau})$ mit $q = p(\bar{\tau})$ und es ist auch $\underset{\sim}{B}$ in $q$ tangierbar. Ist ferner $\underline{C}(J)$ von b. T. S., so ist $\underset{\sim}{B}$ ebenfalls von b. T. S. Ist schließlich $\underline{C}(J)$ von e. T. B., so gilt das gleiche für $\underset{\sim}{B}$; nämlich: Irgend $n$ zu $q$ auf $\underset{\sim}{B}$ hinreichend benachbarte Punkte $q_\nu$ liegen in $W(U)$, besitzen also Urbilder $\tau_\nu \in U$, wobei $q \in \underset{\sim}{B}$ beliebig, $\tau = \tau(q)$ und $U$ beliebig kleine Umgebung von $\tau$ sein kann; jede $(n-1)$-Schmiegebene in $q$ an $\underset{\sim}{B}$ ist also auch $(n-1)$-Schmiegebene an $\underline{C}(J)$ in $\underline{p}(\tau)$. Und das gilt auch für die übrigen Stellen $\bar{\tau}$ mit $q = p(\bar{\tau})$.

(2) Der *Beweis von Beh.* (1) läßt sich nun so führen:

(2 1) Es sei $J' = [\alpha', \beta']$. Weiter sei $q = f(\sigma)$ eine topologische Abbildung des einfachen Bogens $B$ auf die Strecke $S = (0 \leqq \sigma \leqq 1) = [0, 1]$, wobei $z' = f(0)$, $z'' = f(1)$ ist. Mit der Umkehrabbildung $\sigma = f^{-1}(q)$ ist dann auch $\sigma = f^{-1}(p(\tau)) = g(\tau)$ eine eindeutige, stetige Abbildung von $J'$ auf $S$, wobei $0 = g(\alpha')$, $1 = g(\beta')$ ist.

(2 2) Die Beh. (1) folgt aber aus der

*Beh.* (2). Zu beliebigem $q \in \underset{\sim}{B}$, d. h. zu beliebigem $\sigma \in (0, 1)$, existiert ein $\tau = g^{-1}(\sigma)$, also $\tau \in (\alpha', \beta') = J'$, von folgender Art: Zu $\tau$ gibt es $\tau_h, \tau_\nu \in (\alpha', \beta')$ die zu $\tau$ beliebig benachbart sind und für die $\tau_h < \tau < \tau_\nu$ sowie $g(\tau_h) < \sigma < g(\tau_\nu)$ gilt.

Diese Beh. (2) folgt ihrerseits aus der

*Beh.* (3). Es existiert eine Nullstelle $\tau$ von $h(\xi) = g(\xi) - \sigma$, $\xi \in (\alpha', \beta')$, in welcher $h(\xi)$ das „Vorzeichen wechselt".

Um zunächst ein solches $\tau$ zu finden, betrachte man die Menge $N^-$ aller Nullstellen von $h(\xi)$, in deren voller Umgebung $h(\xi) \leqq 0$ ist und unterhalb deren keine Nullstelle von $h(\xi)$ liegt, die nicht zu $N^-$ gehört. Dabei kann $N^-$ leer sein, während die Menge $N$ aller Nullstellen von $h(\xi)$ nicht leer ist (wegen $h(\alpha') = -\sigma < 0$, $h(\beta') = 1 - \sigma > 0$). Ist $N^-$ leer, so ist die (wegen der Abgeschlossenheit von $N$ vorhandene) kleinste Nullstelle von $h(\xi)$ eine solche mit Vorzeichenwechsel; andernfalls ist es die kleinste, nicht zu $N^-$ gehörige Nullstelle $\tau$ mit $\tau \geqq \xi' = \sup(\xi; \xi \in N^-)$; denn $N - N^-$ ist nicht leer. (Ist nämlich $\xi'$ Nullstelle aus $N - N^-$, so ist $\tau = \xi'$, andernfalls ist die kleinste Nullstelle oberhalb $\xi'$ (sie existiert) das gewünschte $\tau$).

Ist aber Beh. (2) richtig, so liefern die Strecken $(\tau_h, \tau_\nu)$ beliebig kleine Umgebungen $U$ von $\tau$ (auf $\underline{J}'$) und wegen der Stetigkeit von $g$ beliebig kleine Umgebungen $W = W(U)$ von $q$ auf $\underset{\sim}{B}$. Damit ist also Beh. (1) und folglich der Hilfssatz bewiesen.

**5. 5.** Mit Hilfe der in Nr. 5. 3. und 5. 4. gemachten Feststellungen ergibt sich nun der gewünschte Darstellungssatz für die Träger gewisser spezieller Kurven.

**5. 5. 1.** Zunächst wird gezeigt:

**Satz.** Vor. *Die Kurve $\underline{C}(J)$ sei beschränkt (im $E_n$) und von beschränkter Tangentenschwankung.*

Beh. *Der Träger $C(J)$ ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme im engeren Sinne, deren einzelne Bogen freie Teilbogen der Kurve $\underline{C}(J)$ sind.*

Bew. (1) Es gibt ein $(n-1)$-(Parallel-)Büschel $\mathfrak{b}$, relativ zu dem $C(J)$ endlichen Ordnungswert besitzt. In der Tat: Da $\underline{C}(J)$ von b. T. S. ist, gibt es ein Büschel $\mathfrak{b}$ derart, daß kein $H \in \mathfrak{b}$ Tangenten an $\underline{C}(J)$ enthält. Ist aber der Durchschnitt eines $H \in \mathfrak{b}$ mit dem Träger $C(J)$ unendlich, so enthält $H$ eine Tangente an $\underline{C}(J)$ (gemäß Nr. 5. 2. 1.). Übrigens ist die Achse des Parallelbüschels $\mathfrak{b}$ fremd zum beschränkten Kontinuum $C(J) = K$.

(2) Gemäß [3], S. 28, Nr. 1. 12, ist $K = C(J)$ darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen $K \cap S_k$, $k = 1, 2, \ldots$; dabei sind die $S_k$ ab-

geschlossene Parallelstreifen, die bis auf die berandenden, *zu* $\mathfrak{b}$ *gehörigen* $(n-1)$-Ebenen paarweise fremd sind und wobei (vgl. [3], Nr. 1. 11, S. 28) jedes $K \cap S_k$ Vereinigung von endlich vielen, abgeschlossenen, *paarweise fremden*, relativ zu $\mathfrak{b}$ einfachen Bogen $B_{kr}$ ist. Jedes solche $B_{kr}$ ist daher *freier Teilbogen von* $K$. Und $K$ ist auch abgeschlossene Hülle von $\mathsf{U}_{kr} B_{kr}$ (vgl. Nr. 3. 1. 5.).

**5. 5. 2.** Nun ergibt sich der

**Satz.** Vor. *Die Kurve* $\underline{C}(J)$ *im* $E_n$ *sei lokal von beschränkter Tangentenschwankung, ferner tangierbar und von eingeschränkter Beweglichkeit der Tangente. Schließlich enthalte der Träger* $C(J)$ *keine hyperebenen Teilbogen.*

Beh. *Der Träger* $C(J)$ *der Kurve* $\underline{C}(J)$ *ist darstellbar als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme im engeren Sinne* $\mathsf{U}_k B_k$, *wobei die* $B_k$ *gewöhnlich differenzierbare Teilbogen von* $C(J)$ *und je ordnungshomogen von endlichem (oder beschränktem) Ordnungswert bezüglich des Systems aller* $(n-1)$*-Ebenen sind.*

**Zusatz.** Im Falle $n = 2$ (projektive Ebene) sind die $B_k$ sämtlich (stetig differenzierbare) *Konvex*bogen. Die dualisierbaren ebenen Kurven sind ein Spezialfall der von uns betrachteten, insofern *stetige* Tangierbarkeit und eine etwas verschärfte eingeschränkte Beweglichkeit der Tangente vorausgesetzt wird; die lokale Beschränktheit der Tangentenschwankung folgt aus der stetigen Tangierbarkeit (vgl. [10], § 5, S. 518ff.).

Bew. (1) Es ist $\underline{C}(J)$ lokal von b. T. S. Aus der Definition der lokal b. T. S. folgt aber: Es ist $C(J)$ Vereinigung endlich vieler beschränkter Kontinua $K_i$, deren jedes Träger einer Teilkurve $\underline{C}(J_i)$ von b. T. S. ist. Gemäß des Satzes in Nr. 5. 5. 1. ist daher $C(J)$ Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Hüllen von Bogensummen $\mathsf{U}_k B_{ik}$ i. e. S., wobei jedes $B_{ik}$ freier Teilbogen von $\underline{C}(J_i)$ ist.

(2) Gemäß Nr. 5. 3. 3., Hilfssatz, kann dabei jedes $B_{ik}$ als Träger einer freien Teilkurve von $\underline{C}(J_i)$ angenommen werden. Nun ist aber jedes $\underline{C}(J_i)$ tangierbar, von b. T. S. und von e. T. B. (weil dies für $C(J)$ vorausgesetzt ist). Gemäß Nr. 5. 4., Hilfssatz, ist dann jedes $\underset{\sim}{B}_{ik}$ tangierbar, von b. T. S. und von e. T. B. Auch enthält $\underset{\sim}{B}_{ik}$ keine hyperebenen Teilbogen. Gemäß Nr. 5, 5. 1. ist $B_{ik} = \overline{B_{ik}} = \overline{\mathsf{U}_r B_{ikr}}$, wobei $B_{ikr} < \underset{\sim}{B}_{ik}$ für jedes $r$. Gemäß Nr. 4. 3., Satz und Zusatz, sowie Nr. 4. 3. 1., Satz, folgt die Beh. des obigen Satzes und Zusatzes (Nr. 5. 5. 2.), wenn man noch $\mathsf{U}_i(\mathsf{U}_k(\overline{\mathsf{U}_r B_{ikr}}))$ gemäß Nr. 3. 1. 4., 3. 1. 5. und 3. 1. 3. als abgeschlossene Hülle einer Bogensumme i. e. S. darstellt.

## Literatur.


[1] *H. Hahn*, Reelle Funktionen, 1. Teil: Punktfunktionen (Leipzig 1932).

[2] *Haupt*, Über die Struktur reeller Kurven, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **164** (1931), 50—60.

[3] *Haupt*, Über Kontinua von endlicher Relativordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **167** (1932), 20—39.

[4] *Haupt*, Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde, Monatsh. f. Math. u. Phys. **46** (1937), 84—92.

[5] *Haupt*, Bestimmung der zyklisch-ordnungshomogenen ebenen Bogen, 1. Mitt., Journ. f. d. r. u. angew. Math. **178** (1938), 14—28.

[6] *Haupt-Aumann-Pauc*, Differential- u. Integralrechnung, 2. Aufl., I. Bd. (Berlin 1948), II. Bd. (Berlin 1950).

[7] *F. Hausdorff*, Mengenlehre, 3. Aufl. (Berlin-Leipzig, 1935).

[8] *A. Marchaud*, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. **55** (1930), 67—115.

[9] *Chr. Y. Pauc*, en collaboration avec *A. Vazsonyi*, Sur les sommes d'arcs, Rev. Scientifique 1940, Nr. 2, 101—103.

[10] *A. Rosenthal*, Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven, Math. Ann. **73** (1913), 480—521.

[11] *A. Rosenthal*, Über Kontinua von endlicher Ordnung, Journ. f. d. r. u. angew. Math. **167** (1932), 270—273.


Eingegangen 13. Juni 1959.

# Sur une propriété des groupes libres.

**A M. Wolfgang Krull, à l'occasion de son 60e anniversaire.**

Par *J. Dieudonné* à Paris.

---

**1. Introduction.** Il est tout à fait intuitif, et de démonstration immédiate, que si $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue dans un espace $\mathfrak{R}^n$, $B$ une boule de centre 0 et de rayon $r$, $B_a$ sa translatée $a + B$, alors $\frac{\lambda(B_a \cap B)}{\lambda(B)}$ tend vers 1 lorsque $r$ tend vers $+\infty$, *uniformément* lorsque $a$ reste dans une partie bornée fixe de $\mathfrak{R}^n$. Si $\varphi_B$ est la fonction caractéristique de $B$ et $f = \frac{\varphi_B}{\lambda(B)}$, de sorte que $N_1(f) = 1$, la propriété précédente s'exprime encore en disant que, pour toute partie compacte $K$ de $\mathfrak{R}^n$ et tout $\varepsilon > 0$, $r$ peut être pris assez grand pour que l'on ait $N_1(\varepsilon_a * f - f) \leqq \varepsilon$ pour *tout* $a \in K$. De l'existence d'une telle fonction $f \in L^1(\mathfrak{R}^n)$ (non nécessairement multiple d'une fonction caractéristique) pour $K$ et $\varepsilon$ arbitrairement donnés, propriété que nous avons désignée par $(P_1)$ dans [1], résulte aisément la propriété suivante: $(E)$ Si $\mu$ est une mesure bornée positive sur $\mathfrak{R}^n$, alors pour tout $p$ tel que $1 < p < +\infty$, la norme de l'endomorphisme $g \to \mu * g$ de $L^p(\mathfrak{R}^n)$ est exactement égale à la *masse totale* $\| \mu \|$ de la mesure $\mu$. H. Reiter a démontré ([2], p. 405—406) que la propriété $(P_1)$ est valable pour *tout groupe abélien localement compact*, et en partant de ce résultat, j'ai pu l'étendre à diverses catégories de groupes localement compacts non abéliens et non compacts, par exemple les groupes de Lie nilpotents connexes [1]. Mais contrairement à ce qu'on serait naturellement porté à croire, la propriété $(P_1)$ n'est pas valable pour *tous* les groupes localement compacts. Nous nous proposons dans cette note de montrer en particulier que la propriété $(E)$ pour $p = 2$ (et *a fortiori* la propriété $(P_1)$) n'est pas exacte dans les *groupes libres discrets* non abéliens. Il suffira évidemment de fournir un contre-exemple pour un groupe libre à 2 générateurs.

**2.** Soit donc $G$ un groupe libre discret engendré par deux éléments $a, b$. Nous considérerons la mesure positive $\mu$ ayant pour support l'ensemble formé des trois points $e$ (élément neutre), $a^{-1}$ et $b^{-1}$, et pour masse $+1$ en chacun de ces trois points. Il s'agit d'évaluer la borne supérieure de $\frac{N_2(\mu * f)}{N_2(f)}$ lorsque $f$ parcourt l'ensemble des fonctions de $L^2(G)$ distinctes de 0, et de montrer que cette borne est *strictement inférieure* à $\| \mu \| = 3$. Il est clair que cette borne supérieure est aussi la borne supérieure de la même expression lorsqu'on suppose que $f$ est à support compact, c'est-à-dire nulle hors d'une partie *finie* de $G$.

**3.** Nous allons définir une partition de $G$ en parties finies $R_n$, que nous définirons par récurrence ($n \geqq 0$). Nous dirons que, pour un $x \in G$, les six points distincts

$$(1) \qquad ax,\ bx,\ a^{-1}x,\ b^{-1}x,\ ab^{-1}x,\ ba^{-1}x$$

sont *adjacents* à $x$. Cela étant, nous prendrons $R_0 = \{e\}$, et nous désignerons par $R_n$, pour $n > 0$, l'ensemble des éléments adjacents à un élément de $R_{n-1}$ et n'appartenant à aucun $R_k$ pour $k < n$.

Rappelons qu'un élément de $G$, par définition, a une et une seule forme *normale*, produit de puissances négatives ou positives de $a$ et de $b$, où ces deux types de facteurs alternent.

**Lemme.** *Pour tout $x \in R_n$ (où $n \geqq 1$), sur les six éléments distincts adjacents $x$, un appartient à $R_{n-1}$, un autre à $R_n$ et les quatre autres à $R_{n+1}$; ces derniers sont ceux pour lesquels la forme normale s'obtient en juxtaposant à la forme normale de $x$ celle du facteur par lequel $x$ est multiplié. En outre, tout élément de $R_{n+1}$ est adjacent à un seul élément de $R_n$.*

Le lemme se vérifie directement pour $n = 1$; démontrons-le par récurrence sur $n$. Supposons par exemple que $x = ay$, où $y \in R_{n-1}$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, la forme normale de $y$ ne peut commencer par une puissance de $a$ d'exposant négatif. On a alors $a^{-1}x = y \in R_{n-1}$, et $ba^{-1}x = by$ appartient nécessairement à $R_n$; en effet, comme $x = ab^{-1}(by)$, $by$ ne peut appartenir à $R_{n-2}$, sans quoi $x$ appartiendrait à $R_{n-3} \cup R_{n-2} \cup R_{n-1}$; $by$ ne peut non plus appartenir à $R_{n-1}$, puisque $x$ n'est adjacent qu'à un seul élément de $R_{n-1}$. Montrons ensuite que les quatre éléments $ax$, $bx$, $b^{-1}x$ et $ab^{-1}x$, n'appartiennent à aucun $R_k$ pour $k \leqq n$; prouvons-le par exemple pour $ax$. Tout d'abord, $ax$ ne peut appartenir à $R_k$ pour $k \leqq n - 2$, car alors $x = a^{-1}(ax)$ ne pourrait appartenir à $R_n$. Si on avait $z = ax \in R_{n-1}$, on aurait $x = a^{-1}z$, contrairement au fait que $x$ ne peut être adjacent qu'à un seul élément de $R_{n-1}$. Enfin, $ax = a^2y$ ne peut appartenir à $R_n$, car sa forme normale commence par $a^h$ avec $h \geqq 2$, donc $ax$ devrait être de la forme $az$ avec $z \in R_{n-1}$, autrement dit on aurait $x \in R_{n-1}$ contrairement à l'hypothèse. Comme la forme normale de $x$ commence par $a^h$ avec $h \geqq 1$, on voit que les quatre éléments précédents de $R_{n+1}$ ont la forme normale indiquée dans l'énoncé; il en résulte immédiatement qu'ils ne peuvent être adjacents à aucun élément de $R_n$ autre que $x$. Nous désignerons par $S_n$ la réunion des $R_k$ d'indice $k \leqq n$.

**4.** Nous allons chercher la borne supérieure de

$$(N_2(\mu * f))^2 = \sum_{x \in G} (f(x) + f(ax) + f(bx))^2$$

lorsque $f$ parcourt l'ensemble des fonctions réelles à support dans $S_n$ telles que

$$\sum_{x \in G} (f(x))^2 = 1.$$

Il s'agit là d'une fonction continue $F$ sur un compact identifiable à une sphère; elle atteint donc son maximum dans cet ensemble, en un point $f$ que l'on peut obtenir par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On considère donc la fonction

$$H(f) = \sum_{x \in G} (f(x) + f(ax) + f(bx))^2 - \zeta \sum_{x \in G} (f(x))^2,$$

où $\zeta$ est un paramètre réel, $f$ n'étant plus soumis qu'à la condition d'avoir son support dans $S_n$, et on écrit que les dérivées par rapport aux variables $f(x)$ ($x \in S_n$) de $H(f)$ sont toutes nulles, ce qui donne les conditions

$$(2) \quad (\zeta - 3) f(x) = f(ax) + f(bx) + f(a^{-1}x) + f(b^{-1}x) + f(ab^{-1}x) + f(ba^{-1}x)$$

pour tout $x \in S_n$, autrement dit $(\zeta - 3) f(x)$ doit être la somme des valeurs de $f$ aux 6 points adjacents à $x$. Si on multiplie les deux menbres de (2) par $f(x)$ et qu'on somme les équations obtenues lorsque $x$ varie dans $S_n$, on voit que si $f$ réalise l'extremum cherché de $F(f)$, on a nécessairement

$$\begin{aligned}\zeta - 3 &= 2 \sum_{x \in G} \big(f(x) f(ax) + f(ax) f(bx) + f(bx) f(x)\big) \\ &= F(f) - 3,\end{aligned}$$

autrement dit, $F(f) = \zeta$. Nous nous proposons de prouver que les conditions (2) *entraînent nécessairement* $\zeta \leqq 8$, ce qui achèvera notre démonstration, puisque $\| \mu \|^2 = 9$.

**5.** Nous allons d'abord considérer le cas où toutes les valeurs de $f(x)$ pour les $x \in R_k$, $0 \leqq k \leqq n$, sont égales à un même nombre réel $\alpha_{n-k}$. Tenant compte du lemme du n° 3, les conditions (2) donnent les relations suivantes, en les appliquant successivement à un élément $x$ de $R_n, R_{n-1}, \ldots, R_0$:

$$(\zeta - 3)\, \alpha_0 = \alpha_0 + \alpha_1 \tag{3}$$

$$(\zeta - 3)\, \alpha_k = 4\alpha_{-k1} + \alpha_k + \alpha_{k+1} \qquad (1 \leqq k \leqq n-1) \tag{4}$$

$$(\zeta - 3)\, \alpha_n = 6\alpha_{n-1}. \tag{5}$$

La résolution de l'équation récurrente (4) se fait suivant la méthode classique: si $u', u''$ sont les deux racines (réelles ou imaginaires) de l'équation

$$u^2 - (\zeta - 4)\, u + 4 = 0 \tag{6}$$

on trouve, en tenant compte de la condition initiale (3), qui donne $\alpha_1 = (\zeta - 4)\, \alpha_0$, que l'on a

$$\alpha_k = \alpha_0 \frac{u'^{k+1} - u''^{k+1}}{u' - u''} \qquad (0 \leqq k \leqq n) \tag{7}$$

et la dernière équation (5) donne alors, pour déterminer $\zeta$, la condition

$$\zeta - 3 = 6 \frac{u'^n - u''^n}{u'^{n+1} - u''^{n+1}}. \tag{8}$$

On peut toujours se borner au cas où $\zeta > 0$, en raison de la relation $F(f) = \zeta$ vérifiée pour tout extremum de $F$. Supposons que l'on ait $\zeta > 8$; alors les deux racines $u', u''$ de (6) seraient *réelles* et positives; si on pose $u' = 2v'$, $u'' = 2v''$, on aurait par exemple $0 < v' < 1 < v''$ avec $v'v'' = 1$, et (8) donne

$$\zeta = 3 + 3v' \frac{1 - v'^{2n}}{1 - v'^{2n+2}}. \tag{9}$$

Or, la relation $0 < v' < 1$ entraîne $1 - v'^{2n} < 1 - v'^{2n+2}$, et (9) impliquerait par suite $\zeta < 6$, ce qui est absurde.

**6.** Il reste à examiner les cas où l'extremum de $F(f)$ serait atteint pour un $f$ tel que les $f(x)$ correspondant aux $x \in R_k$ ne seraient pas tous égaux; nous allons voir que cela ne pourrait se produire que pour des valeurs de $\zeta$ qui sont toutes $\leqq 8$.

Considérons d'abord un élément $x \in R_n$; soit $x'$ l'unique élément de $R_n$ adjacent à $x$, $y$ l'unique élément de $R_{n-1}$ adjacent à $x$, qui est aussi l'unique élément de $R_{n-1}$ adjacent à $x'$ (lemme du n° 3); les conditions (2) appliquées à $x$ et $x'$, donnent

$$(\zeta - 3)\, f(x) = f(x') + f(y)$$
$$(\zeta - 3)\, f(x') = f(x) + f(y)$$

d'où $(\zeta - 4)\,(f(x) - f(x')) = 0$, et par suite, on ne peut avoir $f(x) \neq f(x')$ que si $\zeta = 4$. Si $\zeta \neq 4$, on a donc $f(x) = f(x') = \dfrac{f(y)}{\zeta - 4}$; on en conclut que $f$ prend alors la même valeur aux quatre éléments de $R_n$ qui sont adjacents à $y$.

Avec les notations du n° 5, on peut écrire $\dfrac{u'^{k+1} - u''^{k+1}}{u' - u''} = P_k(\zeta)$, où $P_k$ est un polynôme de degré $k$ en $\zeta$, avec $P_0(\zeta) = 1$, $P_1(\zeta) = \zeta - 4$. Les racines réelles des polynômes $P_k$ sont toutes comprises entre 0 et 8, car pour une telle racine $\zeta$, on a nécessairement $u' = \omega u''$, où $\omega$ est une racine $(k+1)$-ème de l'unité différente de 1; si $\omega = -1$, il vient $\zeta = 4$, et si $\omega \neq -1$, $u'$ et $u''$ sont nécessairement imaginaires, donc $0 < \zeta < 8$.

Cela étant, nous allons montrer que si $\zeta$ *n'est pas une racine* d'un des polynômes $P_k$, et si $y$ est un élément de $R_k$, $x$ un élément de $R_{k+1}$ adjacent à $y$, on a nécessairement

$$f(y) = \frac{P_{n-k}(\zeta)}{P_{n-k-1}(\zeta)}\, f(x). \tag{10}$$

Si on applique ce résultat successivement à $k = 0, 1, \ldots, n$, on en déduira que tous les $f(x)$ pour $x \in R_k$ sont égaux, ce qui achèvera la démonstration.

Pour démontrer (10), il suffit de raisonner par récurrence sur $n - k$, la relation ayant été établie plus haut pour $n - k = 1$. Soit $x'$ l'unique élément de $R_{k+1}$ adjacent à $x$, qui est aussi adjacent à $y$. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, les conditions (2) appliquées à $x$ et $x'$ donnent

$$(\zeta - 3)\, f(x) = f(x') + f(y) + 4\,\frac{P_{n-k-2}(\zeta)}{P_{n-k-1}(\zeta)}\, f(x)$$
$$(\zeta - 3)\, f(x') = f(x) + f(y) + 4\,\frac{P_{n-k-2}(\zeta)}{P_{n-k-1}(\zeta)}\, f(x')$$

d'où en retranchant et tenant compte de la relation de récurrence

$$P_{n-k}(\zeta) = (\zeta - 4)\, P_{n-k-1}(\zeta) - 4 P_{n-k-2}(\zeta),$$

il vient

$$\frac{P_{n-k}(\zeta)}{P_{n-k-1}(\zeta)}\,(f(x) - f(x')) = 0;$$

d'où $f(x) = f(x')$ en vertu de l'hypothèse, et $f(y) = \dfrac{P_{n-k}(\zeta)}{P_{n-k-1}(\zeta)}\, f(x)$.

**7.** On pourrait voir sans peine que la borne supérieure cherchée de $\dfrac{N_2(\mu * f)}{N_2(f)}$ est bien exactement égale à $\sqrt{8}$. En effet, pour $0 \leqq \zeta \leqq 8$, on peut écrire $u' = 2e^{i\vartheta}$, $u'' = 2e^{-i\vartheta}$, $\zeta = 4(1 + \cos\vartheta)$ et l'équation (8) s'écrit donc

$$1 + 4\cos\vartheta = 3\,\frac{\sin n\vartheta}{\sin(n+1)\,\vartheta}$$

qui, après quelques transformations, s'écrit aussi

$$\operatorname{tg}(n+1)\,\vartheta = -3\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

ou, en posant $(n+1)\,\vartheta = \pi - \varphi$,

$$\operatorname{tg}\varphi = 3\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\varphi}{2(n+1)}\right)$$

équation analytique en $\varphi$ qui, ainsi qu'on le vérifie aisément, admet, pour $n$ tendant vers $+\infty$, une solution tendent vers 0 et développable en série de puissances

$$\varphi = \frac{3\pi}{2(n+1)} + \frac{\gamma_2}{(n+1)^2} + \cdots$$

ce qui donne pour $\zeta$ une valeur tendent vers 8 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## Bibliographie.

[1] *J. Dieudonné*, Sur le produit de composition (II), Journ. de Math., à paraître.
[2] *H. Reiter*, Investigations in harmonic analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 401—427.

---

Eingegangen 23. Juni 1959.

# Nullstellenschranken für Polynome.

## Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.

Von *Wilhelm Specht* in Erlangen.

---

Unterliegen die Koeffizienten eines komplexen Polynoms

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

vom Grade $n$ der Beschränkung

$$|a_\nu| \leqq \beta\alpha^\nu \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n$$

mit positiven Konstanten $\alpha$, $\beta$, so gehören bekanntlich[1]) sämtliche Nullstellen des Polynoms $f(z)$ dem Kreisbereich

$$(1) \qquad |z| \leqq \alpha R_n(\beta) < \alpha(1+\beta)$$

der komplexen Zahlenebene an, wenn noch $R_n = R_n(\beta)$ die (einzige) positive Wurzel der Gleichung

$$R_n^n = \beta(R_n^{n-1} + R_n^{n-2} + \cdots + R_n + 1)$$

bezeichnet. Diese Nullstellenschranke ist insofern genau, als das Polynom

$$f_0(z) = z^n - \beta(\alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1} z + \alpha^n)$$

mit den Koeffizienten

$$a_\nu^{(0)} = -\beta\alpha^\nu \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n$$

die Nullstelle

$$\zeta_0 = \alpha R_n(\beta)$$

besitzt. Merkwürdigerweise scheint bisher, soweit mir die Literatur zu diesem Gegenstand bekannt ist, nachstehende Verschärfung dieser Aussage unbeachtet geblieben zu sein:

**Satz 1.** *Bildet man aus den Koeffizienten eines komplexen Polynoms*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

*vom Grade $n$ mittels einer beliebig gewählten positiven Konstanten $\beta$ die Größe*

$$\alpha = \alpha(f) = \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \left| \sqrt[\nu]{\frac{a_\nu}{\beta}} \right|,$$

*so gehören sämtliche Nullstellen des Polynoms $f(z)$ dem Kreisbereich*

$$(2) \qquad \left| z + \frac{a_1}{n} \right| \leqq \alpha\left(R_n(\beta) - \frac{\beta}{n}\right) < \alpha\left(1 + \frac{n-1}{n}\beta\right)$$

---

[1]) Man vgl. *W. Specht*, Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, Enzyklopädie math. Wiss. I 1., 2. Aufl., Heft 3, II, insbesondere Abschnitt 9.

*der komplexen Zahlenebene an, wenn $R_n = R_n(\beta)$ die (einzige) positive Wurzel der Gleichung*

$$R_n^n = \beta(R_n^{n-1} + R_n^{n-2} + \cdots + R_n + 1)$$

*bezeichnet.*

*Bemerkung.* Die Schranke (2) dieses Satzes ist in der Tat eine Verbesserung der Schranke (1), weil aus der Ungleichung

$$\left|\zeta + \frac{a_1}{n}\right| \leqq \alpha\left(R_n(\beta) - \frac{\beta}{n}\right)$$

wegen $|a_1| \leqq \alpha\beta$ die Folgerung

$$|\zeta| \leqq \left|\zeta + \frac{a_1}{n}\right| + \left|\frac{a_1}{n}\right| \leqq \alpha\left(R_n(\beta) - \frac{\beta}{n}\right) + \left|\frac{a_1}{n}\right| \leqq \alpha R_n(\beta)$$

gezogen werden kann; sie ist genau, weil die Nullstelle $\zeta_0 = \alpha R_n(\beta)$ des Polynoms

$$f_0(z) = z^n - \beta(\alpha z^{n-1} + \alpha^2 z^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-1} z + \alpha^n)$$

mit den Koeffizienten $a_\nu^{(0)} = -\beta\alpha^\nu$ der Gleichung

$$\zeta_0 + \frac{a_1}{n} = \zeta_0 - \frac{\alpha\beta}{n} = \alpha\left(R_n(\beta) - \frac{\beta}{n}\right)$$

genügt.

*Beweis.* Durch die Substitution

$$z = \alpha w - \frac{a_1}{n}$$

geht das Polynom

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

dessen Koeffizienten nach Voraussetzung der Beschränkung

$$|a_\nu| \leqq \beta\alpha^\nu \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n \tag{3}$$

genügen, bekanntlich in ein reduziertes Polynom

$$g(w) = \frac{1}{\alpha^n} f\left(\alpha w - \frac{a_1}{n}\right) = w^n + b_2 w^{n-2} + \cdots + b_{n-1} w + b_n \tag{4}$$

über, dessen Koeffizienten leicht bestimmt werden können:

$$b_\varrho = \sum_{0 \leqq \nu \leqq \varrho} \frac{a_\nu}{\alpha^\varrho} \binom{n-\nu}{\varrho-\nu} \left(-\frac{a_1}{n}\right)^{\varrho-\nu} \qquad \text{für } 2 \leqq \varrho \leqq n, \tag{5}$$

wobei $a_0 = 1$ zu setzen ist. Da die Nullstellen $\zeta_\nu$ des Polynoms $f(z)$ mit den Nullstellen $\omega_\nu$ des Polynoms $g(w)$ in der Beziehung

$$\zeta_\nu = \alpha\omega_\nu - \frac{a_1}{n} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n$$

stehen, führt jede Nullstellenschranke

$$|\omega| \leqq S(g)$$

des Polynoms $g(z)$ auf eine Beschränkung

$$\left|\zeta + \frac{a_1}{n}\right| \leqq \alpha S(g)$$

der Nullstellen des Polynoms $f(z)$.

Nach einer einfachen Umformung der Darstellung (5)

$$b_\varrho = \frac{a_0}{\alpha^\varrho}\binom{n}{\varrho}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^\varrho + \frac{a_1}{\alpha^\varrho}\binom{n-1}{\varrho-1}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^{\varrho-1} + \sum_{2\leq\nu\leq\varrho}\frac{a_\nu}{\alpha^\varrho}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^{\varrho-\nu}$$

$$= \left[\binom{n}{\varrho} - n\binom{n-1}{\varrho-1}\right]\frac{1}{\alpha^\varrho}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^\varrho + \sum_{2\leq\nu\leq\varrho}\frac{a_\nu}{\alpha^\varrho}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(-\frac{a_1}{n}\right)^{\varrho-\nu}$$

erhalten wir wegen

$$\binom{n}{\varrho} - n\binom{n-1}{\varrho-1} = \binom{n}{\varrho}(1-\varrho) < 0 \qquad \text{für } 2 \leqq \varrho \leqq n$$

aus den Beschränkungen (3) die Abschätzung

$$|b_\varrho| \leqq -\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \binom{n-1}{\varrho-1}\beta\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-1} + \sum_{2\leq\nu\leq\varrho}\beta\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu},$$

also

$$(6) \qquad |b_\varrho| \leqq -(1+\beta)\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \beta\sum_{0\leq\nu\leq\varrho}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}.$$

Für jede Nullstelle $\omega$ des Polynoms $g(w)$ besteht nun nach (4) und (6) die Ungleichung

$$|\omega|^n \leqq \sum_{2\leq\varrho\leq n}|b_\varrho|\,|\omega|^{n-\varrho}$$

$$\leqq \sum_{2\leq\varrho\leq n}\left[-(1+\beta)\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \beta\sum_{0\leq\nu\leq\varrho}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}\right]|\omega|^{n-\varrho}$$

$$= |\omega|^n + \sum_{0\leq\varrho\leq n}\left[-(1+\beta)\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \beta\sum_{0\leq\nu\leq\varrho}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}\right]|\omega|^{n-\varrho}$$

oder

$$(1+\beta)\sum_{0\leq\varrho\leq n}\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho|\omega|^{n-\varrho} \leqq \beta\sum_{0\leq\nu\leq\varrho\leq n}\binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}|\omega|^{n-\varrho}.$$

Eine elementare Umformung liefert

$$(1+\beta)\left(|\omega| + \frac{\beta}{n}\right)^n \leqq \beta\sum_{0\leq\nu\leq n}\left(|\omega| + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu},$$

also die Ungleichung

$$\left(|\omega| + \frac{\beta}{n}\right)^n \leqq \beta\sum_{1\leq\nu\leq n}\left(|\omega| + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu}.$$

Hieraus folgt die Bestätigung

$$|\omega| + \frac{\beta}{n} \leqq R_n(\beta)$$

des Satzes 1.

Nach einem bekannten Ergebnis von St. Lipka[2]) gehören sämtliche Nullstellen eines komplexen Polynoms

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n \qquad \text{mit } a_n \neq 0$$

---

[2]) Vgl. *St. Lipka*, Über die Lage der Wurzeln von algebraischen Gleichungen, Monatshefte Math. Phys. **50** (1941), 125—127; *M. Marden*, A refinement of Pellet's theorem, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 550—557.

vom Grade $n \geqq 2$ auch dem zahnradförmigen Bereich

$$(7) \qquad |z| \leqq \begin{cases} S_n(f) & \text{für } \vartheta_{2\nu-1} \leqq \arg z \leqq \vartheta_{2\nu} \quad (1 \leqq \nu \leqq n), \\ S_{n-1}(f) & \text{für } \vartheta_{2\nu} < \arg z < \vartheta_{2\nu+1} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) \end{cases}$$

der komplexen Zahlenebene an, der durch die positiven Wurzeln $S_n = S_n(f)$ und $S_{n-1} = S_{n-1}(f)$ der beiden Gleichungen

$$S_n^n = \sum_{1 \leqq \nu \leqq n} |a_\nu| S_n^{n-\nu} \quad \text{und} \quad S_{n-1}^{n-1} = \sum_{1 \leqq \nu \leqq n-1} |a_\nu| S_{n-1}^{n-1-\nu} \qquad (a_0 = 1)$$

sowie durch die Argumente

$$\vartheta_k = \frac{1}{n}\left(\arg a_n + \frac{2k-1}{2}\pi\right) \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq 2n+1$$

bestimmt wird. Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gehören daher sämtliche Nullstellen des Polynoms $f(z)$ auch dem zahnradförmigen Bereich

$$|z| \leqq \begin{cases} \alpha R_n(\beta) & \text{für } \vartheta_{2\nu-1} \leqq \arg z \leqq \vartheta_{2\nu} \quad (1 \leqq \nu \leqq n), \\ \alpha R_{n-1}(\beta) & \text{für } \vartheta_{2\nu} < \arg z < \vartheta_{2\nu+1} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) \end{cases}$$

der Zahlenebene an, wenn noch $R_n = R_n(\beta)$ und $R_{n-1} = R_{n-1}(\beta)$ die positiven Wurzeln der Gleichungen

$$R_n^n = \beta \sum_{1 \leqq \nu \leqq n} R_n^{n-\nu} \quad \text{und} \quad R_{n-1}^{n-1} = \beta \sum_{1 \leqq \nu \leqq n-1} R_{n-1}^{n-1-\nu}$$

bezeichnen. Zu dieser Aussage liefert die Methode, die dem Beweise des Satzes 1 zugrundeliegt, nachstehende Variante:

**Satz 2.** *Bildet man aus den Koeffizienten eines komplexen Polynoms*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

*vom Grade $n \geqq 2$ mittels einer beliebig gewählten positiven Konstanten $\beta$ die Größe*

$$\alpha = \alpha(f) = \max_{1 \leqq \nu \leqq n} \left| \sqrt[\nu]{\frac{a_\nu}{\beta}} \right|,$$

*so gehören sämtliche Nullstellen des Polynoms $f(z)$ dem zahnradförmigen Bereich*

$$(8) \qquad \left| z + \frac{a_1}{n} \right| \leqq \begin{cases} \alpha\left(R_n(\beta) - \frac{\beta}{n}\right) & \text{für } \vartheta_{2\nu-1} \leqq \arg\left(z + \frac{a_1}{n}\right) \leqq \vartheta_{2\nu} \quad (1 \leqq \nu \leqq n), \\ \alpha\left(R_{n-1}(\beta) - \frac{\beta}{n}\right) & \text{für } \vartheta_{2\nu} < \arg\left(z + \frac{a_1}{n}\right) < \vartheta_{2\nu+1} \quad (1 \leqq \nu \leqq n) \end{cases}$$

*der komplexen Zahlenebene an, der durch die positiven Wurzeln $R_n = R_n(\beta)$ und $R_{n-1} = R_{n-1}(\beta)$ der Gleichungen*

$$R_n^n = \beta \sum_{1 \leqq \nu \leqq n} R_n^{n-\nu} \quad \text{und} \quad R_{n-1}^{n-1} = \beta \sum_{1 \leqq \nu \leqq n-1} R_{n-1}^{n-1-\nu},$$

*sowie durch die Argumente*

$$\vartheta_k = \frac{1}{n}\left(\arg f\left(-\frac{a_1}{n}\right) + \frac{2k-1}{2}\pi\right) \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq 2n+1$$

*bestimmt wird*[3]).

---

[3]) Die Möglichkeit, daß $\zeta = -\frac{a_1}{n}$ Nullstelle des Polynoms $f(z)$ ist, werde dabei aus der Betrachtung ausgeschlossen.

*Beweis.* Nach dem zuvor erwähnten Satze von St. Lipka gehören (unter den gleichen Bezeichnungen wie zuvor) die Nullstellen des reduzierten Polynoms

$$g(w) = \frac{1}{\alpha^n} f\left(\alpha w - \frac{a_1}{n}\right) = w^n + b_2 w^{n-2} + \cdots + b_{n-1} w + b_n$$

dem zahnradförmigen Bereich

$$(9) \qquad |w| \leqq \begin{cases} S_n(g) & \text{für } \vartheta_{2\nu-1} \leqq \arg w \leqq \vartheta_{2\nu} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n), \\ S_{n-1}(g) & \text{für } \vartheta_{2\nu} < \arg w < \vartheta_{2\nu+1} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n) \end{cases}$$

der Zahlenebene an, der durch die positiven Wurzeln $S_n = S_n(g)$ und $S_{n-1} = S_{n-1}(g)$ der Gleichungen

$$S_n^n = \sum_{2 \leqq \varrho \leqq n} |b_\varrho| S_n^{n-\varrho} \quad \text{bzw.} \quad S_{n-1}^{n-1} = \sum_{2 \leqq \varrho \leqq n-1} |b_\varrho| S_{n-1}^{n-1-\varrho}$$

und durch die Argumente

$$\vartheta_k = \frac{1}{n}\left(\arg b_n + \frac{2k-1}{2}\pi\right) \qquad \text{für } 1 \leqq k \leqq 2n+1$$

bestimmt wird. Wegen

$$g(0) = b_n = \frac{1}{\alpha^n} f\left(-\frac{a_1}{n}\right)$$

erhalten wir

$$\vartheta_k = \frac{1}{n}\left(\arg b_n + \frac{2k-1}{2}\pi\right) = \frac{1}{n}\left(\arg f\left(-\frac{a_1}{n}\right) + \frac{2k-1}{2}\pi\right).$$

Da die Nullstellen $\zeta_\nu$ des Polynoms $f(z)$ mit den Nullstellen $\omega_\nu$ des Polynoms $g(w)$ in der Beziehung

$$\zeta_\nu + \frac{a_1}{n} = \alpha\omega_\nu \qquad \text{mit } \arg\left(\zeta_\nu + \frac{a_1}{n}\right) = \arg \omega_\nu \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)$$

stehen, gehören die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ dem zahnradförmigen Bereich

$$\left|z + \frac{a_1}{n}\right| \leqq \begin{cases} \alpha S_n(g) & \text{für } \vartheta_{2\nu-1} \leqq \arg\left(z + \frac{a_1}{n}\right) \leqq \vartheta_{2\nu} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n), \\ \alpha S_{n-1}(g) & \text{für } \vartheta_{2\nu} < \arg\left(z + \frac{a_1}{n}\right) < \vartheta_{2\nu+1} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n) \end{cases}$$

der Zahlenebene an. Mithin bleiben allein die Ungleichungen

$$S_n(g) \leqq R_n(\beta) - \frac{\beta}{n} \quad \text{und} \quad S_{n-1}(g) \leqq R_{n-1}(\beta) - \frac{\beta}{n}$$

nachzuweisen.

Aus den Abschätzungen (6) erhält man

$$\begin{aligned} S_n^n &= \sum_{2 \leqq \varrho \leqq n} |b_\varrho| S_n^{n-\varrho} \\ &\leqq \sum_{2 \leqq \varrho \leqq n} \left[-(1+\beta)\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \beta \sum_{0 \leqq \nu \leqq \varrho} \binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}\right] S_n^{n-\varrho} \\ &= S_n^n - (1+\beta) \sum_{0 \leqq \varrho \leqq n} \binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho S_n^{n-\varrho} + \beta \sum_{0 \leqq \nu \leqq \varrho \leqq n} \binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu} S_n^{\varrho-\nu} \end{aligned}$$

und nun, wie zuvor beim Beweise des Satzes 1,

$$\left(S_n + \frac{\beta}{n}\right)^n \leqq \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n} \left(S_n + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu},$$

also

$$S_n + \frac{\beta}{n} \leqq R_n(\beta).$$

Ferner erhalten wir aus den Abschätzungen (6)

$$\begin{aligned} S_{n-1}^n &= \sum_{2 \leq \varrho \leq n-1} |b_\varrho| S_{n-1}^{n-\varrho} \\ &\leqq \sum_{2 \leq \varrho \leq n-1} \left[-(1+\beta)\binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho + \beta \sum_{0 \leq \nu \leq \varrho} \binom{n-\nu}{\varrho-\nu}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu}\right] S_{n-1}^{n-\varrho} \\ &\leqq S_{n-1}^n + (1+\beta)\left(\frac{\beta}{n}\right)^n - \beta \sum_{0 \leq \nu \leq n} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} \\ &\quad - (1+\beta) \sum_{0 \leq \varrho \leq n} \binom{n}{\varrho}\left(\frac{\beta}{n}\right)^\varrho S_{n-1}^{n-\varrho} + \beta \sum_{0 \leq \nu \leq \varrho \leq n} \binom{n-\nu}{\varrho-\nu} \cdot \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\varrho-\nu} S_{n-1}^{n-\varrho} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^n &\leqq \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n} \left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} + \left(\frac{\beta}{n}\right)^n - \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} \\ &= \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} + \left(\frac{\beta}{n}\right)^n - \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} \\ &\leqq \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta}{n}\right)^n - \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-\nu} &\leqq \left(\frac{\beta}{n}\right)^n - \beta\left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-1} \\ &= (1-n)\left(\frac{\beta}{n}\right)^n < 0. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung

$$\left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^{n-1} \leqq \beta \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \left(S_{n-1} + \frac{\beta}{n}\right)^{n-1-\nu}$$

folgt

$$S_{n-1} + \frac{\beta}{n} \leqq R_{n-1}(\beta)$$

und die Bestätigung des Satzes 2.

---

Eingegangen 6. Juli 1959.

# Normierte Funktionenalgebren.

## Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.

Von *Reinhold Baer* in Frankfurt am Main.

---

Eine Klasse mathematischer Strukturen mag durch „äußere" Darstellungen definiert oder durch „innere" Eigenschaften charakterisiert sein; die Aufgabe ist stets, diese beiden Arten der Gegebenheit zur Deckung zu bringen. Wir wollen dies hier für die folgende Klasse normierter Funktionenalgebren durchführen: Es sei $K$ ein bewerteter [nicht notwendig kommutativer] Körper und $\mathfrak{T}$ ein lokal kompakter, null-dimensionaler topologischer Raum, der durch Hinzufügen eines „unendlich fernen" Punktes in natürlicher Weise kompaktifiziert werden kann; die in naheliegender Weise normierte $K$-Algebra $F(K, \mathfrak{T})$ der auf $\mathfrak{T}$ eindeutigen, stetigen, im Unendlichen verschwindenden, $K$-wertigen Funktionen ist der Gegenstand unserer Untersuchung.

Die Klasse der normierten $K$-Algebren, die in einem solchen $F(K, \mathfrak{T})$ enthalten sind, die alle idempotenten Elemente aus $F(K, \mathfrak{T})$ enthalten, und noch der weiteren Bedingung $(B^*)$ des § 6 genügen, wird durch die folgenden drei Eigenschaften charakterisiert:

(1) die Norm der $n$-ten Potenz ist die $n$-te Potenz der Norm;

(2) jedes maximale Ideal, das nicht alle idempotenten Elemente enthält, ist Kern eines beschränkten Epimorphismus auf $K$;

(3) die von den idempotenten Elementen aufgespannte Teilalgebra ist überall dicht.

Will man genau die Klasse der Algebren der Form $F(K, \mathfrak{T})$ charakterisieren, so muß man zu den Eigenschaften (1) bis (3) noch eine bzgl. $K$ eingeschränkte Vollständigkeitsforderung hinzufügen, für deren Formulierung auf § 3 und § 8 verwiesen sei — wir können ja von der Algebra $F(K, \mathfrak{T})$ nicht mehr Vollständigkeit erwarten, als wir von dem bewerteten Körper $K$ voraussetzen; und die Vollständigkeit von $K$ fordern wir nicht. Dagegen gilt in $F(K, \mathfrak{T})$ die Eigenschaft (2) sogar in verschärfter Form; denn kein maximales Ideal aus $F(K, \mathfrak{T})$ enthält alle idempotenten Elemente aus $F(K, \mathfrak{T})$.

Entsprechend diesen Eigenschaften erweisen sich für die Theorie dieser Algebren zwei abgeleitete Strukturen als besonders wichtig: der im wesentlichen mit $\mathfrak{T}$ übereinstimmende Strukturraum der maximalen Ideale und die von den idempotenten Elementen aufgespannte [dichte] Teilalgebra der „Treppenfunktionen".

Bemerkenswert scheint uns zu sein, daß wir zwar an den topologischen Raum $\mathfrak{T}$ recht scharfe Anforderungen stellen, dafür von dem bewerteten Körper $K$ nichts verlangen; dieser braucht weder kommutativ, noch nicht-archimedisch, weder lokal kompakt, noch null-dimensional und vor allem auch nicht vollständig zu sein.

## 1. Topologische Vorbemerkungen.

Unter einem topologischen Raum sei hier ein $T_1$-Raum verstanden, in dem also die Punkte abgeschlossene Mengen bilden. Ist $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge des topologischen Raumes $\mathfrak{T}$, so heiße Umgebung von $\mathfrak{S}$ eine jede $\mathfrak{S}$ enthaltende offene Menge aus $\mathfrak{T}$. Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind, mögen der Kürze halber randlos genannt werden. Die Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{T}$ ist kompakt, wenn jede Überdeckung von $\mathfrak{K}$ durch offene Mengen aus $\mathfrak{T}$ eine endliche Überdeckung enthält; und der Raum $\mathfrak{T}$ heißt lokal kompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist.

Die uns wesentlich interessierende Klasse von Räumen wird durch den folgenden wohl bekannten Satz charakterisiert, der mit seinem Beweis der Bequemlichkeit des Lesers wegen hier eingefügt sei.

(1. 1) *Die folgenden Eigenschaften des Raumes $\mathfrak{T}$ sind miteinander äquivalent:*

(a) *Ist $\mathfrak{U}$ eine Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{T}$, so enthält $\mathfrak{U}$ eine kompakte und randlose Umgebung von $\mathfrak{p}$.*

(b) *$\mathfrak{T}$ ist lokal kompakt; und zu irgendzwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{T}$ gibt es eine randlose Umgebung von $\mathfrak{p}$, die $\mathfrak{q}$ nicht enthält.*

(c) *Ist $\mathfrak{U}$ eine Umgebung der kompakten Menge $\mathfrak{A}$, so enthält $\mathfrak{U}$ eine randlose und kompakte Umgebung von $\mathfrak{A}$.*

*Beweis*: Es ist klar, daß (b) aus (a) folgt, da es ja zu jedem Punktepaar $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ eine $\mathfrak{q}$ nicht enthaltende Umgebung von $\mathfrak{p}$ gibt. — Gilt (b), so betrachten wir eine Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes $\mathfrak{p}$. Aus der lokalen Kompaktheit von $\mathfrak{T}$ folgt zunächst die Existenz einer Umgebung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{p}$, deren abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{V}}$ kompakt ist. Dann ist $\mathfrak{W} = \mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ eine Umgebung von $\mathfrak{p}$, die in der kompakten, abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{V}}$ enthalten ist. Ist $\mathfrak{a}$ ein nicht in $\mathfrak{W}$ enthaltener Punkt aus $\mathfrak{A}$, so gibt es wegen (b) eine $\mathfrak{p}$ nicht enthaltende randlose Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$. Aus der Kompaktheit von $\mathfrak{A}$ folgt die von $\mathfrak{A} - \mathfrak{W}$; und hieraus folgern wir die Existenz endlich vieler Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ aus $\mathfrak{A} - \mathfrak{W}$ derart, daß $\mathfrak{A} - \mathfrak{W} \leqq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_i)$ gilt. Der Durchschnitt $\mathfrak{D} = \bigcap_{i=1}^{n} [\mathfrak{T} - \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_i)]$ ist randlos, da jedes der $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ und also auch jedes der Komplemente $\mathfrak{T} - \mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ randlos ist. Da $\mathfrak{p}$ in keinem $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ liegt, so ist $\mathfrak{D}$ eine Umgebung von $\mathfrak{p}$; und da $\mathfrak{A} - \mathfrak{W}$ von den $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_i)$ überdeckt wird, so ist $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{T} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{W}) = (\mathfrak{T} - \mathfrak{A}) + \mathfrak{W}$. Wir setzen $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{W}$. Dann ist $\mathfrak{E}$ eine in $\mathfrak{U}$ enthaltene Umgebung von $\mathfrak{p}$. Weiter gilt:

$$\overline{\mathfrak{E}} \leqq \overline{\mathfrak{D}} \cap \overline{\mathfrak{W}} \leqq \mathfrak{D} \cap \overline{\mathfrak{V}} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{A} \leqq \mathfrak{D} \cap \mathfrak{W} = \mathfrak{E},$$

woraus wir $\mathfrak{E} = \overline{\mathfrak{E}}$ erschließen. Also ist $\mathfrak{E}$ eine randlose Umgebung von $\mathfrak{p}$, die in der kompakten Menge $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Damit ist auch die Kompaktheit von $\mathfrak{E}$ dargetan; und damit haben wir gezeigt, daß (a) aus (b) folgt.

Es ist klar, daß (a) aus (c) folgt. Wir nehmen also umgekehrt die Gültigkeit von (a) an und betrachten eine Umgebung $\mathfrak{U}$ einer kompakten Menge $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Punkt aus $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von $\mathfrak{a}$; und es folgt aus (a) die Existenz einer randlosen, in $\mathfrak{U}$ enthaltenen und kompakten Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$. Aus der Kompaktheit von $\mathfrak{A}$ folgt dann die Existenz endlich vieler $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$, die bereits $\mathfrak{A}$ überdecken. Ihre Vereinigung $\mathfrak{S}$ ist dann eine randlose, in $\mathfrak{U}$ enthaltene und kompakte Umgebung von $\mathfrak{A}$. Also ist (c) eine Folge von (a).

Räume mit den äquivalenten Eigenschaften (a) bis (c) von (1. 1) wollen wir wie üblich lokal kompakte, null-dimensionale Räume nennen. Diese sind natürlich auch Hausdorffsch, und ihre kompakten Teilmengen sind abgeschlossen. Jeder derartige Raum läßt sich durch Hinzufügen eines „unendlich fernen" Punktes kompaktifizieren, wenn wir als Umgebungsbasis dieses unendlich fernen Punktes etwa die Komplemente randloser kompakter Mengen wählen. Der Raum $\mathfrak{T}$ ist dann und nur dann kompakt, wenn der unendlich ferne Punkt isoliert ist; und diese Möglichkeit wollen wir durchaus nicht ausschließen.

## 2. Vorbemerkungen über bewertete Körper.

Unter einem bewerteten Körper werde ein [nicht notwendig kommutativer] Körper $K$ und ein [reellwertiger] Absolutbetrag $|k|$ der Zahlen $k$ aus $K$ mit folgenden Eigenschaften verstanden:

1. $|k| = 0$ dann und nur dann, wenn $k = 0$; und $0 < |k|$ für $k \neq 0$.
2. $|a + b| \leqq |a| + |b|$ und $|ab| = |a|\,|b|$ für $a$, $b$ aus $K$.

Natürlich gilt dann stets $1 = |1|$, $|-k| = |k|$ und $|k^{-1}| = |k|^{-1}$ für $k \neq 0$. Weiter verifiziert man mühelos die Gültigkeit der nützlichen Ungleichung

3. $\big||a| - |b|\big| \leqq |a - b|$ für $a$, $b$ aus $K$.

Wir werden keinen Anlaß haben, die Vollständigkeit des bewerteten Körpers $K$ zu fordern. Ebensowenig werden wir topologische Forderungen wie lokale Kompaktheit stellen. Allerdings wird uns an einer Stelle die Null-Dimensionalität wenigstens erwähnenswert sein. Da die nicht-archimedisch bewerteten Körper sicherlich null-dimensional sind, so sei noch gezeigt, daß die übliche Charakterisierung der Nichtarchimedizität auch in unserem ein wenig allgemeineren Fall gilt. Wir werden also zeigen:

*In $K$ gilt dann und nur dann $|n| \leqq 1$ für alle ganzen Zahlen $n$, wenn*

$$|a + b| \leqq \max(|a|, |b|) \text{ für jedes } a \text{ und } b \text{ aus } K \text{ gilt.}$$

Es genügt offenbar, die Notwendigkeit dieser Bedingung zu erweisen. Um dies zu tun, betrachten wir zunächst eine $1 \leqq |k|$ erfüllende Zahl $k$ aus $K$. Dann gilt für jedes positive ganzzahlige $n$:

$$|1 + k|^n = |(1 + k)^n| \leqq \sum_{i=0}^{n} \left| \binom{n}{i} k^i \right| \leqq \sum_{i=0}^{n} |k|^i \leqq (n + 1)\,|k|^n,$$

und hieraus folgt die Gültigkeit von

$$|1 + k| \leqq (n + 1)^{n^{-1}}\,|k| \text{ für jedes positive ganzzahlige } n.$$

Aus $\lim\limits_{n \to \infty} (n + 1)^{n^{-1}} = 1$ folgt also $|1 + k| \leqq |k|$, wenn nur $1 \leqq |k|$ gilt. Sind schließlich $a$ und $b$ zwei beliebige Elemente aus $K$, so können wir o. B. d. A. $0 < |a| \leqq |b|$ annehmen. Dann wird $1 \leqq |ba^{-1}|$; und es folgt aus dem schon Gezeigten, daß

$$|a + b| = |1 + ba^{-1}|\,|a| \leqq |ba^{-1}|\,|a| = |b|$$

ist, womit unsere Behauptung voll bewiesen ist.

## 3. Die Algebra der im Unendlichen verschwindenden stetigen Funktionen.

Wir betrachten einen lokal kompakten, null-dimensionalen topologischen Raum $\mathfrak{T}$, einen bewerteten Körper $K$ und die Gesamtheit $F = F(K, \mathfrak{T})$ der $K$-wertigen eindeutigen Funktionen $f$ über $\mathfrak{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist $f(\mathfrak{p})$ eine eindeutig bestimmte Zahl aus $K$;

(2) $f$ ist stetig;

(3) zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon$ gibt es eine randlose kompakte Menge $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(f, \varepsilon)$ derart, daß $|f(\mathfrak{p})| < \varepsilon$ für alle nicht in $\mathfrak{M}$ liegenden Punkte $\mathfrak{p}$ gilt.

Da jede Umgebung eine randlose kompakte Umgebung enthält, so kann man (2) auch in der folgenden schärferen Form aussprechen:

(2*) zu jeder positiven reellen Zahl $\varepsilon$ und zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ gibt es eine randlose kompakte Umgebung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(f, \varepsilon)$ von $\mathfrak{p}$ derart, daß

$$|f(\mathfrak{p}) - f(\mathfrak{q})| < \varepsilon \text{ für alle Punkte } \mathfrak{q} \text{ aus } \mathfrak{U}$$

gilt.

Sind $f$ und $g$ Funktionen aus $F$, so sind auch $f + g$, $f - g$ und $fg$ Funktionen aus $F$. Ist $f$ in $F$ und $k$ in $K$, so ist auch $kf$ in $F$ — daß auch $fk$ in $F$ liegt, wollen wir unberücksichtigt lassen. Kurz: $F$ ist eine $K$-Algebra. — Wir bemerken, daß $F$ dann und nur dann die 1 [oder gleichwertig: die von 0 verschiedenen Konstanten] enthält, wenn $T$ kompakt ist, wie man sofort aus (3) [mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$] erschließt.

Eine bequeme Möglichkeit, Funktionen aus $F$ zu konstruieren, ist in der folgenden trivialen Bemerkung enthalten. Es sei $\mathfrak{N}$ eine randlose kompakte Menge und $f$ eine $K$-wertige Funktion über $\mathfrak{T}$, die auf $\mathfrak{N}$ stetig und außerhalb $\mathfrak{N}$ stets gleich 0 ist. Dann gehört $f$ zu $F$.

Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ ein Paar verschiedener Punkte aus $\mathfrak{T}$, so gibt es eine $\mathfrak{q}$ nicht enthaltende, randlose und kompakte Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$. Die Funktion $e$, die überall auf $\mathfrak{U}$ gleich 1 und sonst gleich 0 ist, gehört zu $F$. Also gibt es zu jedem Punktepaar aus $\mathfrak{T}$ eine Funktion aus $F$, die auf diesen Punkten verschiedene Werte annimmt.

**Bemerkung:** Fordern wir, daß der bewertete Körper $K$ ein nulldimensionaler topologischer Raum ist, und daß es zu jedem Punktepaar aus $\mathfrak{T}$ eine Funktion aus $F$ gibt, die auf diesen Punkten verschiedene Werte annimmt, so wird die Nulldimensionalität von $\mathfrak{T}$ eine aus den übrigen Forderungen ableitbare Eigenschaft, wie man mühelos aus der Stetigkeit der Funktionen in $F$ erschließt.

Kompaktifiziert man $\mathfrak{T}$ durch Hinzufügen des unendlich-fernen Punktes, so kann man die Funktionen aus $F$ stetig auf ihn fortsetzen, indem man sie auf dem unendlich-fernen Punkt verschwinden läßt.

Daß die Funktionen aus $F$ sämtlich auf $\mathfrak{T}$ beschränkt sind, sieht man so ein: Ist $f$ eine Funktion aus $F$, so gibt es eine randlose kompakte Menge $\mathfrak{M}$ derart, daß $|f(\mathfrak{p})| < 1$ für $\mathfrak{p}$ nicht in $\mathfrak{M}$ gilt. Die auf der kompakten Menge $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f$ ist natürlich auch auf $\mathfrak{M}$ beschränkt; und damit ist die Beschränktheit von $f$ auf $\mathfrak{T}$ dargetan.

Ist $f$ eine Funktion aus $F$, so werde unter der *Norm* $\|f\|$ *von* $f$ die kleinste obere Schranke der absoluten Funktionswerte $|f(\mathfrak{p})|$ verstanden. Man überzeugt sich sofort von der Gültigkeit der folgenden Regeln:

(4) $\|f\| = 0$ dann und nur dann, wenn $f = 0$; und $0 < \|f\|$ für $f \neq 0$.

(5) $\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ und $\|ab\| \leqq \|a\|\,\|b\|$ für $a$, $b$ in $F$.

(6) Ist $f$ in $F$ und $k$ in $K$, so ist $\|kf\| = |k|\,\|f\|$.

(7) Ist $f$ in $F$ und $n$ eine positive ganze Zahl, so ist $\|f^n\| = \|f\|^n$.

(8) $|\,\|a\| - \|b\|\,| \leqq \|a - b\|$ für $a$, $b$ in $F$.

Da $K$ nicht vollständig zu sein braucht, so kann man auch nicht erwarten, daß $F$ eine vollständige normierte Algebra ist. Es gilt nur die folgende Eigenschaft, die wir etwa als *Vollständigkeit bezüglich* $K$ bezeichnen können:

Die Funktionenfolge $f_1, \ldots, f_i, f_{i+1}, \ldots$ aus $F$ konvergiert dann und nur dann [im Sinne der Norm] gegen eine Funktion aus $F$, wenn

(a) die $f_i$ eine Cauchysche Folge bilden und

(b) $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(\mathfrak{p})$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ existiert.

[Die Unentbehrlichkeit von (b) ergibt sich daraus, daß aus (a) nur folgt, daß die $f_i(\mathfrak{p})$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ eine Cauchysche Folge aus $K$ bilden.] In dieser Hinsicht gilt sogar:

Dann und nur dann ist $F$ vollständig, wenn $K$ vollständig ist.

## 4. Die Treppenfunktionen aus $F$.

Nimmt eine Funktion aus $F$ auf $\mathfrak{T}$ nur endlich viel verschiedene Werte an, so wollen wir sie als *Treppenfunktion* bezeichnen. Es ist klar, daß die 0 eine Treppenfunktion ist, und daß die Gesamtheit $T = T(K, \mathfrak{T})$ der Treppenfunktionen aus $F$ eine Teilalgebra von $F$ ist. Die Wichtigkeit der Treppenfunktionen für unsere Überlegungen beruht vorwiegend auf dem folgenden

**Satz 4. 1:** *$T$ ist dicht in $F$.*

*Beweis*: Es sei $f$ eine Funktion aus $F$ und $\varepsilon$ eine positive Zahl. Dann gibt es eine randlose kompakte Menge $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{T}$ derart, daß

$$|f(\mathfrak{p})| < \varepsilon \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{T} - \mathfrak{K}$$

ist. Ist $\mathfrak{q}$ ein Punkt aus $\mathfrak{K}$, so gibt es eine randlose kompakte Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{q}$ mit $|f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{q})| < \varepsilon$ für alle $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{U}$. Da aber der Durchschnitt zweier randloser kompakter Umgebungen von $\mathfrak{q}$ wieder eine solche ist, so haben wir in $\mathfrak{V}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{U}$ eine randlose kompakte, in $\mathfrak{K}$ enthaltene Umgebung von $\mathfrak{q}$ mit der Eigenschaft

$$|f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{q})| < \varepsilon \text{ für } \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{V}(\mathfrak{q})$$

gefunden. Aus der Kompaktheit von $\mathfrak{K}$ folgt die Existenz endlich vieler Punkte $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ in $\mathfrak{K}$ derart, daß $\mathfrak{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{V}(\mathfrak{q}_i)$ ist. Wir setzen nun

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{V}(\mathfrak{q}_1), \quad \mathfrak{K}_i = \mathfrak{V}(\mathfrak{q}_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathfrak{V}(\mathfrak{q}_j).$$

Dann ist jedes $\mathfrak{K}_i$ eine randlose kompakte Menge und jeder Punkt aus $\mathfrak{K}$ gehört zu einer und nur einer dieser Mengen $\mathfrak{K}_i$. Folglich wird eine Treppenfunktion $t$ aus $F$ durch die folgenden Bedingungen definiert:

$$t(\mathfrak{x}) = 0 \text{ für } \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{T} - \mathfrak{K};$$
$$t(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{q}_i) \text{ für } \mathfrak{x} \text{ in } \mathfrak{K}_i.$$

Weiter gilt nach Konstruktion $|t(\mathfrak{p}) - f(\mathfrak{p})| < \varepsilon$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$; und hieraus folgt $\|t - f\| \leqq \varepsilon$, womit unser Satz bewiesen ist.

Ist $f$ eine Funktion aus $F$ und $k$ eine Zahl aus $K$, so ist die Menge $f^{-1}(k)$ aller $f(\mathfrak{x}) = k$ erfüllenden Punkte $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{T}$ eine [möglicherweise leere] abgeschlossene Menge, wie sich aus der Stetigkeit von $f$ ergibt. Dies ist die wohlbekannte durch $f$ bewirkte kanonische Zerlegung von $\mathfrak{T}$ in paarweise punktfremde abgeschlossene Mengen. Ist insbesondere $f$

eine Treppenfunktion, so sind nur endlich viele dieser Mengen nicht leer. Jede dieser Mengen ist dann also offen als das Komplement einer Summe endlich vieler abgeschlossener Mengen. Für Treppenfunktionen sind also diese Mengen $f^{-1}(k)$ sämtlich randlos. Darüber hinaus gilt das

**Lemma 4. 2:** *Ist $t$ eine Treppenfunktion aus $F$ und $k \neq 0$ eine Zahl aus $K$, so ist $t^{-1}(k)$ kompakt und randlos.*

*Beweis*: Als Treppenfunktion nimmt $t$ nur endlich viele von 0 verschiedene Werte aus $K$ an. Der Minimalwert ihrer Absolutbeträge werde mit $m$ bezeichnet. Dann ist $0 < m$ und aus $|t(\mathfrak{p})| < m$ folgt $t(\mathfrak{p}) = 0$. Unter $\mathfrak{R}$ verstehen wir die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{r}$ mit $t(\mathfrak{r}) \neq 0$. Da $t$ nur endlich viele verschiedene Werte annimmt, und da jedes $t^{-1}(k)$ randlos ist, so ist auch $\mathfrak{R}$ randlos. Da $t$ zu $F$ gehört, so gibt es eine randlose kompakte Menge $\mathfrak{M}$ derart, daß

$$|t(\mathfrak{p})| < m \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{T} - \mathfrak{M}$$

gilt. Nach Wahl von $m$ folgt daraus sogar $t(\mathfrak{T} - \mathfrak{M}) = 0$ und hieraus ergibt sich $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{M}$. Ist $k \neq 0$ eine Zahl aus $K$, so ist also $t^{-1}(k) \leqq \mathfrak{R} \leqq \mathfrak{M}$. Randlose Teilmengen kompakter Mengen sind aber kompakt, womit Kompaktheit und Randlosigkeit von $t^{-1}(k)$ bewiesen ist.

Ist $e = e^2$ eine idempotente Funktion aus $F$, so kann $e$ nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen, ist also eine Treppenfunktion. Es folgt dann aus Lemma 4. 2, daß die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{p}$ mit $e(\mathfrak{p}) = 1$ eine randlose kompakte Menge ist.

**Zusatz 4. 3:** *Sind $k_1, \ldots, k_n$ die sämtlichen von 0 verschiedenen Werte der Treppenfunktion $t$ aus $F$, so gibt es eindeutig bestimmte, paarweise orthogonale, idempotente Funktionen $e_i$ aus $F$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$.*

*Beweis*: Aus Lemma 4. 2 folgt, daß $t^{-1}(k_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ randlos und kompakt ist. Die Funktion $e_i$, die überall auf $t^{-1}(k_i)$ gleich 1 und sonst 0 ist, gehört also zu $F$. Aus der Verschiedenheit der $k_i$ folgt, daß die $e_i$ paarweise orthogonale idempotente Funktionen sind; und aus der Konstruktion der $e_i$ folgt sofort $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$.

Diese kanonische Darstellung der Treppenfunktionen wird sich oft als nützlich erweisen.

Da idempotente Funktionen nur die Werte 0 und 1 annehmen können, so sind sie natürlich mit allen Funktionen aus $F$ vertauschbar, liegen also im Zentrum von $F$. Da aber $K$ nicht kommutativ zu sein braucht, kann eine entsprechende Bemerkung über die Treppenfunktionen selbstverständlich nicht gemacht werden.

## 5. Das Treppenideal.

Unter einem Ideal aus $F$ werde eine nichtleere Teilmenge $L$ von $F$ verstanden, die den Bedingungen

$$L = L \pm L = KL \text{ und } FL + LF \leqq L$$

genügt. Dies ist also genauer ein zweiseitiges $K$-Ideal aus $F$. Dagegen verlangen wir nicht, daß $L$ in der durch die Norm in $F$ definierten Topologie abgeschlossen ist.

Jede Teilmenge von $F$ erzeugt ein Ideal aus $F$: das kleinste diese Teilmenge enthaltende Ideal aus $F$. Insbesondere erzeugen die idempotenten Funktionen aus $F$ ein Ideal $J$. Dieses wird natürlich auch von den Treppenfunktionen aus $F$ erzeugt und möge deshalb *das Treppenideal von $F$* genannt werden.

Es liegt nahe, mit jeder Funktion $f$ aus $F$ zwei Teilmengen von $\mathfrak{T}$ zu verbinden: die Menge $f^{-1}(0)$ der Nullstellen von $f$ und ihr Komplement $\mathfrak{N}(f) = \mathfrak{T} - f^{-1}(0)$. Da $f^{-1}(0)$ eine abgeschlossene Menge ist, so ist $\mathfrak{N}(f)$ offen.

**Lemma 5. 1:** *Die folgenden Eigenschaften der Funktion $f$ aus $F$ sind miteinander äquivalent:*

(a) *$f$ gehört zum Treppenideal $J$.*

(b) *$\mathfrak{N}(f)$ ist in einer randlosen kompakten Menge enthalten.*

(c) *$\overline{\mathfrak{N}(f)}$ ist kompakt.*

*Beweis*: Ist $f$ eine Funktion aus $J$, so gibt es idempotente Funktionen $e_i$ und Funktionen $f_i$ in $F$ derart, daß $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ gilt, da ja die idempotenten Funktionen dem Zentrum von $F$ angehören. Jede der Mengen $e_i^{-1}(1)$ ist nach Lemma 4. 2 randlos und kompakt; und folglich ist auch die Vereinigung $\mathfrak{M}$ dieser Mengen $e_i^{-1}(1)$ randlos und kompakt. Es ist aber klar, daß $\mathfrak{N}(f) \leqq \mathfrak{M}$ ist; und damit haben wir gezeigt, daß (b) aus (a) folgt.

Ist eine Menge in einer kompakten Menge enthalten, so ist ihre abgeschlossene Hülle kompakt. Also folgt (c) aus (b).

Ist schließlich $\overline{\mathfrak{N}(f)}$ kompakt, so folgt aus (1. 1), daß $\overline{\mathfrak{N}(f)}$ und also auch $\mathfrak{N}(f)$ in einer randlosen kompakten Menge $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Die Funktion $r$, die überall auf $\mathfrak{R}$ gleich 1 und sonst gleich 0 ist, ist eine idempotente Funktion aus $F$. Es ist klar, daß $f = fr$ ist. Da aber $r$ in $J$ liegt, so gehört auch $f$ zu $J$, so daß (a) aus (c) folgt.

**Lemma 5. 2:** *Ist $f$ eine Funktion aus $F$, so gibt es randlose kompakte Mengen $\mathfrak{R}_i$ $[i = 0, 1, 2, \ldots]$ derart, daß*

(a) *jeder Punkt aus $\mathfrak{N}(f)$ einer und nur einer Menge $\mathfrak{R}_i$ angehört und*

(b) *$(i+3)^{-1} < |f(\mathfrak{p})| < i^{-1}$ für alle $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}_i$ gilt.*

*Beweis*: Sind $a, b, c, d$ den Ungleichungen $0 < a < b < c < d$ genügende reelle Zahlen, von denen $d$ auch unendlich sein kann, so ist die Menge $\mathfrak{A}$ der $a < |f(\mathfrak{p})| < d$ erfüllenden Punkte $\mathfrak{p}$ offen, während die Menge $\mathfrak{B}$ der $b \leqq |f(\mathfrak{p})| \leqq c$ erfüllenden Punkte $\mathfrak{p}$ abgeschlossen ist. Es ist klar, daß $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}$ ist. Da $f$ in $F$ liegt [und also im Unendlichen verschwindet], so gibt es eine randlose kompakte Menge $\mathfrak{M}$ derart, daß $|f(\mathfrak{p})| < b$ für alle Punkte $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T} - \mathfrak{M}$ gilt. Dann liegt aber $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{M}$, wenn $b \leqq |f(\mathfrak{p})|$ ist, so daß insbesondere die abgeschlossene Menge $\mathfrak{B}$ in der kompakten Menge $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Folglich ist $\mathfrak{B}$ selbst eine kompakte Menge und $\mathfrak{A}$ ist eine Umgebung von $\mathfrak{B}$. Wir folgern aus (1. 1) die Existenz einer kompakten und randlosen, in $\mathfrak{A}$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{B}$.

Wenden wir dieses Resultat auf $a = (i+3)^{-1}$, $b = (i+2)^{-1}$, $c = (i+1)^{-1}$ und $d = i^{-1}$ an, wobei $i$ eine nicht negative ganze Zahl ist, und wobei für $i = 0$ als $c$ nicht 1, sondern irgendeine obere Schranke $s$ der absoluten Beträge von $f$ gewählt werden muß, so erhalten wir eine randlose und kompakte Menge $\mathfrak{K}_i$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(c′) ist $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}_i$, so ist $(i+3)^{-1} < |f(\mathfrak{p})| < i^{-1}$;
ist $(i+2)^{-1} \leqq |f(\mathfrak{p})| \leqq (i+1)^{-1}$, $0 < i$, so liegt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}_i$;

(c″) ist $\frac{1}{2} \leqq |f(\mathfrak{p})| \leqq s$, so liegt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}_0$.

Man überzeugt sich sofort, daß $\mathfrak{N}(f)$ die Vereinigung dieser Mengen $\mathfrak{K}_i$ ist.

Setzen wir jetzt $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{K}_i - \bigcup_{j=0}^{i-1} \mathfrak{K}_j$, so ist jede dieser Mengen $\mathfrak{R}_i$ randlos und kompakt und genügt den Bedingungen (a) und (b) unseres Lemma.

Wie üblich werde unter einem *maximalen Ideal aus F* ein Ideal $M$ verstanden, das von $F$ verschieden ist, während es kein von $M$ und $F$ verschiedenes Ideal zwischen $M$ und $F$ gibt.

**Satz 5. 3:** *Das Treppenideal J ist in keinem maximalen Ideal von F enthalten.*

*Beweis*: Wir nehmen an, daß unser Satz falsch ist. Dann gibt es ein $J$ enthaltendes maximales Ideal $W$ in $F$. Insbesondere gibt es eine nicht in $W$ enthaltene Funktion $f$ aus $F$. Aus Lemma 5. 2 folgern wir die Existenz randloser kompakter Mengen $\mathfrak{R}_i$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ derart, daß

(a) *jeder Punkt aus* $\mathfrak{R}(f)$ *einem und nur einem* $\mathfrak{R}_i$ *angehört und*

(b) $(i+3)^{-1} < |f(\mathfrak{p})| < i^{-1}$ *für* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{R}_i$ *gilt.*

Wären 0 und 1 die einzigen Absolutbeträge der Funktionswerte von $f$, so wäre $\mathfrak{R}(f) = \mathfrak{R}_0$ randlos und kompakt. Dann würde aber aus Lemma 5. 1 die Zugehörigkeit von $f$ zu $J \leqq W$ folgen; und dies ist unmöglich. Hieraus folgt insbesondere die Existenz einer Zahl $e$ in $K$ mit $|e| \neq 0, 1$. Da dann $e \neq 0$ und von den Zahlen $e$ und $e^{-1}$ wenigstens eine den Betrag kleiner als 1 hat, so können wir o. B. d. A. annehmen, daß $0 < |e| < 1$ ist.

Als nächstes wollen wir folgenden Hilfssatz beweisen:

(H) *Ist g eine Funktion aus W derart, daß*

(H. a) $f^{-1}(0) \leqq g^{-1}(0) \leqq f^{-1}(0) + \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{R}_i$ *für geeignetes k*

*gilt, so gibt es keine positiven reellen Zahlen* $M_{k+j}$, *die den Bedingungen*

(H. b) $\lim_{j\to\infty} M_{k+j} = 0$ *und* $|f(\mathfrak{p})| < M_i\,|g(\mathfrak{p})|$ *für* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{R}_i$ *und* $k < i$

*genügen.*

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine Funktion $g$ in $W$ und Zahlen $k$, $M_{k+j}$, die den Bedingungen (H. a) und (H. b) genügen. Da $g$ auf den Mengen $\mathfrak{R}_{k+j}$ von 0 verschieden ist, so wird durch

$$h(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } f^{-1}(0) + \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{R}_i \\ f(\mathfrak{p})\, g(\mathfrak{p})^{-1} \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{R}_i \text{ mit } k < i \end{cases}$$

eine eindeutige $K$-wertige Funktion über $\mathfrak{T}$ definiert.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{R}(h)$, so liegt $\mathfrak{p}$ in einem und nur einem $\mathfrak{R}_i$ mit $k < i$. Da $\mathfrak{R}_i$ randlos und kompakt ist, und da $f$ und $g$ auf $\mathfrak{R}_i$ stetige, nirgends verschwindende Funktionen sind, so ist $h$ auf $\mathfrak{R}_i$ und insbesondere in $\mathfrak{p}$ stetig.

Ist $\varepsilon$ eine positive Zahl, so folgt aus $\lim_{j\to\infty} M_{k+j} = 0$ die Existenz einer ganzen Zahl $N$ mit $M_{k+j} < \varepsilon$ für $N < j$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{R}_{k+j}$ mit $N < j$, so wird

$$|h(\mathfrak{p})| = |f(\mathfrak{p})|\,|g(\mathfrak{p})|^{-1} < M_{k+j} < \varepsilon;$$

und hieraus folgern wir

$$|h(\mathfrak{p})| < \varepsilon \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } f^{-1}(0) + \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{R}_i + \bigcup_{N<j} \mathfrak{R}_{k+j},$$

da ja $h$ auf den ersten $k+2$ Summanden verschwindet. Nun ist $\mathfrak{E} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{R}_{k+j}$ als Vereinigung endlich vieler randloser und kompakter Mengen selbst randlos und kompakt.

Also ist $\mathfrak{T} - \mathfrak{E}$ eine randlose Menge, die $h^{-1}(0)$ enthält und auf der $|h| < \varepsilon$ ist. Es folgt, daß $h$ auch auf $h^{-1}(0)$ stetig ist und im Unendlichen verschwindet, daß also $h$ in $F$ liegt.

Mit $g$ liegt auch $hg$ in $W$. Da $f^{-1}(0) \leqq g^{-1}(0) \leqq h^{-1}(0)$ wegen (H. a) und der Konstruktion von $h$ ist, so ist $h^{-1}(0)$ die Nullstellenmenge von $hg$. Wir bilden weiter die Funktion $t = f - hg$. Diese gehört natürlich auch zu $F$; und es folgt aus der Konstruktion von $h$ und $t$, daß

$$f^{-1}(0) + \bigcup_{k<i} \mathfrak{R}_i \leqq t^{-1}(0)$$

ist. Dann ist aber

$$\mathfrak{R}(t) \leqq \bigcup_{i=0}^{k} \mathfrak{R}_i;$$

und da eine Vereinigung endlich vieler randloser unf kompakter Mengen selbst randlos und kompakt ist, so ergibt Anwendung von Lemma 5. 1 die Zugehörigkeit von $t$ zu $J \leqq W$. Mit $hg$ und $t = f - hg$ gehört aber auch $f$ zu $W$; und dies ist unmöglich. Damit haben wir (H) bewiesen.

Wir erinnern an die früher nachgewiesene Existenz einer Zahl $e$ in $K$ mit $0 < |e| < 1$. Dann ist die Folge $\frac{1}{2}\,[-\log|e|]^{-1} \log i$ mit $i = 1, 2, \ldots$, eine gegen unendlich strebende Folge positiver Zahlen. Also gibt es ganze positive Zahlen $n(i)$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$, die der Ungleichung

$$n(i) < -\tfrac{1}{2}\,[\log|e|]^{-1} \log i \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots$$

genügen und außerdem gegen Unendlich streben. Dann gilt aber auch

$$|e|^{-n(i)} < i^{\frac{1}{2}} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots,$$

und hieraus folgt

$$\lim_{i\to\infty} i^{-1}\,|e|^{-n(i)} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Zahlen definieren wir eine weitere Hilfsfunktion $s$ folgendermaßen:

$$s(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mathfrak{p} \text{ in } f^{-1}(0) \\ e^{n(i)} & \text{für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{R}_i\,. \end{cases}$$

Es ist klar, daß $s$ eine eindeutige, $K$-wertige Funktion über $\mathfrak{T}$ ist. Da $s$ auf jedem $\mathfrak{R}_i$ konstant ist, so ist $s$ auf jeder der randlosen kompakten Mengen $\mathfrak{R}_i$ stetig; und daraus folgt bereits die Stetigkeit von $s$ auf der offenen Menge $\mathfrak{R}(s) = \mathfrak{R}(f)$.

Ist $\varepsilon$ eine positive Zahl, so gibt es wegen $0 < |e| < 1$ sicher eine positive ganze Zahl $n$ mit $|e|^n < \varepsilon$. Da die Folge $n(i)$ gegen Unendlich strebt, so gibt es eine ganze Zahl $N$ mit $n < n(i)$ für alle $N < i$ erfüllenden $i$. Es folgt, daß

$$|s(\mathfrak{p})| = |e|^{n(i)} < |e|^n < \varepsilon \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{R}_i \text{ mit } N < i$$

gilt; und damit haben wir

$$|s(\mathfrak{p})| < \varepsilon \text{ für } \mathfrak{p} \text{ in } f^{-1}(0) + \bigcup_{N<i} \mathfrak{R}_i.$$

Da aber $\mathfrak{S} = \bigcup_{i=0}^{N} \mathfrak{R}_i$ als Vereinigung endlich vieler randloser und kompakter Mengen selbst randlos und kompakt ist, so ist $\mathfrak{T} - \mathfrak{S}$ eine randlose Menge, die die Nullstellen von $s$ enthält und auf der $|s| < \varepsilon$ ist. Es folgt, daß $s$ auch auf $s^{-1}(0)$ stetig ist und im Unendlichen verschwindet, daß also $s$ zu $F$ gehört.

Da aber $W$ ein maximales Ideal von $F$ ist, so wird $F$ von $W$ und $f$ aufgespannt. Folglich gibt es Funktionen $a_i$, $b_i$, $c$, $d$ in $F$, eine Zahl $k$ in $K$ und eine Funktion $w$ in $W$ derart, daß

$$s = \sum_{i=1}^{m} a_i f b_i + cf + fd + kf + w$$

ist. Wir setzen $r = s - w$. Bedenken wir, daß $f^{-1}(0) = s^{-1}(0)$ ist, so folgt, daß $f^{-1}(0) \leqq w^{-1}(0)$ und $f^{-1}(0) \leqq r^{-1}(0)$ ist. Weiter gibt es eine die Bedingungen

$$|k| \leqq M, \ \|c\| \leqq M, \ \|d\| \leqq M, \ \|a_i\| \leqq M, \ \|b_i\| \leqq M \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

erfüllende positive Zahl $M$.

Wir setzen $B = M(3 + mM)$. Da $\lim\limits_{i \to \infty} i^{-1} |e|^{-n(i)} = 0$ ist, so streben die positiven Zahlen $i|e|^{n(i)}$ gegen Unendlich. Es gibt also insbesondere eine positive ganze Zahl $h$ derart, daß

$$B < i|e|^{n(i)} \qquad \text{für } h < i$$

gilt. Damit ist

$$M_i = [i|e|^{n(i)} - B]^{-1} \qquad \text{für } h < i$$

eine wohlbestimmte positive Zahl. Da offenbar die $M_i^{-1}$ gegen Unendlich streben, so ist $\lim\limits_{i \to \infty} M_i = 0$.

Ist $h < i$ und $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{R}_i$, so wird

$$\begin{aligned} M_i^{-1} |f(\mathfrak{p})| &< [i|e|^{n(i)} - B]\, i^{-1} = |e|^{n(i)} - Bi^{-1} = |s(\mathfrak{p})| - Bi^{-1} \\ &\leqq |s(\mathfrak{p})| - \sum_{j=1}^{m} |a_j(\mathfrak{p}) f(\mathfrak{p}) b_j(\mathfrak{p})| - |c(\mathfrak{p})|\,|f(\mathfrak{p})| - |f(\mathfrak{p})|\,|d(\mathfrak{p})| - |k|\,|f(\mathfrak{p})| \\ &\leqq |w(\mathfrak{p})| \end{aligned}$$

oder $|f(\mathfrak{p})| < M_i |w(\mathfrak{p})|$ für $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{R}_i$ und $h < i$.

Es folgt nebenher noch, daß

$$f^{-1}(0) \leqq w^{-1}(0) \leqq f^{-1}(0) + \bigcup_{i=0}^{h} \mathfrak{R}_i.$$

Damit haben wir aber gezeigt, daß $w$ den Bedingungen des Hilfssatzes (H) genügt und also nicht in $W$ liegen kann. Dies widerspricht der Konstruktion von $w$; und aus diesem Widerspruch folgt die Gültigkeit unseres Satzes.

## 6. Die divisionsabgeschlossenen Teilalgebren von $F$ und ihre maximalen Ideale.

Die Teilalgebra $V$ von $F = F(K, \mathfrak{T})$ heiße *divisionsabgeschlossen*, wenn sie den folgenden zwei Bedingungen genügt:

(A) *$V$ enthält alle idempotenten Funktionen aus $F$.*

(B) *Sind $v$ und $e = e^2$ Funktionen aus $V$, so enthält das von $v$ aufgespannte Ideal aus $F$ dann und nur dann $e$, wenn $e$ bereits dem von $v$ aufgespannten Ideal aus $V$ angehört.*

Es ist klar, daß $F$ in $F$ divisionsabgeschlossen ist; und man überzeugt sich auch von der Divisionsabgeschlossenheit von $T$ in $F$.

Bedingung (A) ist offenbar mit der Forderung gleichwertig, daß alle Treppenfunktionen zu $V$ gehören, d. h. mit

$$\text{(A*)} \qquad T(K, \mathfrak{T}) \leqq V \leqq F(K, \mathfrak{T}).$$

Sind $v$ und $e = e^2$ Funktionen aus $V$, so wollen wir mit $J$ das von $v$ aufgespannte Ideal aus $V$ und mit $L$ das von $v$ aufgespannte Ideal aus $F$ bezeichnen. Es gilt dann natürlich $J \leqq L \cap V$, so daß die Zugehörigkeit von $e$ zu $J$ auch die von $e$ zu $L$ nach sich zieht. Jede Funktion aus $L$ verschwindet natürlich auf allen Nullstellen von $v$, so daß die Zugehörigkeit von $e$ zu $L$ das Verschwinden von $e$ auf allen Nullstellen von $v$ nach sich zieht. Dies ist mit

$$v^{-1}(0) \leqq e^{-1}(0) \text{ und } \mathfrak{N}(e) \leqq \mathfrak{N}(v)$$

äquivalent. — Gelten nun diese beiden letzten äquivalenten Ungleichungen, so ist $v$ auf der wegen Lemma 4. 2 randlosen und kompakten Menge $\mathfrak{N}(e)$ von 0 verschieden; und es wird durch

$$w(\mathfrak{p}) = \begin{cases} [v(\mathfrak{p})]^{-1} & \text{für } \mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{N}(e) \\ 0 & \text{für } \mathfrak{p} \text{ in } e^{-1}(0) \end{cases}$$

eine eindeutige, $K$-wertige Funktion über $\mathfrak{T}$ definiert. Diese ist stetig, verschwindet im Unendlichen und gehört also zu $F$. Weiter haben $vw$ und $wv$ überall auf $\mathfrak{N}(e)$ den Wert 1 und auf $e^{-1}(1)$ den Wert 0, woraus wir $vw = wv = e$ schließen. Also gehört $e$ dem von $v$ in $F$ aufgespannten Ideal $L$ an; aus (B) folgt dann die Zugehörigkeit von $e$ zu dem von $v$ in $V$ aufgespannten Ideal $J$. Diese Überlegungen zeigen, daß die Bedingung (B) mit folgender Eigenschaft gleichwertig ist:

(B*) *Sind $v$ und $e = e^2$ Funktionen aus $V$, ist $\mathfrak{N}(e) \leqq \mathfrak{N}(v)$, so gehört $e$ dem von $v$ in $V$ aufgespannten Ideal an.*

Die bei der Ableitung von (B*) angestellten Überlegungen zeigen auch den Grund für die Wahl des Ausdrucks „Divisionsabgeschlossenheit".

Ist $V$ eine Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ und $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$, so sei $\mathfrak{H}^V$ die Gesamtheit der die Bedingung $f(\mathfrak{H}) = 0$ erfüllenden Funktionen $f$ aus $V$. Es ist klar, daß $\mathfrak{H}^V$ stets ein Ideal aus $V$ ist.

Ist $\mathfrak{p}$ irgendein fester Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist die Abbildung der Funktion $f$ aus $V$ auf ihren Funktionswert $f(\mathfrak{p})$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ offenbar ein $K$-Homomorphismus von $V$ in $K$. Da es aber, wie schon früher bemerkt, stets idempotente Funktionen [in $V$] gibt, die auf $\mathfrak{p}$ den Wert 1 annehmen, so ist diese Abbildung ein Epimorphismus von $V$ auf $K$. Der Kern dieses Epimorphismus ist genau $\mathfrak{p}^V$, so daß jedes $\mathfrak{p}^V$ ein maximales Ideal ist, das aber nicht ganz $T$ enthalten kann. Da schließlich aus der Definition der Norm die Ungleichung

$$(6.0) \qquad |f(\mathfrak{p})| \leqq \|f\| \text{ für jeden Punkt } \mathfrak{p} \text{ und jedes } f \text{ aus } F$$

folgt, so handelt es sich um einen stetigen [sogar um einen beschränkten] Epimorphismus von $V$ auf $K$, woraus die Abgeschlossenheit der Ideale $\mathfrak{p}^V$ folgt. Da jedes Ideal

$$\mathfrak{H}^V = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{H}} \mathfrak{p}^V$$

ist, so sind auch die Ideale $\mathfrak{H}^V$ in $V$ abgeschlossen.

**Satz 6. 1:** *Dann und nur dann ist die Teilalgebra $V$ von $F(K, \mathfrak{T})$ divisionsabgeschlossen, wenn $T(K, \mathfrak{T}) \leqq V$ ist und wenn*

(B**) *ein jedes Ideal $L$ aus $V$, das in keinem Ideal $\mathfrak{p}^V$ enthalten ist, $T(K, \mathfrak{T}) \leqq L$ erfüllt.*

*Beweis.* Sei zunächst $V$ divisionsabgeschlossen. Dann müssen wir die Gültigkeit von (B**) erweisen. Sei also das Ideal $L$ aus $V$ in keinem der Ideale $\mathfrak{p}^V$ enthalten. Dann gibt

es zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ wenigstens eine $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ erfüllende Funktion $f$ in $L$. Also ist $0 < r = |f(\mathfrak{p})|$. Da $f$ stetig ist, so gibt es eine randlose und kompakte Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$ derart, daß

$$|r - |f(\mathfrak{q})|| \leqq |f(\mathfrak{p}) - f(\mathfrak{q})| < \tfrac{1}{2} r \text{ für alle } \mathfrak{q} \text{ aus } \mathfrak{U}$$

gilt. Es folgt

$$0 < \tfrac{1}{2} r < |f(\mathfrak{q})| \text{ für alle } \mathfrak{q} \text{ aus } \mathfrak{U}.$$

Da $\mathfrak{U}$ randlos und kompakt ist, so gibt es eine $\mathfrak{N}(e) = \mathfrak{U}$ erfüllende idempotente Funktion $e$ in $F$; und diese gehört wegen Bedingung (A) zu $V$. Da $f$ nirgends auf $\mathfrak{U}$ verschwindet, so ist $\mathfrak{N}(e) = \mathfrak{U} \leqq \mathfrak{N}(f)$; und wir folgern aus (B*), daß $e$ dem von $f$ in $V$ aufgespannten Ideal angehört. Da $f$ in dem Ideal $L$ liegt, so gehört $e$ auch zu $L$. Damit haben wir gezeigt:

(1) Zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ gibt es wenigstens eine $e(\mathfrak{p}) = 1$ erfüllende idempotente Funktion $e$ in $L$.

Sei weiter $\mathfrak{A}$ eine kompakte Menge. Dann gibt es zu jedem $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$ eine idempotente Funktion $e_{\mathfrak{a}}$ in $L$ mit $e_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}) = 1$. Die [wegen Lemma 4. 2] randlosen kompakten Mengen $\mathfrak{N}(e_{\mathfrak{a}})$ überdecken also die kompakte Menge $\mathfrak{A}$. Folglich tun dies sogar endlich viele unter ihnen. Damit haben wir gezeigt, daß es endlich viele idempotente Funktionen $e_i$ in $L$ mit $\mathfrak{A} \leqq \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{N}(e_i)$ gibt. Es gibt also auch ein System idempotenter Funktionen $f_i$ in $L$ mit $\mathfrak{A} \leqq \bigcup_{i=1}^{h} \mathfrak{N}(f_i)$ und minimaler Elementezahl $h$. Wäre $1 < h$, so würden wir die $h - 1$ idempotenten Funktionen

$$g_i = f_h + f_i - f_h f_i \quad i = 1, \ldots, h-1$$

bilden, die ebenfalls sämtlich in $L$ liegen. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{N}(f_h)$ oder $\mathfrak{N}(f_i)$, so wird $g_i(\mathfrak{p}) = 1$, woraus wir $\mathfrak{A} \leqq \bigcup_{i=1}^{h-1} \mathfrak{N}(g_i)$ folgern. Dies widerspricht aber der Minimalität von $h$; und damit haben wir folgendes gezeigt:

(2) Ist $\mathfrak{A}$ eine kompakte Menge, so gibt es eine $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{N}(e)$ erfüllende idempotente Funktion $e$ in $L$.

Sei nun $d$ irgendeine idempotente Funktion aus $F$. Dann gehört $d$ zu $V$ und $\mathfrak{N}(d)$ ist wegen Lemma 4. 2 eine randlose und kompakte Menge. Wegen (2) gibt es eine $\mathfrak{N}(d) \leqq \mathfrak{N}(e)$ erfüllende idempotente Funktion $e$ in $L$. Dann gehört aber auch $de$ zu dem Ideal $L$. Aus $\mathfrak{N}(d) \leqq \mathfrak{N}(e)$ und der Idempotenz von $d$ und $e$ folgt schließlich $de = d$; und damit haben wir gezeigt, daß $L$ alle idempotenten Funktionen enthält. Da $L$ ein Ideal ist, so gilt folglich $T \leqq L$.

Wir nehmen umgekehrt an, daß die Teilalgebra $V$ den Bedingungen (A*) und (B**) genügt. Um die Gültigkeit von (B*) zu zeigen, betrachten wir Funktionen $v$ und $e = e^2$ aus $V$ mit $\mathfrak{N}(e) \leqq \mathfrak{N}(v)$. Sei $L$ irgendein $v$ enthaltendes Ideal aus $V$. Angenommen $e$ gehörte nicht zu $L$. Dann gäbe es unter den Idealen aus $V$, die $L$, aber nicht $e$ enthalten, ein maximales $M$. Da $M + e$ ein von 0 verschiedenes idempotentes Element aus $V/M$ ist, das in jedem von 0 verschiedenen Ideal aus $V/M$ enthalten ist, so ist $M + e$ die Ringeins von $V/M$, und $V/M$ ist einfach, $M$ also ein maximales Ideal aus $V$. Da $e$ nicht zu $M$ gehört, folgt aus (B**) die Existenz eines Punktes $\mathfrak{r}$ mit $M \leqq \mathfrak{r}^V$. Da $M$ und $\mathfrak{r}^V$ maximale Ideale aus $V$ sind, so gilt sogar $M = \mathfrak{r}^V$. Da $v$ zu $L \leqq M = \mathfrak{r}^V$ gehört, so ist $v(\mathfrak{r}) = 0$. Da $e$ nicht zu $M = \mathfrak{r}^V$ gehört, so ist $e(\mathfrak{r}) = 1$. Dies widerspricht aber $\mathfrak{N}(e) \leqq \mathfrak{N}(v)$; und aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von $e$ zu $L$, womit die Divisionsabgeschlossenheit von $V$ dargetan ist.

**Bemerkung**: Daß Bedingung (B) nicht aus (A) folgt, zeigt etwa folgendes Beispiel. Man wähle für $T$ irgendeine unendliche, kompakte und nulldimensionale Menge reeller Zahlen, die die 0 nicht enthält, und für $K$ den Körper der reellen Zahlen mit der natürlichen Bewertung. Die Teilalgebra $V$ von $F(K, \mathfrak{T})$ entstehe dann aus $T(K, \mathfrak{T})$ durch Adjunktion der Funktion $f(x) = x$ für alle $x$ aus $\mathfrak{T}$. Dann ist $f$ eine nirgends verschwindende Funktion und das von $f$ aufgespannte Ideal in $V$ enthält nicht $T(K, \mathfrak{T})$.

**Satz 6. 2**: *Sei $V$ eine divisionsabgeschlossene Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$.*

(a) *Maximale Ideale aus $V$ lassen sich auf höchstens eine Art in der Form $\mathfrak{p}^V$ darstellen.*

(b) *Ein Ideal aus $V$ läßt sich dann und nur dann in der Form $\mathfrak{p}^V$ darstellen, wenn es $T$ nicht enthält und ein maximales Ideal aus $V$ ist.*

(c) *Jedes maximale Ideal aus $F$ läßt sich auf eine und nur eine Art in der Form $\mathfrak{p}^F$ darstellen.*

(d) *Jeder $K$-Homomorphismus von $F(K, \mathfrak{T})$ in $K$ ist beschränkt.*

*Beweis.* Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ verschiedene Punkte aus $\mathfrak{T}$, so gibt es, wie in § 3 bemerkt, eine idempotente Funktion in $F$ [und also in $V$], die in $\mathfrak{p}$, aber nicht in $\mathfrak{q}$ verschwindet, woraus $\mathfrak{p}^V \neq \mathfrak{q}^V$ folgt und die Eindeutigkeit dieser Darstellung bewiesen ist.

Daß jedes Ideal $\mathfrak{p}^V$ ein maximales Ideal aus $V$ ist und daß derartige Ideale die Teilalgebra $T$ nicht enthalten können, haben wir schon weiter oben gezeigt. Ist umgekehrt $L$ ein maximales Ideal aus $V$ und $T$ nicht in $L$ enthalten, so folgt aus Satz 6. 1 die Existenz eines die Bedingung $L \leqq \mathfrak{p}^V$ erfüllenden Punktes $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{T}$; und aus der Maximalität von $L$ und $\mathfrak{p}^V$ folgt sogar $L = \mathfrak{p}^V$, womit auch (b) bewiesen ist.

Ist schließlich $M$ ein maximales Ideal aus $F$, so ergibt sich aus Satz 5. 1, daß das Treppenideal $J$ nicht in $M$ enthalten ist. Da aber $J$ in $F$ durch $T$ aufgespannt wird und da $J$ und $M$ Ideale aus $F$ sind, so ist sogar $T$ nicht in $M$ enthalten; und jetzt folgt (c) aus (a) und (b) [wenn wir noch bedenken, daß $F$ in $F$ divisionsabgeschlossen ist].

Ist schließlich $\sigma$ ein $K$-Homomorphismus von $F(K, \mathfrak{T})$ in $K$, so ist entweder $\sigma = 0$ [und dann sicherlich beschränkt] oder aber $\sigma$ ist ein Epimorphismus auf $K$, dessen Kern $M$ dann ein maximales Ideal in $F$ ist. Aus (c) folgern wir $M = \mathfrak{p}^F$. Ist $\tau$ der Epimorphismus von $F$ auf $K$, der jede Funktion $f$ aus $F$ auf ihren Funktionswert $f(\mathfrak{p})$ an der Stelle $\mathfrak{p}$ abbildet, so ist $\tau$ ein beschränkter Epimorphismus mit Kern $\mathfrak{p}^F = M$. Da $\sigma$ und $\tau$ denselben Kern haben, so ist $\sigma = \tau$ ein beschränkter Homomorphismus, womit auch (d) bewiesen ist.

**Bemerkung**: Aus Satz 6. 2, (c) folgt insbesondere, daß $F/M \cong K$ für alle maximalen Ideale $M$ aus $F$ gilt. Die Frage, für welche $K$-Algebren, insonderheit für welche Funktionenalgebren über $K$, diese Aussage richtig bleibt, ist in letzter Zeit vielfach untersucht worden; es sei hier besonders auf die Arbeiten von Correl-Henriksen, Goldhaber-Wolk, Kaplansky und Kowalsky hingewiesen. Auch die für uns hier wichtige Frage, für welche der Algebren $V$ zwischen $T$ und $F$ die Aussage (c) des Satzes 6. 2 bzw. der Satz 5. 1 gültig bleibt, scheint noch unerledigt zu sein.

**Satz 6. 3**: *Ist $V$ eine $T(K, \mathfrak{T})$ enthaltende Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$, so gehört der Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ dann und nur dann zur abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ der Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{T}$, wenn $\mathfrak{M}^V \leqq \mathfrak{p}^V$ ist.*

*Beweis*: Liegt $\mathfrak{p}$ in $\overline{\mathfrak{M}}$, so folgt aus der Stetigkeit der Funktionen aus $V$, daß $f(\mathfrak{M}) = 0$ auch $f(\mathfrak{p}) = 0$ nach sich zieht, daß also $\mathfrak{M}^V \leqq \mathfrak{p}^V$ ist. Liegt aber $\mathfrak{p}$ nicht in $\overline{\mathfrak{M}}$, so folgern wir aus (1. 1) [und der Kompaktheit einpunktiger Mengen] die Existenz einer in der Umgebung $\mathfrak{T} - \overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{p}$ enthaltenen randlosen und kompakten Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$.

Es gibt dann eine idempotente Funktion $e$ in $F$ [und also auch in $V$] mit $\mathfrak{N}(e) = \mathfrak{U}$. Dann ist $e(\mathfrak{p}) = 1$ und $e(\mathfrak{T} - \mathfrak{U}) = 0$. Da aber $\mathfrak{M} \leqq \mathfrak{T} - \mathfrak{U}$ ist, so gehört $e$ zu $\mathfrak{M}^V$, ohne zu $\mathfrak{p}^V$ zu gehören, so daß also $\mathfrak{M}^V \not\leqq \mathfrak{p}^V$ ist.

**Folgerung 6. 4**: Bedenken wir, daß alle $\mathfrak{p}^V$ maximale Ideale sind, die $T$ nicht enthalten, so zeigen die Sätze 6. 2 und 6. 3, daß die Abbildung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^V$ eine topologische Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf den Strukturraum der $T$ nicht enthaltenden maximalen Ideale aus $V$ ist. Hieraus folgt insbesondere, daß *sich eine K-Algebra im wesentlichen auf höchstens eine Art in der Form $F(K, \mathfrak{T})$ darstellen läßt.*

## 7. Vorbemerkungen über normierte Algebren.

Ist $K$ ein bewerteter Körper und $A$ eine $K$-Algebra, so werde das Produkt eines Elements $k$ in $K$ und eines Elements $a$ in $A$ mit $ka$ bezeichnet. Die Ideale aus $A$ sind, wie schon früher bemerkt, die die Bedingungen $L = L + L = L - L = KL$ und $AL + LA \leqq L$ erfüllenden nichtleeren Teilmengen $L$ von $A$.

Die $K$-Algebra $A$ heiße normiert, wenn jedem Element $a$ aus $A$ eine nicht negative reelle Zahl $\| a \|$, die Norm von $a$, derart zugeordnet ist, daß die folgenden Regeln gelten:

1. $\| a \| = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$ ist; aus $a \neq 0$ folgt $0 < \| a \|$.
2. $\| a + b \| \leqq \| a \| + \| b \|$ und $\| ab \| \leqq \| a \| \, \| b \|$ für $a, b$ aus $A$.
3. $\| ka \| = | k | \, \| a \|$ für $k$ aus $K$ und $a$ aus $A$.
4. $\| a^n \| = \| a \|^n$ für $a$ aus $A$ und positives ganzzahliges $n$.

Diese Regeln 1. bis 4. werden durch die Resultate des § 3 gerechtfertigt. Darauf sei insbesondere wegen der ungebräuchlichen Regel 4, der Potenzregel, hingewiesen.

Aus 1. bis 4. folgert man weiter

5. $\| a \| = \| - a \|$ für $a$ aus $A$.
6. Ist $e = e^2 \neq 0$, so ist $\| e \| = 1$.
7. $| \| a \| - \| b \| | \leqq \| a - b \|$ für $a, b$ aus $A$.

Die [$K$-]Homomorphismen der normierten $K$-Algebra $A$ in die normierte $K$-Algebra $B$ werden in üblicher Weise definiert. Der [$K$-]Homomorphismus $\sigma$ von $A$ in $B$ heiße beschränkt, wenn es eine $\| x^\sigma \| \leqq r \| x \|$ für alle $x$ aus $A$ erfüllende positive Zahl $r$ gibt. Es ist klar, daß die beschränkten Homomorphismen auch stetig sind; aber die Umkehrung ist falsch, wie das folgende einfache Beispiel zeigt: Es sei $K$ ein kommutativer Körper mit der trivialen Bewertung $| 0 | = 0$ und $| k | = 1$ für $k \neq 0$; und $A$ sei der Ring $K[t]$ der Polynome über $K$ in einer Unbestimmten $t$. Dann ist $A$ eine $K$-Algebra. Wir setzen $\| 0 \| = 0$ und $\| \sum_{i=h}^{n} a_i t^i \| = 2^{-h}$, wenn $a_h \neq 0$ und $h \leqq n$ ist. Diese Normfunktion genügt allen unseren Anforderungen. Weiter sei $B$ die normierte Teilalgebra $K[t^2]$ von $A$ und $\sigma$ der durch $\left[\sum_{i=h}^{n} a_i t^{2i}\right]^\sigma = \sum_{i=h}^{n} a_i t^i$ definierte Isomorphismus von $B$ auf $A$. Für jedes $b$ aus $B$ mit $\| b \| \neq 0, 1$ gilt dann $\| b \|^2 < \| b \| = \| b^\sigma \|^2$, da ja für diese Elemente $0 < \| b \| < 1$ gilt. Also wird für diese Elemente auch $\| b \| < \| b^\sigma \|$. Mithin ist $\sigma$ stetig; daß aber $\sigma$ nicht beschränkt sein kann, folgt z. B. aus dem folgenden Hilfssatz (7. 1), der zeigt, daß beschränkte Homomorphismen noch eine schärfere Bedingung erfüllen.

(7. 1) *Der Homomorphismus $\sigma$ der normierten K-Algebra $A$ in die normierte K-Algebra $B$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn $\| x^\sigma \| \leqq \| x \|$ für alle $x$ aus $A$ gilt.*

*Beweis.* Es genügt, die Notwendigkeit unserer Bedingung zu beweisen. Ist also $r$ eine positive Zahl derart, daß $\| x^\sigma \| \leqq r \| x \|$ für alle $x$ aus $A$ gilt, so folgern wir aus Regel 4, daß

$$\| x^\sigma \|^n = \| x^{\sigma n} \| = \| x^{n\sigma} \| \leqq r \| x^n \| = r \| x \|^n \text{ für alle } x \text{ aus } A$$

und alle positiven ganzen Zahlen $n$ gilt. Dann gilt aber auch

$$\| x^\sigma \| \leqq r^{\frac{1}{n}} \| x \| \text{ für alle } x \text{ aus } A$$

und alle positiven ganzen Zahlen $n$. Da aber $\lim\limits_{n \to \infty} r^{\frac{1}{n}} = 1$ ist, so gilt auch $\| x^\sigma \| \leqq \| x \|$ für alle $x$ aus $A$.

Es sei bemerkt, daß beim Beweise von (7. 1) die Potenzregel 4 nur in $B$, nicht aber in $A$, benötigt wurde.

Aus (7. 1) folgt neben anderem, daß Automorphismen, die zugleich mit ihren Inversen beschränkt sind, die Norm erhalten.

Das oben angegebene Beispiel dafür, daß stetige Homomorphismen nicht beschränkt zu sein brauchen, war insofern nicht sehr interessant, als die Bewertung des Körpers $K$ trivial war, nur die Werte 0 und 1 annahm. Dies liegt aber in der Natur der Sache, wie aus dem folgenden Resultat hervorgeht, das wir mit seinem Beweise Herrn Dr. V. Baumann verdanken.

(7. 1*) *Gibt es in $K$ eine Zahl $k$, deren Wert $| k |$ von 0 und 1 verschieden ist, so folgt aus der Stetigkeit eines Homomorphismus seine Beschränktheit.*

*Beweis*: Wäre dies nicht wahr, so gäbe es einen stetigen, aber nicht beschränkten Homomorphismus $\sigma$ der normierten $K$-Algebra $A$ in die normierte $K$-Algebra $B$. Da $| k |$ von 0 und 1 verschieden ist, so können wir o. B. d. A. annehmen, daß $1 < | k | = r$ ist. Da $\sigma$ nicht beschränkt ist, so existiert zu jeder positiven ganzen Zahl $n$ ein Element $x_n \neq 0$ in $A$ derart, daß $r^n \| x_n \| < \| x_n^\sigma \|$ ist. Da $r^i$ mit wachsendem $i$ gegen Unendlich strebt, so gibt es zu jedem $n$ eine ganze Zahl $n^*$ derart, daß $r^{n^*} \leqq \| x_n \| < r^{n^*+1}$ gilt. Setzen wir $y_n = k^{-(n+n^*+1)} x_n$, so wird

$$r^n \| y_n \| = r^{-(n^*+1)} \| x_n \| < r^{-(n+n^*+1)} \| x_n^\sigma \| = \| y_n^\sigma \|,$$
$$r^{-(n+1)} \leqq \| y_n \| < r^{-n}.$$

Daraus folgt aber, daß einerseits $y_n$ eine Nullfolge ist, während andererseits stets

$$0 < r^{-1} < \| y_n^\sigma \|$$

gilt, so daß also die Bildfolge der Nullfolge $y_n$ keine Nullfolge ist, was der Stetigkeit des Homomorphismus $\sigma$ widerspricht.

(7. 1**) *Jeder stetige Homomorphismus einer normierten $K$-Algebra $A$ in den Körper $K$ ist beschränkt.*

*Beweis*: Enthält $K$ eine Zahl $k$, deren Wert $| k |$ von 0 und 1 verschieden ist, so folgt unsere Behauptung sofort aus (7. 1*). Gilt aber $| x | = 1$ für jedes $x \neq 0$ aus $K$, ist $\sigma$ ein stetiger Homomorphismus von $A$ in $K$ und $w$ ein $\| w \| < 1$ erfüllendes Element aus $A$, so ist $\| w^n \| = \| w \|^n$ wegen der Potenzregel 4. Die Folge $w^n$ ist also eine Nullfolge aus $A$, die von dem stetigen Homomorphismus $\sigma$ auf die Nullfolge $(w^n)^\sigma = (w^\sigma)^n$ abgebildet wird. Da aber die von 0 verschiedenen Zahlen aus $K$ sämtlich den Wert 1 haben, so müssen fast alle Glieder einer Nullfolge aus $K$ gleich 0 sein. Daraus folgt aber $w^\sigma = 0$. Mithin gilt $0 = | w^\sigma | \leqq \| w \|$, wenn $\| w \| < 1$ ist. Ist aber $1 \leqq \| w \|$, so wird $| w^\sigma | = 0$ oder 1; und es gilt wieder $| w^\sigma | \leqq \| w \|$, womit die Beschränktheit von $\sigma$ dargetan ist.

Ist $\sigma$ ein Homomorphismus der $K$-Algebra $A$ in $K$, so ist entweder $\sigma = 0$ oder $\sigma$ ist ein Epimorphismus. Im letzteren Falle überlegt man sich, daß der Kern $K(\sigma)$ von $\sigma$ ein maximales Ideal ist, daß $A/K(\sigma)$ als zu $K$ isomorpher Körper eine und nur eine 1 besitzt, die von $\sigma$ auf die 1 aus $K$ abgebildet wird, und daß also $\sigma$ völlig durch seinen Kern bestimmt ist, da ja, wenn $K(\sigma) + e$ die Eins von $A/K(\sigma)$ ist, das allgemeinste Element des Körpers $A/K(\sigma)$ notwendig die Form $k[K(\sigma) + e] = K(\sigma) + ke$ hat, da ja die entsprechende Regel in $K$ gilt.

Ist $a$ ein Element aus der normierten $K$-Algebra $A$ und $\sigma$ ein stetiger Homomorphismus von $A$ in $K$, so gilt $|a^\sigma| \leqq \|a\|$ wegen (7. 1) und (7. 1**). Diese Zahlen $|a^\sigma|$ sind also für jedes feste $a$ beschränkt, und wir können die kleinste obere Schranke $\hat{a}$ aller $|a^\sigma|$ bilden, wobei $\sigma$ alle stetigen Homomorphismen von $A$ in $K$ durchläuft. Diese nicht-negative Zahl $\hat{a}$ möge auch *die natürliche Norm von a* genannt werden. Sie genügt der Ungleichung

$$(*) \qquad \hat{a} \leqq \|a\| \text{ für jedes } a \text{ aus } A.$$

Wir werden später in den uns interessierenden Fällen sogar die Gleichheit zeigen können.

(7. 2) *Liegen die $\hat{a} = \|a\|$ erfüllenden Elemente aus $A$ überall dicht in $A$, so ist* 0 *der Durchschnitt der Kerne aller stetigen Epimorphismen von $A$ auf $K$.*

*Beweis*: Sei $d \neq 0$ ein Element aus dem Durchschnitt der Kerne aller stetigen Homomorphismen von $A$ in $K$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein die Bedingungen

$$\hat{a} = \|a\| \text{ und } \|a - d\| < \tfrac{1}{2}\|d\|$$

erfüllendes Element $a$ in $A$, da ja $0 < \|d\|$ gilt. Ist nun $\sigma$ irgendein stetiger Homomorphismus von $A$ in $K$, so wird

$$|a^\sigma| = |(a-d)^\sigma| \leqq \|a - d\| < \tfrac{1}{2}\|d\|$$

wegen (7. 1) und (7. 1**). Es folgt, daß

$$\|a\| = \hat{a} \leqq \tfrac{1}{2}\|d\|$$

ist. Dann wird aber wegen Regel 7

$$\tfrac{1}{2}\|d\| \leqq \|d\| - \|a\| \leqq \|d - a\| < \tfrac{1}{2}\|d\|;$$

und aus diesem Widerspruch ergibt sich (7. 2).

## 8. Die charakteristischen Eigenschaften.

Wir betrachten im folgenden einen bewerteten Körper $K$ und eine normierte $K$-Algebra $A$ im Sinne des § 7, die darüber hinaus noch den folgenden Bedingungen genügen möge.

I. *Jedes maximale Ideal aus $A$ ist Kern eines stetigen Epimorphismus auf $K$.*

II. *Die von den idempotenten Elementen aus $A$ aufgespannte Teilalgebra $T = T(A)$ ist dicht in $A$.*

III. *Die Folge $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ von Elementen aus $A$ konvergiert gegen ein Element aus $A$, wenn*

(a) *die Folge der $a_i$ [bezüglich der Norm] eine Cauchysche Folge aus $A$ ist und*

(b) *für jeden stetigen Epimorphismus $\sigma$ von $A$ auf $K$ die Folge der $a_i^\sigma$ in $K$ gegen einen Grenzwert aus $K$ konvergiert.*

Aus I folgt sofort die schwächere, für unsere Zwecke aber ausreichende Bedingung

I*. *Jedes maximale Ideal aus $A$, das nicht alle idempotenten Elemente enthält, ist Kern eines stetigen Epimorphismus von $A$ auf $K$.*

Es wird sich später sogar erweisen, daß I eine Folge von I*, II und III ist.

Aus (7. 1**) folgt, daß die in I und I* postulierte Stetigkeit von Epimorphismen sogar deren Beschränktheit nach sich zieht. [Den Hinweis auf die Möglichkeit, I und I* in der gegenwärtigen schwachen Form zu postulieren, verdanke ich Herrn Dr. V. Baumann.]

Im Gegensatz zu den fast ständig benutzten Eigenschaften I* und II werden wir III nur am Schluß unserer Überlegungen benutzen. Die Eigenschaft III werde als $K$-Vollständigkeit bezeichnet. Es sei bemerkt, daß für jede Cauchysche Folge $a_i$ aus $A$ und jeden beschränkten Epimorphismus $\sigma$ von $A$ auf $K$ die Elemente $a_i^\sigma$ eine Cauchysche Folge aus $K$ bilden. Wäre, was wir aber nicht voraussetzen, der bewertete Körper $K$ vollständig, so folgte (b) aus (a). Natürlich sind die Bedingungen (a) und (b) für die Existenz des Grenzwerts notwendig.

**Satz 8. 1:** *Ist $K$ ein bewerteter Körper, $\mathfrak{T}$ ein lokal-kompakter, null-dimensionaler topologischer Raum und $F(K, \mathfrak{T})$ die [im § 3 eingeführte] normierte $K$-Algebra der im Unendlichen verschwindenden stetigen $K$-wertigen Funktionen über $\mathfrak{T}$, so genügt $F(K, \mathfrak{T})$ den Bedingungen* I *bis* III.

*Beweis*: Daß $F = F(K, \mathfrak{T})$ eine normierte $K$-Algebra im Sinne des § 7 ist, haben wir schon erwähnt. Ist $M$ ein maximales Ideal aus $F$, so folgt aus Satz 6. 2, daß $M = \mathfrak{p}^F$ für einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ ist und daß also $M$ der Kern des stetigen $K$-Homomorphismus von $F$ auf $K$ ist, der das Element $f$ aus $F$ auf die Zahl $f(\mathfrak{p})$ aus $K$ abbildet; vgl. (6. 0). Damit haben wir schon I verifiziert. Die Gültigkeit von II ergibt sich durch Kombination von Satz 4. 1 und Zusatz 4. 3.

Schließlich sei uns eine Cauchysche Folge $a_i$ aus $F$ gegeben, die noch die weitere Eigenschaft hat, daß für jeden stetigen Epimorphismus $\sigma$ von $F$ auf $K$ die Folge der $a_i^\sigma$ gegen einen Grenzwert aus $K$ konvergiert. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist die Abbildung von $f$ aus $F$ auf $f(\mathfrak{p})$ ein solcher stetiger Epimorphismus. Also existiert der Grenzwert der Folge $a_i(\mathfrak{p})$ für jeden festen Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$. Wir wollen diesen Grenzwert mit $a(\mathfrak{p})$ bezeichnen. Dann ist $a$ eine eindeutige, $K$-wertige Funktion über $\mathfrak{T}$; und diese Funktion $a$ ist der Grenzwert der Funktionen $a_i$. Die Konvergenz ist wegen

$$|a_i(\mathfrak{p}) - a_j(\mathfrak{p})| \leqq \| a_i - a_j \|$$

gleichmäßig; und hieraus folgern wir die Stetigkeit und das Verschwinden im Unendlichen von $a$, d. h. die Zugehörigkeit von $a$ zu $F$ wie auch $a = \lim\limits_{i \to \infty} a_i$.

Wir werden in den nächsten Paragraphen zeigen, daß umgekehrt auch alle $K$-Algebren mit den Eigenschaften I bis III sich in der Form $F(K, \mathfrak{T})$ darstellen lassen.

**Zusatz 8. 2:** *Jede divisionsabgeschlossene Teilalgebra $V$ von $F(K, \mathfrak{T})$ genügt den Bedingungen* I* *und* II.

*Beweis*: Es ist eine Folge von Satz 6. 2, (b), daß jedes nicht alle idempotenten Elemente enthaltende maximale Ideal aus $V$ die Form $\mathfrak{p}^V$ [für einen eindeutig bestimmten Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$] hat; und diese Ideale sind, wie schon mehrfach bemerkt, Kerne stetiger $K$-Epimorphismen von $V$ auf $\mathfrak{T}$. Also gilt I*. Da $T(K, \mathfrak{T}) \leqq V \leqq F(K, \mathfrak{T})$ ist und da $T$ wegen Satz 4. 1 und Zusatz 4. 3 in $F$ dicht ist, so ist $T$ auch in $V$ dicht, womit auch II verifiziert ist.

Wir werden umgekehrt in den nächsten Paragraphen zeigen, daß jede $K$-Algebra mit den Eigenschaften I* und II eine divisionsabgeschlossene Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ für geeignetes $\mathfrak{T}$ ist.

## 9. Die idempotenten Elemente.

Wir werden in diesem [und in den beiden folgenden] Paragraphen eine normierte $K$-Algebra $A$ [im Sinne des § 7] mit den Eigenschaften I* und II [des § 8] betrachten; und wir werden diese Voraussetzungen von jetzt ab stillschweigend machen.

(9. 1) *Die idempotenten Elemente aus $A$ liegen im Zentrum von $A$.*

*Beweis*: Sei $e = e^2$ und $x$ ein beliebiges Element aus $A$. Dann ist $(xe - exe)^2 = 0$ und hieraus folgt wegen Regel 4 des § 7, daß $\| xe - exe \|^2 = 0$ ist. Also ist auch $\| xe - exe \| = 0$; und hieraus folgt $xe - exe = 0$. Ebenso sieht man $ex - exe = 0$ ein, und damit ist $xe = ex$ dargetan, woraus die Zugehörigkeit der idempotenten Elemente zum Zentrum von $A$ folgt.

Diese Bemerkung (9. 1) geht auf Drazin zurück.

Unter $T = T(A)$ wollen wir die von den idempotenten Elementen aus $A$ aufgespannte Teilalgebra von $A$ verstehen.

(9. 2) *Jedes Element $t$ aus $T$ läßt sich in der Form $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$ mit $k_i$ in $K$ und $e_i e_j = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für } i \neq j \\ e_i & \text{für } i = j \end{Bmatrix}$ darstellen.*

*Beweis*: Unter Benutzung von (9. 1) sieht man leicht, daß es zu jedem Element $t$ aus $T$ idempotente Elemente $t_i$ und Zahlen $k_i$ aus $K$ mit $t = \sum_{i=1}^{m} k_i t_i$ gibt. Ist $m = 1$, so ist $t$ bereits in der von (9. 2) geforderten Normalform. Wir können also die Induktionsannahme machen, daß sich Elemente aus $T$ auf Normalform bringen lassen, wenn sie sich aus weniger als $m$ idempotenten Elementen linear kombinieren lassen. Hieraus folgt die Existenz von paarweise orthogonalen idempotenten Elementen $e_i$ und Zahlen $h_i$ aus $K$ derart, daß

$$\sum_{i=1}^{m-1} k_i t_i = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$$

ist. Setzen wir weiter $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$, so ist $e$ idempotentes Element und es gilt $ee_i = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Setzen wir jetzt $f = t_m - et_m$ und $e_i' = e_i - e_i t_m$, $e_i'' = e_i t_m$, so überzeugt man sich leicht davon, daß die Elemente $f, e_i', e_i''$ für $i = 1, \ldots, n$ paarweise orthogonal und idempotent sind — man berücksichtige dabei die aus (9. 1) folgende Vertauschbarkeit idempotenter Elemente — und daß

$$t = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i + k_m t_m = k_m f + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i' + \sum_{i=1}^{n} (k_m + h_i)\, e_i''$$

gilt, womit der induktive Beweis von (9. 2) vollständig geführt ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß man die $k_i$ paarweise verschieden und die $e_i \neq 0$ wählen kann.

(9. 3) *$T$ ist in keinem Kern eines stetigen Epimorphismus von $A$ auf $K$ enthalten.*

*Beweis*: Ist $M$ der Kern des stetigen Epimorphismus $\sigma$ von $A$ auf $K$, so ist $A/M$ ein Körper, der eine Körpereins $M + a$ besitzt. Wegen II ist $T$ dicht in $A$. Folglich gibt es ein $\| a - t \| < \frac{1}{2}$ erfüllendes Element $t$ in $T$. Wegen (7. 1), (7. 1**) und der Stetigkeit von $\sigma$ gilt

$$1 = | b^\sigma | \leqq \| b \| \text{ für alle } b \text{ aus } M + a.$$

Wäre $t$ in $M$ enthalten, so läge $a - t$ in $M + a$; und wir könnten aus obiger Ungleichung den Widerspruch

$$1 = |(a-t)^\sigma| \leqq \|a - t\| < \tfrac{1}{2}$$

erschließen. Also liegt $t$ nicht in $M$, so daß auch $T \not\leqq M$ gilt.

(9. 4) *Enthält keines der maximalen Ideale $M$ und $N$ alle idempotenten Elemente aus $A$, ist aber jedes in $M$ enthaltene idempotente Element auch in $N$ enthalten, so ist $M = N$.*

*Beweis*: Wäre dies nicht wahr, so wäre insbesondere $M \not\leqq N$ und es gäbe also ein nicht in $N$ enthaltenes Element $a$ in $M$. Da $A/N$ wegen I* ein im wesentlichen mit $K$ identischer Körper ist, so folgt aus $N + a \neq 0$ die Existenz einer Zahl $k$ aus $K$ derart, daß $k(N + a)$ die Eins des Körpers $A/N$ ist. Wir setzen $ka = b$ und bemerken, daß $M + b = 0$ und $N + b = 1$ ist.

Aus II folgt die Existenz eines $\|t - b\| < \frac{1}{2}$ erfüllenden Elements $t$ in $T$. Wegen (9. 2) gibt es Zahlen $k_i \neq 0$ in $K$ und paarweise orthogonale idempotente Elemente $e_i$ in $A$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$. Wäre $t$ in $N$ enthalten, so wäre $1 = N + (t - b)$. Wegen I* gibt es eine stetige epimorphe Abbildung $\sigma$ von $A$ auf $K$ mit Kern $N$, bei der natürlich 1 in 1 übergeht. Also wird wegen (7. 1) und (7. 1**)

$$1 = |(t-b)^\sigma| \leqq \|t - b\| < \tfrac{1}{2};$$

und dies ist unmöglich. Da mithin $t$ nicht in $N$ liegt, so ist wenigstens eines der $e_i$ nicht in $N$ enthalten. Wir setzen dieses $e_i = e$ und entsprechend $k_i = h$. Da $e$ nicht in $N$ liegt, so folgt aus unserer Voraussetzung, daß $e$ auch nicht in $M$ liegt. Da $A/M$ und $A/N$ wegen I* Körper sind, so wird $M + e = 1$ und $N + e = 1$. Da $e \neq 0$ ist, und da $\|e\| = \|e^2\| = \|e\|^2$ aus § 7, 4 folgt, so wird $\|e\| = 1$. Schließlich ist $e = ee_i$ und $ee_j = 0$ für $i \neq j$. Aus all diesem folgt

$$\|be - he\| = \|be - e\sum_{j=1}^{n} k_j e_j\| = \|e(b - t)\| \leqq \|e\|\,\|b - t\| < \tfrac{1}{2}.$$

Bedenken wir weiter, daß $N + b = 1 = N + e$ ist, so wird $N + (1 - h)\,e = N + be - he$ und also

$$|1 - h| = |[(1-h)\,e]^\sigma| = |(be - he)^\sigma| \leqq \|be - he\| < \tfrac{1}{2}.$$

Bezeichnen wir andererseits mit $\tau$ den nach I* existierenden stetigen Epimorphismus von $A$ auf $K$, dessen Kern $M$ ist, so folgt aus $M + b = 0$ und $M + e = 1$ entsprechend

$$|h| = |-h| = |(-he)^\tau| = |(be - he)^\tau| \leqq \|be - he\| < \tfrac{1}{2}.$$

Kombination dieser beiden Ungleichungen ergibt dann den gesuchten Widerspruch

$$1 = |1 - h + h| \leqq |1 - h| + |h| < 1,$$

aus dem wir $M = N$ erschließen.

Wir können (9. 4) etwas symmetrischer auch folgendermaßen formulieren:

(9. 4*) *Sind $M$ und $N$ zwei verschiedene maximale Ideale aus $A$, die beide $T$ nicht enthalten, so gibt es ein in $M$, aber nicht in $N$ enthaltenes idempotentes Element.*

Wir wenden uns schließlich der Berechnung der Normen der Elemente aus $T$ zu. Diese beruht wesentlich auf der folgenden teilweisen Nicht-Archimedizität der Norm.

(9. 5) *Sind $a$ und $b$ Elemente aus $A$, und gilt $ab = ba = 0$, so ist*

$$\|a + b\| = \max[\|a\|, \|b\|].$$

*Beweis*: Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $0 < \| a \| \leqq \| b \|$ ist. Dann wird wegen § 7, 4 und nach Voraussetzung

$$\| b \|^2 = \| b^2 \| = \| b(a+b) \| \leqq \| b \| \, \| a + b \|,$$

woraus $\| b \| \leqq \| a + b \|$ folgt. Weiter gilt nach Voraussetzung und § 7, 4

$$\| a + b \|^n = \| (a+b)^n \| = \| a^n + b^n \| \leqq \| a^n \| + \| b^n \| \leqq 2 \| b^n \| = 2 \| b \|^n;$$

und hieraus folgt

$$\| a + b \| \leqq 2^{n^{-1}} \| b \| \text{ für jedes positive ganze } n,$$

woraus sich natürlich $\| a + b \| \leqq \| b \|$ ergibt. Damit ist $\| a + b \| = \| b \|$ und also unsere Behauptung bewiesen.

Man bemerke, daß beim Beweis von (9. 5) von den Bedingungen I*, II kein Gebrauch gemacht wurde.

(9. 6) $\hat{t} = \| t \|$ *für alle* $t$ *aus* $T$.

*Beweis*: Da für $t = 0$ nichts zu beweisen ist, so können wir gleich ein Element $t \neq 0$ aus $T$ betrachten. Aus (9. 2) folgern wir dann die Existenz paarweise orthogonaler idempotenter Elemente $e_i \neq 0$ aus $A$ und von Zahlen $k_i \neq 0$ aus $K$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$. Aus (9. 5) ergibt sich durch eine naheliegende vollständige Induktion, daß $\| t \| = \max [|k_1|, \ldots, |k_n|]$ ist.

Sei $\sigma$ irgendein stetiger Homomorphismus von $A$ in $K$. Dann sind die $e_i^\sigma$ paarweise orthogonale idempotente Elemente aus dem Körper $K$; und von diesen kann höchstens eines von 0 verschieden sein. Aus $e_i^\sigma \neq 0$ folgt natürlich dann $e_i^\sigma = 1$. Entweder sind also alle $e_i^\sigma = 0$ und dann ist auch $t^\sigma = 0$; oder aber es gibt einen und nur einen Index $j$ mit $e_j^\sigma \neq 0$, und dann wird $t^\sigma = k_i$.

Da $e_i$ wegen (9. 1) im Zentrum von $K$ liegt, so ist die Gesamtheit der $e_i x = 0$ erfüllenden Elemente $x$ aus $A$ ein Ideal $J$ aus $A$, das $e_i$ nicht enthält. Ebenso ist die Menge $e_i A$ ein Ideal aus $A$, das $e_i$ enthält. Schließlich ergibt sich aus $x = (x - e_i x) + e_i x$ die direkte Zerlegung $A = J \oplus e_i A$. Da das Ideal $J$ das Element $e_i$ nicht enthält, so gibt es unter den $J$, aber nicht $e_i$ enthaltenden Idealen ein maximales Ideal $M$. Aus $A = J \oplus e_i A$ folgt dann sofort, daß $M$ ein maximales Ideal aus $A$ ist. Dieses ist wegen I* Kern eines stetigen Epimorphismus $\nu$ von $A$ auf $K$. Aus dem im vorigen Absatz bewiesenen Resultat folgt $t^\nu = k_i$.

Durch Kombination der Resultate der beiden letzten Absätze erhalten wir, daß die Zahl $k \neq 0$ aus $K$ dann und nur dann das Bild von $t$ bei einem stetigen Homomorphismus von $A$ in $K$ ist, wenn $k$ eine der Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ ist. Aus der Definition der natürlichen Norm folgt also $\hat{t} = \max [|k_1|, \ldots, |k_n|]$; und hieraus ergibt sich $\hat{t} = \| t \|$ wegen des im ersten Absatz Bewiesenen.

Man bemerke, daß beim Beweise von (9. 6) die Bedingungen II [und III] überhaupt nicht benutzt wurden, während I* in der schwächeren Form I** angewandt wurde:

I**. *Jedes maximale, $T(A)$ nicht enthaltende Ideal aus $A$ ist Kern eines Homomorphismus von $A$ auf $K$.*

(9. 7) *Der Durchschnitt der $T$ nicht enthaltenden maximalen Ideale aus $A$ ist* 0.

*Beweis*: Aus (9. 6) und II folgt nämlich, daß die Voraussetzungen von (7. 2) erfüllt sind. Da aber die Kerne stetiger Epimorphismen von $A$ auf $K$ wegen (9. 3) notwendig maximale Ideale aus $A$ sind, die $T$ nicht enthalten, so ist der Durchschnitt der maximalen Ideale gleich 0.

## 10. Der Raum der maximalen Ideale.

Die Resultate des § 6 legen es nahe, den sog. Strukturraum der Algebra $A$ in unsere Betrachtungen einzubeziehen. Wir erklären ihn folgendermaßen:

Es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(A)$ die Gesamtheit der $T$ nicht enthaltenden maximalen Ideale aus $A$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$ [d. h. ein $T$ nicht enthaltendes maximales Ideal aus $A$] und $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$, so gehört $\mathfrak{p}$ dann und nur dann zur abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$, wenn $\bigcap_{\mathfrak{r} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{p} \leqq \mathfrak{p}$ ist.

Es ist wohlbekannt [siehe etwa Jacobson, p. 204] und leicht nachzuprüfen, daß $\mathfrak{T}$ mit dieser Topologie ein topologischer Raum ist, dessen Punkte abgeschlossene Mengen bilden, da ja $A/\mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ ein Körper ist.

Ist $a$ irgendein Element aus $A$, so definieren wir in naheliegender Analogie zu entsprechenden Begriffsbildungen aus dem ersten Teil unserer Überlegungen $a^{-1}(0)$ als die Gesamtheit der $a$ enthaltenden Elemente aus $\mathfrak{T}$. Es ist klar, daß $a^{-1}(0)$ eine abgeschlossene Menge in $\mathfrak{T}$ ist. Weiter sei $\mathfrak{N}(a) = \mathfrak{T} - a^{-1}(0)$; und natürlich ist $\mathfrak{N}(a)$ offen.

**Hilfssatz 10. 1:** *Ist $e$ ein idempotentes Element aus $A$, so liegt der Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ dann und nur dann in $\mathfrak{N}(e)$, wenn $\mathfrak{p}$ alle Elemente der Form $x - xe$ mit $x$ aus $A$ enthält.*

*Beweis*: Liegt das idempotente Element $e$ nicht in dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$, so ist $\mathfrak{p} + e$ die Eins des Körpers $A/\mathfrak{p}$. Also ist $x \equiv xe$ modulo $\mathfrak{p}$ für alle $x$ aus $A$; und damit haben wir gezeigt, daß jedes $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{N}(e)$ alle Elemente $x - xe$ mit $x$ aus $A$ enthält. — Liege weiter das Element $e$ in $\mathfrak{p}$. Es gibt wenigstens ein nicht in dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$ enthaltenes Element $w$ aus $A$. Da $we$ mit $e$ zu $\mathfrak{p}$ gehört, so kann $w - we$ nicht zu $\mathfrak{p}$ gehören; und damit haben wir gezeigt, daß Punkte $\mathfrak{p}$ nicht alle Elemente $x - xe$ enthalten, wenn sie nicht zu $\mathfrak{N}(e)$ gehören.

**Lemma 10. 2:** *Ist $e$ ein idempotentes Element aus $A$, so ist $\mathfrak{N}(e)$ eine randlose kompakte Menge.*

*Beweis*: Aus Hilfssatz 10. 1 folgt sofort die Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{N}(e)$, deren Offenheit wir schon vorher erkannt hatten. Also ist $\mathfrak{N}(e)$ randlos.

Da $e$ ja wegen (9. 1) im Zentrum von $A$ liegt, so ist die Gesamtheit $G$ aller Elemente der Form $x - xe$ mit $x$ aus $A$ ein Ideal aus $A$; es besteht aus den sämtlichen Lösungen der Gleichung $ye = 0$. Die Menge $\mathfrak{N}(e)$ ist wegen Hilfssatz 10. 1 im wesentlichen mit der Menge der maximalen Ideale des Ringes $A/G$ identisch, der ja die Ringeins $G + e$ besitzt. Denn kein $G$ enthaltendes maximales Ideal aus $A$ enthält $e$ wegen $A = G \oplus eA$. Da aber $G + e$ die Eins dieses Ringes $A/G$ ist, so ist wohlbekannt [siehe etwa Jacobson, p. 208, Proposition 1] und auch leicht nachgeprüft, daß der Raum der maximalen Ideale aus $A/G$ kompakt ist. Da $\mathfrak{N}(e)$ diesem Raum homöomorph ist, so ist auch $\mathfrak{N}(e)$ kompakt.

**Satz 10. 3**: *Der topologische Raum $\mathfrak{T}(A)$ ist lokal kompakt und nulldimensional.*

*Beweis*: Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so existiert nach (9. 3) ein nicht in $\mathfrak{p}$ enthaltenes idempotentes Element $e$. Dann liegt $\mathfrak{p}$ in der nach Lemma 10. 2 randlosen und kompakten Menge $\mathfrak{N}(e)$, so daß also $\mathfrak{T}$ lokal kompakt ist.

Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ zwei verschiedene Punkte aus $\mathfrak{T}$, so gibt es nach (9. 4*) ein idempotentes Element $e$, das in $\mathfrak{q}$, aber nicht in $\mathfrak{p}$ liegt. Die nach Lemma 10. 2 randlose und kompakte Menge $\mathfrak{N}(e)$ enthält $\mathfrak{p}$, aber nicht $\mathfrak{q}$; und nun folgt aus (1. 1) die Nulldimensionalität des lokal kompakten Raumes $\mathfrak{T}$.

**Lemma 10. 4:** *Ist $\mathfrak{A}$ eine randlose kompakte Teilmenge von $\mathfrak{T}$, so gibt es ein $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}(e)$ erfüllendes idempotentes Element $e$ in $A$.*

*Beweis*: Es sei $\mathfrak{p}$ ein nicht in $\mathfrak{A}$ enthaltener Punkt aus $\mathfrak{T}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Punkt aus $\mathfrak{A}$, so gibt es wegen (9. 4*) ein idempotentes Element $e(\mathfrak{a})$, das nicht in $\mathfrak{a}$, aber in $\mathfrak{p}$ liegt. Da die kompakte Menge $\mathfrak{A}$ von den Mengen $\mathfrak{R}[e(\mathfrak{a})]$ überdeckt wird, die wegen Lemma 10. 2 offen sind, so wird $\mathfrak{A}$ bereits von endlich vielen dieser Mengen überdeckt. Damit haben wir gezeigt:

(1) Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht in $\mathfrak{A}$ liegender Punkt, so gibt es endlich viele in $\mathfrak{p}$ enthaltene idempotente Elemente $e_i$ mit $\mathfrak{A} \leqq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{R}(e_i)$.

Wir wählen nun die in (1) vorkommende Menge von idempotenten Elementen möglichst klein. Wäre dann $1 < n$, so betrachten wir die $n - 1$ Elemente $e_1 + e_n - e_1 e_n$, $e_2, \ldots, e_{n-1}$. Da die $e_i$ wegen (9. 1) im Zentrum von $A$ liegen, so sind dies wieder idempotente Elemente, die sämtlich in $\mathfrak{p}$ liegen. Liegt der Punkt $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{R}(e_1)$ oder $\mathfrak{R}(e_n)$, so ist $\mathfrak{x} + e_1$ oder $\mathfrak{x} + e_n$ die Eins des Körpers $A/\mathfrak{x}$; und folglich ist auch $\mathfrak{x} + e_1 + e_n - e_1 e_n = 1$, so daß $e_1 + e_n - e_1 e_n$ nicht in $\mathfrak{x}$ liegt und $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{R}(e_1 + e_n - e_1 e_n)$ gehört. Damit hätten wir eine kleinere, den Bedingungen von (1) genügende Menge von idempotenten Elementen gefunden; und dies ist unmöglich. Also gilt:

(2) Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht in $\mathfrak{A}$ liegender Punkt, so gibt es ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes idempotentes Element $e$ mit $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{R}(e)$.

Aus (2) folgt insbesondere die Existenz eines idempotenten Elements $b$ in $A$ mit $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{R}(b)$, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{T}$ ist. Ist aber $\mathfrak{A} = \mathfrak{T}$, so ergibt eine geeignete Modifikation, sogar Abschwächung, des obigen Schlußverfahrens die Existenz eines $\mathfrak{A} = \mathfrak{T} = \mathfrak{R}(b)$ erfüllenden idempotenten Elements $b$ in $A$. [Man kann dann sogar $b = 1$ beweisen.] Da $\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung und $\mathfrak{R}(b)$ wegen Lemma 10. 2 randlos und kompakt ist, so ist auch $\mathfrak{R}(b) - \mathfrak{A}$ randlos und kompakt. Wegen (2) gibt es zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}(b) - \mathfrak{A}$ ein in $\mathfrak{p}$ enthaltenes idempotentes Element $b(\mathfrak{p})$ mit $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{R}[b(\mathfrak{p})]$. Es liegt also jeder Punkt aus $\mathfrak{R}(b) - \mathfrak{A}$ in wenigstens einer der Mengen $\mathfrak{T} - \mathfrak{R}[b(\mathfrak{p})]$, die wegen Lemma 10. 2 offen sind. Diese Überdeckung der kompakten Menge $\mathfrak{R}(b) - \mathfrak{A}$ enthält eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es endlich viele idempotente Elemente $b_1, \ldots, b_k$ in $A$ derart, daß

$$\mathfrak{A} \leqq \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{R}(b_i) \text{ und } \mathfrak{R}(b) - \mathfrak{A} \leqq \bigcup_{i=1}^{k} [\mathfrak{T} - \mathfrak{R}(b_i)]$$

ist. Wir bilden schließlich $c = b \prod_{i=1}^{k} b_i$. Dies ist wegen (9. 1) ebenfalls ein idempotentes Element. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist

$$\mathfrak{p} + c = [\mathfrak{p} + b] \prod_{i=1}^{k} [\mathfrak{p} + b_i].$$

Da $A/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, dessen idempotente Elemente 0 und 1 sind, so liegt $c$ dann und nur dann in $\mathfrak{p}$, wenn wenigstens eines der Elemente $b, b_1, \ldots, b_k$ in $\mathfrak{p}$ liegt. Also gehört $\mathfrak{p}$ dann und nur dann zu $\mathfrak{R}(c)$, wenn keines der Elemente $b, b_1, \ldots, b_k$ in $\mathfrak{p}$ liegt, d. h. wenn $\mathfrak{p}$ in

$$\mathfrak{R}(b) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{R}(b_i) = \mathfrak{A}$$

liegt. Damit haben wir $\mathfrak{R}(c) = \mathfrak{A}$ bewiesen.

## 11. Die Darstellung als Funktionenalgebra.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(A)$, so existiert wegen I* ein und nur ein stetiger $K$-Epimorphismus $\sigma(\mathfrak{p})$ von $A$ auf $K$, dessen Kern genau das maximale Ideal $\mathfrak{p}$ ist. Ist $f$ ein Element aus $A$ und $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist also $f^{\sigma(\mathfrak{p})}$ eine eindeutig bestimmte Zahl aus $K$. Durch die Definition

$$f(\mathfrak{p}) = f^{\sigma(\mathfrak{p})} \text{ für jeden Punkt } \mathfrak{p} \text{ aus } \mathfrak{T}$$

wird also dem Element $f$ aus $A$ eine wohlbestimmte eindeutige, $K$-wertige, auf $\mathfrak{T}$ definierte Funktion zugeordnet. Da die $\sigma(\mathfrak{p})$ sämtlich $K$-Homomorphismen sind, so ist diese Zuordnung offenbar ein $K$-Homomorphismus der $K$-Algebra $A$ auf eine Funktionenalgebra. Da $f(\mathfrak{T}) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $f$ in allen Idealen $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ liegt, und da der Durchschnitt dieser Ideale wegen (9. 7) gleich 0 ist, so haben wir es sogar mit einem Isomorphismus zu tun. Wir können also, was bequem sein wird, das Element $f$ aus $A$ mit der soeben definierten Funktion identifizieren. *Damit haben wir die gesuchte Darstellung von $A$ als Funktionenalgebra gewonnen.*

Aus der Gleichung $|f(\mathfrak{p})| = |f^{\sigma(\mathfrak{p})}|$ und aus der Definition der natürlichen Norm [im § 7] ergibt sich nun, daß $\hat{f}$ die kleinste obere Schranke aller Funktionswerte $|f(\mathfrak{p})|$ ist, und daß also wegen § 7, (*) die Ungleichung

$$(**) \qquad |f(\mathfrak{p})| \leqq \hat{f} \leqq \|f\| \text{ für alle } \mathfrak{p} \text{ aus } \mathfrak{T} \text{ und alle } f \text{ aus } A$$

gilt.

**Lemma 11. 1:** $T(A) = T(K, \mathfrak{T})$.

*Beweis*: Wir wollen zunächst zeigen, daß jede Funktion aus $T(A)$ eine Treppenfunktion aus $F(K, \mathfrak{T})$ ist; vgl. § 4. Dies ist sicher wahr für $t = 0$. Ist aber $t \neq 0$ ein Element aus $T(A)$, so gibt es wegen (9. 2) paarweise orthogonale, idempotente Elemente $e_i \neq 0$ aus $A$ und Zahlen $k_i \neq 0$ aus $K$ mit $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$. Hierbei können wir $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$ annehmen. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}$, so ist $A/\mathfrak{p}$ wegen I* ein Körper, dessen einzige idempotente Elemente 0 und 1 sind. Ist $i \neq j$, so sind $\mathfrak{p} + e_i$ und $\mathfrak{p} + e_j$ sich gegenseitig annullierende idempotente Elemente aus dem Körper $A/\mathfrak{p}$, von denen wenigstens eines 0 sein muß; und es sind also entweder $\mathfrak{p} + e_i$ und $\mathfrak{p} + e_j$ beide 0 oder eines dieser Körperelemente ist 0, während das andere 1 ist. Von den Elementen $e_i$ kann also höchstens eines nicht in $\mathfrak{p}$ liegen. Also liegen entweder alle $e_i$ in $\mathfrak{p}$, in welchem Falle $t(\mathfrak{p}) = 0$ ist; oder aber es gibt einen und nur einen Index $j$ mit $\mathfrak{p} + e_j \neq 0$, in welchem Falle $t(\mathfrak{p}) = k_j$ ist. Bedenken wir noch, daß es wegen (9. 7) zu jedem $e_i$ wenigstens einen $e_i$ nicht enthaltenden Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ gibt, so sehen wir, daß die Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ genau die sämtlichen von 0 verschiedenen Werte der Funktion $t$ sind. Weiter ist $t(\mathfrak{p}) = k_i$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{N}(e_i)$ liegt. Wegen Lemma 10. 2 ist aber jede der endlich vielen Mengen $\mathfrak{N}(e_i)$ randlos und kompakt; und daraus folgt, daß die Menge $\mathfrak{N}(t)$ der $t(\mathfrak{p}) \neq 0$ erfüllenden Punkte $\mathfrak{p}$ als Vereinigung endlich vieler randloser kompakter Mengen selbst randlos und kompakt ist. Also ist $t$ eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet und nur endlich viel verschiedene Werte annimmt; kurz $t$ ist eine Treppenfunktion aus $F(K, \mathfrak{T})$. Damit haben wir $T(A) \leqq T(K, \mathfrak{T})$ bewiesen.

Ist $e$ eine idempotente Funktion aus $F(K, \mathfrak{T})$, so ist die Menge $\mathfrak{N}(e)$ der $e(\mathfrak{p}) = 1$ erfüllenden Punkte $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}$ wegen Lemma 4. 2 randlos und kompakt. Wegen Lemma 10. 4 gibt es also ein $\mathfrak{N}(a) = \mathfrak{N}(e)$ erfüllendes idempotentes Element $a$ in $A$. Da aber idempotente Funktionen bereits durch die Mengen $\mathfrak{N}$ ihrer Einsstellen voll bestimmt sind, so

wird $e = a$. Damit haben wir gezeigt, daß alle idempotenten Funktionen aus $F(K, \mathfrak{T})$ in $A$ liegen. Also wird $T(K, \mathfrak{T}) \leqq T(A)$; und damit ist $T(A) = T(K, \mathfrak{T})$ vollständig bewiesen.

**Satz 11. 2**: *$A$ ist eine divisionsabgeschlossene Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ und $\| a \| = \hat{a}$ für jedes $a$ aus $A$.*

*Beweis*: Im § 3 haben wir gezeigt, daß $F(K, \mathfrak{T})$ bzgl. $K$ vollständig ist. Wird also eine Funktion durch Funktionen aus $F(K, \mathfrak{T})$ gleichmäßig approximiert, so gehört sie bereits zu $F(K, \mathfrak{T})$. Wegen Satz 4. 1 ist $T(K, \mathfrak{T})$ dicht in $F(K, \mathfrak{T})$; und wegen Lemma 11. 1 ist $T(A) = T(K, \mathfrak{T})$. Also enthält $F(K, \mathfrak{T})$ alle durch Funktionen aus $T(A)$ gleichmäßig approximierten Funktionen. Da aber $T(A)$ wegen II in $A$ dicht ist und da hieraus wegen (**) folgt, daß jede Funktion aus $A$ gleichmäßig durch Funktionen aus $T(A)$ approximiert wird, so ergibt sich $A \leqq F(K, \mathfrak{T})$.

Da $\hat{t} = \| t \|$ für alle $t$ aus $T(A)$ wegen (9. 6) gilt, da $T(A)$ in $A$ dicht ist, und da Norm wie auch natürliche Norm [die ja die Norm aus $F(K, \mathfrak{T})$ ist] stetig sind, so gilt $\hat{a} = \| a \|$ für alle $a$ aus $A$.

Wir müssen noch zeigen, daß die Teilalgebra $A$ von $F(K, \mathfrak{T})$ divisionsabgeschlossen ist. Wie oben bemerkt, folgt $T(K, \mathfrak{T}) = T(A) \leqq A$ aus Lemma 11. 1. Ist $L$ ein Ideal aus $A$, das $T(A)$ nicht enthält, so gibt es ein idempotentes Element $e$ in $A$, das nicht zu $L$ gehört. Es gibt also Ideale aus $A$, die $L$, aber nicht $e$ enthalten; und unter diesen gibt es ein maximales $M$. Dann ist $M + e$ ein von 0 verschiedenes idempotentes Element der Algebra $A/M$, das in jedem von 0 verschiedenen Ideal aus $A/M$ enthalten ist. Man folgert, daß $M + e$ [als Zentrumselement wegen (9. 1)] nur die 0 aus $A/M$ annulliert, daß also $M + e$ die Eins dieser Algebra $A/M$ ist. Folglich ist $A/M$ eine einfache Algebra, da ja die Eins in jedem von 0 verschiedenen Ideal liegt; und damit ist $M$ als maximales Ideal von $A$ erwiesen. Ein maximales Ideal, das nicht alle idempotenten Elemente enthält, ist aber ein Punkt, d. h. $M = \mathfrak{m}$; und aus der Darstellung von $A$ als Funktionenalgebra über $\mathfrak{T}$ folgt sofort $\mathfrak{m}^A = M$. Also gilt $L \leqq M = \mathfrak{m}^A$; und die Divisionsabgeschlossenheit von $A$ folgt aus Satz 6. 1.

**Bemerkung:** Da man $\hat{a}$ unabhängig von der Norm in $A$ definieren kann, so zeigt Satz 11. 2, daß die Norm $\| a \|$ von $A$ bereits durch die übrigen Struktureigenschaften von $A$ eindeutig bestimmt ist.

**Zusatz 11. 3**: *Es gilt $A = F(K, \mathfrak{T})$ dann und nur dann, wenn* III *von $A$ erfüllt wird.*

Dies folgt sofort aus der im § 3 dargetanen Gültigkeit von III in $F(K, \mathfrak{T})$ in Verbindung mit den Sätzen 4. 1, 11. 2 und Lemma 11. 1.

**Hauptsatz**: *Es sei $K$ ein bewerteter Körper und $A$ eine $K$-Algebra [im Sinne des § 7].*

A. *Dann und nur dann genügt $A$ den Bedingungen* I* *und* II, *wenn es einen lokal kompakten, null-dimensionalen topologischen Raum $\mathfrak{T}$ derart gibt, daß $A$ einer divisionsabgeschlossenen Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ isomorph ist.*

B. *Die folgenden Eigenschaften der $K$-Algebra $A$ sind untereinander äquivalent:*

B. 1. *$A$ ist einer Funktionenalgebra $F(K, \mathfrak{T})$ mit lokal kompaktem null-dimensionalem $\mathfrak{T}$ isomorph.*

B. 2. *$A$ genügt den Bedingungen* I, II, III.

B. 3. *$A$ genügt den Bedingungen* I*, II, III.

Der Beweis von Aussage $A$ ergibt sich durch Kombination von Zusatz 8. 2 und Satz 11. 2. — Der Beweis von Aussage B erfolgt durch Kombination von Satz 8. 1 und Zusatz 11. 3.

## Anhang: Die Potenzregel.

Wir haben im § 7 bei der Festlegung des Begriffes der normierten $K$-Algebra besonders auf die Regel 4 hingewiesen, da diese üblicherweise nicht gefordert wird. Wir wollen deshalb im folgenden der Betrachtung eine normierte $K$-Algebra $A$ zugrunde legen, die allen in § 7 aufgestellten Bedingungen mit möglicher Ausnahme dieser Regel 4 genügen soll; und wir wollen untersuchen, wann in einer solchen normierten $K$-Algebra $A$ diese Potenzregel

$$(*) \qquad \| x \|^n = \| x^n \| \text{ für } x \text{ in } A \text{ und } n > 0$$

gilt.

**Lemma A. 1**: *Gilt die Potenzregel* (*) *in einem in $A$ dichten Teilring $U$, so gilt* (*) *auch in ganz $A$.*

*Beweis*: Aus der Stetigkeit der Multiplikation folgt die der Potenzbildung in $A$. Aus der Stetigkeit der Norm folgt also, daß $\| x^n \|$ eine stetige Funktion von $x$ ist. Da $\| x \|^n$ ebenfalls eine stetige Funktion von $x$ ist, so ist auch die Differenz $\| x^n \| - \| x \|^n$ eine stetige Funktion von $x$. Diese letzte Funktion verschwindet aber nach Voraussetzung auf einer dichten Teilmenge von $A$, also überall, womit die Gültigkeit der Potenzregel (*) in $A$ dargetan ist.

**Lemma A. 2**: *Ist $T$ die von den idempotenten Elementen aus $A$ aufgespannte Teilalgebra, liegen alle idempotenten Elemente aus $A$ im Zentrum von $A$, gilt $\| e \| = 1$ für alle idempotenten Elemente $e \neq 0$ aus $A$, gilt schließlich*

$$\| a + b \| = \max [\| a \|, \| b \|]$$

*für $ab = 0 = ba$ erfüllende Elemente $a$, $b$ aus $T$, so gilt die Potenzregel* (*) *in $T$.*

*Beweis*: Da die idempotenten Elemente sämtlich im Zentrum von $A$ liegen, so haben die Elemente $t$ aus $T$ die Form $t = \sum_{i=1}^{r} k_i e_i$ mit $k_i$ in $K$ und $e_i = e_i^2$ in $A$. Man zeigt, wie üblich, daß man o. B. d. A. $e_i e_j = 0$ für $j \neq i$ annehmen kann; und weiter kann man auch $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$ voraussetzen. Ist $t \neq 0$, so können wir schließlich noch $k_i \neq 0$ und $e_i \neq 0$ annehmen. Dann gilt aber

$$t^n = \sum_{i=1}^{r} k_i^n e_i,$$

$$\| t \| = \max [\ldots, | k_i |, \ldots],$$

$$\| t^n \| = \max [\ldots, | k_i^n |, \ldots] = \max [\ldots, | k_i |^n, \ldots] = \| t \|^n,$$

wie wir beweisen wollten.

Aus den Lemmata A. 1 und A. 2 kann man schließlich unter Benutzung früherer Überlegungen [vgl. besonders die Beweise von (9. 1) und (9. 5)] leicht folgendes Resultat herleiten.

**Satz A. 3**: *Ist die von den idempotenten Elementen aus $A$ aufgespannte Teilalgebra $T$ von $A$ dicht in $A$, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Potenzregel* (*) *in $A$*:

(a) *alle idempotenten Elemente liegen im Zentrum von $A$*;

(b) *sind $a$, $b$ Elemente aus $A$ mit $ab = ba = 0$, so ist $\| a + b \| = \max [\| a \|, \| b \|]$*;

(c) *aus $e^2 = e \neq 0$ folgt $\| e \| = 1$.*

## Literaturverzeichnis.

*E. Correl — M. Henriksen*, On rings of bounded continuous functions with values in a division ring. Proc. A. M. S. **7** (1956), 194—198.

*J. K. Goldhaber — E. S. Wolk*, Maximal ideals in rings of bounded continuous functions, Duke Math. J. **21** (1954), 565—569.

*N. Jacobson*, Structure of rings, A. M. S. Colloquium Publications **37** (1956).

*I. Kaplansky*, [1] Topological rings, Amer. J. Math. **69** (1947), 153—183.

*I. Kaplansky*, [2] Topological rings, Bull. A. M. S. **54** (1948), 809—826.

*H. J. Kowalsky*, Stonesche Körper und ein Überdeckungssatz, Math. Nachr. **14** (1955), 75—64.

---

Eingegangen 27. Juli 1959

# Normierte Funktionenalgebren. II.

## Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.

Von *Volker Baumann* in Frankfurt am Main.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit denselben Strukturen wie die vorangehende von R. Baer [1], nämlich mit normierten $K$-Algebren zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$. Dabei bedeutet $K$ einen bewerteten Körper, $\mathfrak{T}$ einen lokal kompakten, nulldimensionalen $T_1$-Raum, $F(K, \mathfrak{T})$ die $K$-Algebra aller stetigen, im Unendlichen verschwindenden $K$-wertigen Funktionen über $\mathfrak{T}$, normiert durch die Maximumsnorm, $T(K, \mathfrak{T})$ die Teilalgebra der Treppenfunktionen aus $F(K, \mathfrak{T})$.

In [1] wurde eine gewisse Klasse dieser Algebren, nämlich die „divisionsabgeschlossenen", charakterisiert; das sind Algebren $V$ zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$ derart, daß das von einem beliebigen Element $v \in V$ in $V$ aufgespannte Ideal dieselben Idempotente enthält wie das von $v$ in $F(K, \mathfrak{T})$ aufgespannte Ideal. Als hinreichend und notwendig für die Isomorphie einer normierten $K$-Algebra $A$ zu einer divisionsabgeschlossenen Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$ für geeignetes $T$ erwiesen sich (vgl. in [1] den Hauptsatz des § 11) die drei Bedingungen:

(P) In $A$ gilt die „Potenzregel": $\|a^n\| = \|a\|^n$ für alle $a \in A$ und alle natürlichen Zahlen $n$.

(I*) Jedes maximale (zweiseitige $K$-) Ideal aus $A$, das die von den Idempotenten aus $A$ erzeugte Teilalgebra $T(A)$ nicht enthält, ist Kern eines stetigen Epimorphismus von $A$ auf $K$.

(II) $T(A)$ liegt dicht in $A$.

Hier soll nun die Eigenschaft (I*) durch eine gewisse topologische Eigenschaft, nämlich die „$A$-Vollständigkeit" (vgl. III′) des bewerteten Körpers $K$ ersetzt werden, die z. B. im Falle der Vollständigkeit von $K$ vorliegt. Dies führt zu einer Charakterisierung der Klasse aller $K$-Algebren zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$: (P), (II) und die $A$-Vollständigkeit sind notwendig und hinreichend dafür, daß $A$ einer $K$-Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$ für geeignetes $\mathfrak{T}$ isomorph ist. Der Beweis ergibt sich im wesentlichen aus dem Satz, daß jede normierte $K$-Algebra, die (P) erfüllt und von den in ihr liegenden Idempotenten erzeugt wird, isomorph ist zu der Funktionenalgebra $T(K, \mathfrak{T}_0)$ aller stetigen, im Unendlichen verschwindenden Treppenfunktionen über dem lokal kompakten, null-dimensionalen Strukturraum $\mathfrak{T}_0$ ihrer maximalen Ideale. Der Satz gestattet überdies, jeder normierten $K$-Algebra $A$, die (P) erfüllt, einen lokal kompakten, null-dimensionalen Raum $\mathfrak{T}_0$ zuzuordnen, nämlich den Strukturraum der maximalen Ideale aus $T(A)$; dieser Raum ist charakteristisch für die Darstellbarkeit von $A$ als Funktionenalgebra, falls $A$ die Bedingung II erfüllt: Ist $A$ für irgendeinen lokal kompakten (nicht notwendig Hausdorffschen) Raum $\mathfrak{T}$ zu einer Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$

isomorph, so ist sie auch isomorph zu einer Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$. $\mathfrak{T}_0$ ist dann im wesentlichen ein Quotientenraum von $\mathfrak{T}$. Ich danke Herrn Prof. Baer für seine Anregungen und die freundliche Überlassung seines Manuskripts.

## § 1. Von Idempotenten erzeugte Algebren.

Es sei $T$ eine normierte $K$-Algebra, die (P) erfüllt und von den in ihr enthaltenen Idempotenten erzeugt wird.

(1) *Jedes einseitige $K$-Ideal aus $T$ wird von den in ihm enthaltenen Idempotenten aufgespannt und ist zweiseitig.*

*Beweis*: Es sei $J$ ein einseitiges $K$-Ideal aus $T$. Liegen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in $J$, so auch trivialerweise $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i \, (k_i \in K)$. Andrerseits läßt sich jedes Element $t \in T$ nach [1], (9. 2), in der Form $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$ darstellen, wobei $0 \neq k_i \in K$ und $e_i e_j = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ e_i \text{ für } i = j \end{cases}$. Liegt nun $t$ in $J$, so auch $k_i^{-1} t e_i = e_i = k_i^{-1} e_i t$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Da die Idempotente aus $T$ nach [1], (9. 1), im Zentrum von $T$ liegen, ist $J$ ein zweiseitiges Ideal.

(2) *Ist $M$ ein maximales $K$-Ideal aus $T$, so liegt mit zwei Idempotenten auch ihr Produkt nicht in $M$.*

*Beweis*: Es sei $e_1 = e_1^2 \notin M$ und $e_2 = e_2^2 \notin M$. Da wegen [1], (9. 1), $e_1$ im Zentrum von $T$ liegt, und $M$ maximal ist, wird $T = M + Te_1 + Ke_1$, also insbesondere $e_2 \in M + Te_1 + Ke_1$ und damit $e_2 = e_2^2 \in M + Te_1 e_2 + Ke_1 e_2$. Läge nun $e_1 e_2$ in $M$, so auch $e_2$ gegen Voraussetzung.

**Lemma 3.** *Jedes maximale $K$-Ideal $M$ aus $T$ ist Kern eines beschränkten $K$-Epimorphismus von $T$ auf $K$.*

*Beweis*: Für $e = e^2 \in T$ sei $e^\sigma = \begin{Bmatrix} 1, \text{ falls } e \notin M \\ 0 \text{ falls } e \in M \end{Bmatrix}$, wobei $0 \in K$ und $1 \in K$. Es gilt dann:

(a) Aus $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i = 0$ folgt $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i^\sigma = 0$ wobei $k_i \in K$ und $e_i = e_i^2 \in T$.

Liegen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in $M$, so ist (a) sicher richtig. Liegt mindestens eines der $e_i$ nicht in $M$, dann wird einerseits $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i^\sigma = \sum_{e_i \notin M} k_i$. Andrerseits folgt aus $\sum_{i=1}^{n} k_i e_i = 0$, daß

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i e_i\right) \prod_{e_i \notin M} e_i = \left(\sum_{e_i \notin M} k_i\right) \prod_{e_i \notin M} e_i + \left(\sum_{e_i \in M} k_i e_i\right) \prod_{e_i \notin M} e_i,$$

da die Elemente $e_i$ idempotent sind und nach [1], (9. 1), im Zentrum von $T$ liegen. Der zweite Summand der rechten Seite liegt in $M$, das Produkt $\prod_{e_i \notin M} e_i$ wegen (2) nicht in $M$, also ist $\sum_{e_i \notin M} k_i = 0$.

Wegen (a) wird die Zuordnung $\sigma$ durch folgende Vorschrift eindeutig auf ganz $T$ erweitert: $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i e_i\right)^\sigma = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i^\sigma$, wobei $k_i \in K$ und $e_i = e_i^2 \in T$. $\sigma$ ist nach dieser Definition additiv und $K$-multiplikativ. $\sigma$ ist multiplikativ; denn nach (2) ist $(e_1 e_2)^\sigma = e_1^\sigma e_2^\sigma$ für alle Idempotenten $e_1, e_2$ aus $T$. Weiter ist $\sigma$ eine Abbildung auf $K$; denn wegen $T \neq M$ gibt es mindestens ein Idempotent aus $T$, das nicht in $M$ liegt und damit durch $\sigma$ in die Körpereins übergeht. Aus (1) folgt schließlich, daß $M$ der Kern von $\sigma$ ist.

Ist $t = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$, $0 \neq k_i \in K$, eine Darstellung des Elementes $t \in T$ durch paarweise orthogonale Idempotente $e_i$ aus $T$, so folgt einerseits aus der Potenzregel $(P)$ (vgl. [1], (9. 5)), daß $\|t\| = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} |k_i|$ gilt. Andererseits gehört wegen (2) höchstens eines der Idempotente $e_i$ zu $M$; also gilt $t^\sigma = 0$ oder $t^\sigma = k_i$ für geeignetes $i$, und somit $|t^\sigma| \leqq \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,n} |k_i| = \|t\|$. Damit ist auch die Beschränktheit des $K$-Epimorphismus $\sigma$ bewiesen.

Aus Lemma 3 folgt, daß $T$ die Bedingung I* erfüllt. $T$ erfüllt auch trivialerweise die Bedingung II. Damit ergibt der Hauptsatz des § 11 aus [1] den

**Satz 4.** *Ist $T$ eine normierte $K$-Algebra mit der Eigenschaft* (P), *die von den in ihr liegenden Idempo enten erzeugt wird, so ist $T$ isomorph zu der Funktionenalgebra $T(K, \mathfrak{T}_0)$; dabei ist $\mathfrak{T}_0$ der lokal kompakte, nulldimensionale Strukturraum der maximalen $K$-Ideale aus $T$.*

Unter „Isomorphismus" soll immer wie in [1] ein normtreuer algebraischer $K$-Isomorphismus verstanden werden.

## § 2. Die $A$-Vollständigkeit des Körpers $K$.

Es sei weiterhin $A$ eine normierte $K$-Algebra, die (P) genügt, und $T(A)$ die von den Idempotenten aus $A$ erzeugte Teilalgebra. Auf $T(A)$ können wir den Satz 4 anwenden; im Folgenden soll $T(A)$ mit der gemäß Satz 4 zu ihr isomorphen Funktionenalgebra $T(K, \mathfrak{T}_0)$ identifiziert werden.

Die Forderung der „$A$-Vollständigkeit" des bewerteten Körpers $K$, die am Anfang erwähnt wurde, lautet:

(III′) *Wenn die Folge $\{t_i\}$, $t_i \in T(A)$, gegen ein Element aus $A$ konvergiert, so konvergiert die Cauchy-Folge $\{t_i^\sigma\}$ für jeden Epimorphismus $\sigma$ von $T(A)$ auf $K$ (oder gleichwertig: $\{t_i(\mathfrak{p})\}$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}_0$).*

(5) *Genügt $A$ der Bedingung* II, *so gilt: $A$ erfüllt* III′ *genau dann, wenn $A$ einer Funktionenalgebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ isomorph ist.*

*Beweis*: Ist $A$ isomorph zu einer Funktionenalgebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ und $\{t_i\}$, $t_i \in T(A) = T(K, \mathfrak{T}_0)$, eine Folge, die gegen $a \in A$ konvergiert, so konvergiert $t_i(\mathfrak{p})$ gegen $a(\mathfrak{p})$ für jeden Punkt $\mathfrak{p} \in \mathfrak{T}_0$; also erfüllt $A$ die Bedingung III′. Andererseits folgt aus II, daß zu jedem $a \in A$ eine Folge $\{t_i\}$, $t_i \in T(A)$, existiert, für die $\lim_{i \to \infty} t_i = a$ ist. Die Vorschrift $\alpha$: $a^\alpha(\mathfrak{p}) = \lim_{i \to \infty} t_i(\mathfrak{p})$ definiert, falls $A$ der Bedingung III′ genügt, eine $K$-wertige Funktion $a^\alpha$ über $\mathfrak{T}_0$, die offensichtlich von der Auswahl der gegen $a$ konvergierenden Folge $\{t_i\}$ unabhängig ist. $a^\alpha$ ist als gleichmäßiger Limes stetiger im Unendlichen verschwindender $K$-wertiger Funktionen über $\mathfrak{T}_0$ ein Element aus $F(K, \mathfrak{T}_0)$. Die Abbildung $\alpha$ ist norm-, summen- und produkttreu, also ein Isomorphismus von $A$ in $F(K, \mathfrak{T}_0)$. Da $A \geqq T(A)$, ist $A^\alpha \geqq T(K, \mathfrak{T}_0)$.

Um wie in [1] unter den Algebren zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$ die Algebra $F(K, \mathfrak{T})$ auszeichnen zu können, formulieren wir analog der „Vollständigkeit von $A$ bezüglich $K$" ([1], Bedingung III in § 8) die Eigenschaft

(III″) *Die Folge $\{t_i\}$, $t_i \in T(A)$, konvergiert gegen ein Element aus $A$, wenn*

(a) *die Folge $\{t_i\}$ eine Cauchy-Folge ist, und*

(b) *die Folge $\{t_i^\sigma\}$ für jeden Epimorphismus $\sigma$ von $T$ auf $K$ (oder gleichwertig: $\{t_i(\mathfrak{p})\}$ für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}_0$) konvergiert.*

Der Übergang von III zu III″ besteht darin, daß man die in III auftretenden Epimorphismen, deren Existenz nach der Elimination von I* nicht mehr für jedes maximale $K$-Ideal aus $A$ gesichert ist, durch Epimorphismen von $T(A)$ auf $K$ ersetzt, die nach Lemma 3 hinreichend vorhanden sind. Der Hauptsatz des § 11 in [1] läßt sich nun neu fassen, indem man im wesentlichen die Bedingungen I* bzw. II aus [1] durch die beiden relativen Vollständigkeitseigenschaften III′ bzw. III″, sowie $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}_0$ ersetzt:

**Hauptsatz:** *Es sei $K$ ein bewerteter Körper und $A$ eine normierte $K$-Algebra mit Eigenschaft* (P), *$T(A)$ die von den Idempotenten aus $A$ erzeugte Teilalgebra, $\mathfrak{T}_0$ der lokal kompakte, null-dimensionale Strukturraum der maximalen $K$-Ideale aus $T(A)$.*

(A′) *$A$ genügt genau dann den Bedingungen* II *und* III′, *wenn $A$ zu einer Funktionenalgebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ isomorph ist.*

(B′) *$A$ genügt genau dann den Bedingungen* II, III′, III″, *wenn $A$ isomorph zu $F(K, \mathfrak{T}_0)$ ist.*

*Beweis von* (A′): Da nach Satz 4. 1. aus [1] jede Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ die Bedingung II erfüllt, erfüllt diese wegen (5) auch die Bedingung III′. Wenn $A$ andrerseits die Eigenschaften II und III′ besitzt, ergibt (5) die Isomorphie von $A$ zu einer Funktionenalgebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$.

*Beweis von* (B′): Ist $A$ isomorph zu $F(K, \mathfrak{T}_0)$, so erfüllt $A$ nach [1], Satz 8. 1., die Bedingungen I*, II und III, also wegen (5) auch III′. Die Bedingung III″ ist ein Spezialfall der „Vollständigkeit bezüglich $K$", die in [1] am Ende des § 3 für $F(K, \mathfrak{T})$, $\mathfrak{T}$ lokal kompakt und null-dimensional, nachgewiesen wurde. Nehmen wir umgekehrt II und III′ als erfüllt an, so ist $A$ nach (A′) einer Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ isomorph. Ist $f$ eine Funktion aus $F(K, \mathfrak{T}_0)$, so wird sie wegen [1], (4. 1), durch eine Folge $\{t_i\}$ von Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert. Für jeden Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{T}_0$ gilt dann $\lim_{i\to\infty} t_i(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})$. Die Folge der $t_i$, aufgefaßt als Elemente von $T(A)$, konvergiert also wegen III″ gegen ein Element $a$ aus $A$. Das Bild dieses Elementes $a$ ist aber gerade $f$. $A$ ist isomorph zu $F(K, \mathfrak{T}_0)$.

*Bemerkung*: Die Bedingung III′ ist die Umkehrung der Bedingung III″. III′ stellt eine Vollständigkeitsforderung an $K$, III″ eine Vollständigkeitsforderung an $A$. Ist $K$ speziell vollständig, so ist III′ erfüllt, und III″ geht — unter Berücksichtigung von II — in die Forderung der Vollständigkeit von $A$ über.

Ein Vergleich des Hauptsatzes mit dem aus [1], § 11, ergibt u. a.: Eine normierte $K$-Algebra $A$ mit den Eigenschaften (P), II, III′ und III″ hat auch die „Stonesche" Eigenschaft I ([1], § 8): Jedes maximale $K$-Ideal aus $A$ ist Kern eines stetigen Epimorphismus von $A$ auf $K$.

Der Vergleich der beiden Hauptsätze führt weiter zu der Frage, inwieweit $\mathfrak{T}_0$, der Strukturraum der maximalen $K$-Ideale aus $T(A)$, für die Darstellbarkeit von $A$ als Funktionenalgebra charakteristisch ist. Ist für einen lokal kompakten, null-dimensionalen Raum $\mathfrak{T}$ — der wie in [1] ein $T_1$-Raum sein möge — die normierte $K$-Algebra $A$ zu einer Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T})$ und $F(K, \mathfrak{T})$ isomorph, so ist $T(A)$ isomorph zu $T(K, \mathfrak{T})$. Wegen der Folgerung 6. 4 in [1] ist dann $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{T}_0$ homöomorph. Dadurch ergibt sich insbesondere mittels der Behauptungen (A) und (A′) der beiden Hauptsätze die Äquivalenz der Bedingungen I*, II mit III′, II und der Divisionsabgeschlossenheit der Algebra als Funktionenalgebra über $\mathfrak{T}_0$, sowie mittels (B) und (B′) die Äquivalenz der Bedingungen I*, II, III mit III′, II, III″.

Ist $A$ für einen lokal kompakten Raum $\mathfrak{T}$ zu einer Teilalgebra $A^a$ von $F(K, \mathfrak{T})$ isomorph, ohne daß $T(K, \mathfrak{T})$ in $A^a$ enthalten und $A^a$ divisionsabgeschlossen ist, so ist i. a. $\mathfrak{T}$ nicht homöomorph zu $\mathfrak{T}_0$, selbst wenn $\mathfrak{T}$ null-dimensional ist. Daß aber auch dann $A$ als Funktionenalgebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$ darstellbar ist — falls $A$ die Bedingung II erfüllt —, soll im folgenden Paragraphen nachgewiesen werden.

## § 3. Funktionenalgebren über lokal kompakten Räumen.

Es sei $\mathfrak{T}$ ein lokal kompakter Raum; wir setzen nicht voraus, daß $\mathfrak{T}$ einem Trennungsaxiom genügt. Es sei weiter $A$ eine Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$, die der Bedingung II genügt; als Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ hat $A$ die Eigenschaft $(P)$.

Für eine Funktion $t$ aus $T(A)$ bezeichne $\mathfrak{N}(t)$ die Menge aller Punkte aus $\mathfrak{T}$, in denen $t$ nicht verschwindet. Einem maximalen $K$-Ideal $M$ aus $T(A)$ ordnen wir die Menge $\mathfrak{N}(M) = \bigcap_{e \notin M} \mathfrak{N}(e)$ zu; dabei wird der Durchschnitt über alle Idempotente $e$ aus $T(A)$ genommen, die nicht in $M$ liegen.

(6) *$\mathfrak{N}(M)$ ist für alle maximalen $K$-Ideale $M$ aus $T(A)$ nicht leer.*

*Beweis*: Ist $e$ ein idempotentes Element aus $T(A)$, so ist $\mathfrak{N}(e)$ abgeschlossen und kompakt, da die Funktionen aus $F(K, \mathfrak{T})$ im Unendlichen verschwinden und die Funktion $e$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Bezeichnen wir mit $e_0$ ein festes idempotentes Element aus $T(A)$, das nicht in $M$ liegt, so ist $\mathfrak{N}(e_0) \cap \mathfrak{N}(e)$ für alle nicht in $M$ liegenden Idempotente $e$ abgeschlossen; $\bigcap_{i=0}^{n} \mathfrak{N}(e_i) = \mathfrak{N}\left(\prod_{i=0}^{n} e_i\right)$ ist für beliebige, nicht in $M$ liegende Idempotente $e_1, e_2, \ldots, e_n$ nicht leer, da nach (2) $\prod_{i=0}^{n} e_i \neq 0$ gilt. Die Mengen $\mathfrak{N}(e_0) \cap \mathfrak{N}(e)$, $T(A) \ni e = e^2 \notin M$, sind also abgeschlossene Teilmengen der kompakten Menge $\mathfrak{N}(e_0)$ derart, daß der Durchschnitt je endlich vieler dieser Mengen nicht leer ist. Somit ist auch $\bigcap_{e \notin M} (\mathfrak{N}(e_0) \cap \mathfrak{N}(e)) = \bigcap_{e \notin M} \mathfrak{N}(e) = \mathfrak{N}(M)$ nicht leer.

(7) *Ist $M$ ein maximales $K$-Ideal aus $T(A)$, so ist*

a) *$M = \mathfrak{N}(M)^T$ und*

b) *jedes $t \in T(A)$ über $\mathfrak{N}(M)$ konstant.*

Dabei bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^T$ für $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{T}$ das $K$-Ideal der über $\mathfrak{M}$ verschwindenden Elemente aus $T(A)$.

*Beweis*: a) Ist $e$ ein nicht in $M$ liegendes Idempotent aus $T(A)$, so wird $e(\mathfrak{N}(M)) = 1$ nach Definition von $\mathfrak{N}(M)$, also $e \notin \mathfrak{N}(M)^T$. Da $M$ maximal ist, folgt aus (1) die Behauptung. b) Ist $e$ ein Idempotent aus $M$, so ist wegen a) $e(\mathfrak{N}(M)) = 0$. Da $T(A)$ von den in ihm enthaltenen Idempotenten aufgespannt wird, ist also auch b) richtig.

Aus (7) folgt insbesondere, daß für einen beliebigen Epimorphismus $\sigma$ von $T(A)$ auf $K$ stets $t^\sigma = t(\mathfrak{N}(M))$ wird, wobei $M$ der Kern von $\sigma$ ist. $A$ erfüllt also die Bedingung III′, und es folgt aus (5):

(8) *$A$ ist isomorph zu einer Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$.*

Abschließend soll noch auf die Frage eingegangen werden, welche Beziehung zwischen dem lokal kompakten Raum $\mathfrak{T}$ und dem Raum $\mathfrak{T}_0$ besteht. Es wird sich dabei nochmals ein Beweis von (8) ergeben, der (5) nicht benutzt.

Es sei $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} : \mathfrak{p}^T = T(A)\}$, d. h. die Menge aller Punkte aus $\mathfrak{T}$, über denen alle Funktionen aus $T(A)$ verschwinden, und $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} - \mathfrak{B}$ mit der durch $\mathfrak{T}$ induzierten Topologie.

(9) *Die Mengen $\mathfrak{N}(M)$, $M$ maximales $K$-Ideal aus $T(A)$, überdecken $\mathfrak{T}'$ schlicht.*

*Beweis*: Es sei $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{T}'$. Das Ideal $M = \mathfrak{p}^T$ ist ein maximales Ideal aus $T(A)$, da es Kern des Epimorphismus $t \to t(\mathfrak{p})$ von $T(A)$ auf $K$ ist, und $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}(M)$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt aus $\mathfrak{N}(M_1) \cap \mathfrak{N}(M_2)$, wobei $M_1$ und $M_2$ zwei verschiedene maximale Ideale aus $T(A)$ sind, so wird $\mathfrak{p}^T \geqq M_1 \cup M_2$. Da $M_1 \cup M_2$ ganz $T(A)$ aufspannt, liegt $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{B}$, also nicht in $\mathfrak{T}'$.

Der schlichten Überdeckung von $\mathfrak{T}'$ durch die Mengen $\mathfrak{N}(M)$ entspricht eine Äquivalenzrelation $R$ über $\mathfrak{T}'$, deren Äquivalenzklassen gerade die Mengen $\mathfrak{N}(M)$ sind; wegen (7) läßt sich $R$ folgendermaßen formulieren:

$$\mathfrak{p} \underset{R}{\sim} \mathfrak{q} \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{p}^T = \mathfrak{q}^T.$$

(10) $\mathfrak{T}_0$ *ist homöomorph zu dem Quotientenraum* $\mathfrak{T}_1 = \dfrac{\mathfrak{T}'}{R}$.

*Beweis*: Die Zuordnung $M \to \mathfrak{N}(M)$ bildet $\mathfrak{T}_0$ eineindeutig auf $\mathfrak{T}_1$ ab; im folgenden soll der Träger von $\mathfrak{T}_1$ mit dem von $\mathfrak{T}_0$ identifiziert werden. Die Topologie von $\mathfrak{T}_0$ wird als Hüllentopologie definiert (vgl. [1], § 10): Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge und $N$ ein Punkt von $\mathfrak{T}_0$, so gehört $N$ genau dann zu $\overline{\mathfrak{M}}$, falls $N \geqq \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ ist. $\mathfrak{M}$ ist also in $\mathfrak{T}_0$ genau dann abgeschlossen, wenn

(x) aus $N \geqq \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ folgt, daß $N \in \mathfrak{M}$ gilt.

Nach der Definition der Quotiententopologie (vgl. etwa N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre III, Chap. I) ist eine Menge $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{T}_1$ genau dann abgeschlossen, wenn folgendes gilt:

(y) $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{T}'$.

a) Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{p} \in \overline{\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)}$. Nach (9) gibt es ein maximales Ideal $N$, für das $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}(N)$ gilt. Ist $t \in T(A)$ und $t\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)\right) = 0$, so wegen der Stetigkeit von $t$ auch $t(\mathfrak{p}) = 0$ und damit nach (7) $N \geqq \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$. Wegen (x) gehört $N$ zu $\mathfrak{M}$, also $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}(N) \subseteqq \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)$. $\mathfrak{M}$ ist somit nach (y) in $\mathfrak{T}_1$ abgeschlossen.

b) Ist $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{T}_1$ und $N$ ein nicht in $\mathfrak{M}$ liegender Punkt aus $\mathfrak{T}_1$, so wollen wir zeigen, daß $N \not\geqq \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ ist; dann ist $\mathfrak{M}$ nach (x) auch in $\mathfrak{T}_0$ abgeschlossen.

Es sei $e_0$ ein nicht in (dem Ideal) $N$ liegendes Idempotent aus $T(A)$ und $\mathfrak{D} = \mathfrak{N}(e_0) \cap \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)$; $\mathfrak{N}(e_0)$ ist (vgl. den Beweis von (6)) eine abgeschlossene und kompakte Teilmenge von $\mathfrak{T}$, die ganz in $\mathfrak{T}'$ enthalten ist, also eine (in $\mathfrak{T}'$) abgeschlossene und kompakte Teilmenge von $\mathfrak{T}'$; $\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)$ ist wegen (y) eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{T}'$; deshalb ist $\mathfrak{D}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{T}'$. Zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{D}$ gibt es wegen (9) ein $M_\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{p} \in \mathfrak{N}(M_\mathfrak{p})$. Da $N$ nicht in $\mathfrak{M}$ liegen sollte, also von allen $M_\mathfrak{p}$ verschieden ist, liegt in jedem $M_\mathfrak{p}$ nach (1) ein idempotentes Element $e_\mathfrak{p}$, das nicht in $N$ liegt. $\mathfrak{T}' - \mathfrak{N}(e_\mathfrak{p})$ ist eine offene Teilmenge von $\mathfrak{T}'$, die wegen (7) $\mathfrak{p}$ enthält. Somit gibt es endlich viele Punkte aus $\mathfrak{D}$, etwa $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ derart, daß

$$\bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{T}' - \mathfrak{N}(e_{\mathfrak{p}_i})) \geqq \mathfrak{D}, \text{ also } \bigcup_{i=1}^{n} (\mathfrak{T}' - \mathfrak{N}(e_{\mathfrak{p}_i})) \cup (\mathfrak{T}' - \mathfrak{N}(e_0)) \geqq \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M).$$

Da nach der Definition der Mengen $\mathfrak{N}(t)$ das Element $e_0$ über $\mathfrak{T} - \mathfrak{N}(e_0)$ und $e_{\nu_i}$ über $\mathfrak{T} - N(e_{\nu_i})$ verschwindet, wird für das Element $e = e_0 \prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}$ einerseits $e\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}(M)\right) = 0$, d. h. nach (7): $e \in \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$. Da $e_0, e_{\nu_1}, \ldots, e_{\nu_n}$ nicht in $N$ liegen, liegt andrerseits nach (2) auch $e$ nicht in $N$.

Nach (10) ist $\mathfrak{T}_0$ homöomorph zu $\frac{\mathfrak{T}'}{R}$, und nach (7) sind die Elemente aus $T(A)$, also wegen II auch die Elemente aus $A$ auf den Klassen $\mathfrak{N}(M)$ der Relation $R$ konstant. Somit ergibt sich nun (8) ohne Benutzung von (5); der nachzuweisende Isomorphismus $\alpha$ wird durch $a^\alpha(M) = a(\mathfrak{N}(M))$, $a \in A$ und $M \in \mathfrak{T}_0$, geliefert.

**Satz 11:** *Ist $\mathfrak{T}$ ein lokal kompakter Raum und $A$ eine ($K$-)Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$, die* II *erfüllt, so ist $A$ isomorph zu einer ($K$-)Algebra zwischen $T(K, \mathfrak{T}_0)$ und $F(K, \mathfrak{T}_0)$. Diese Isomorphie wird induziert durch eine Homöomorphie von $\frac{\mathfrak{T} - \mathfrak{B}}{R}$ zu $\mathfrak{T}_0$.*

Dabei ist $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{T} : \mathfrak{p}^T = T(A)\}$ und $R$ die Relation: $\mathfrak{p} \underset{R}{\sim} \mathfrak{q}$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}^T = \mathfrak{q}^T$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{T} - \mathfrak{B}$.

Die Bedeutung des Strukturraums $\mathfrak{T}_0$ der maximalen $K$-Ideale aus $T(A)$ für die Darstellbarkeit einer normierten, II erfüllenden $K$-Algebra $A$ als Funktionenalgebra ergibt sich aus der negativen Formulierung des Satzes 11: Ist $A$ nicht als Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T}_0)$ darstellbar, so gibt es keinen lokal kompakten Raum $\mathfrak{T}$, für den $A$ zu einer Teilalgebra von $F(K, \mathfrak{T})$ isomorph wäre.

## Literaturverzeichnis.

[1] *R. Baer*, Normierte Funktionenalgebren, Journ. f. d. r. u. a. Math. **204** (1960), 41–66.

Eingegangen 27. Juli 1959.

# Some groups of transformations defined by Jordan algebras. II. Groups of type $F_4$ [1]).

**To Wolfgang Krull on his 60th birthday.**

By *N. Jacobson* at New Haven (U. S. A.).

---

The principal objective of this paper is the study of one of the types of linear groups defined in I [15]: the groups of automorphisms of central simple exceptional Jordan algebras. This can also be considered as the second step in a program of studying "exceptional" linear groups analogous to the exceptional simple Lie groups via non-associative algebras. The first step in this program has been taken in another paper ([13]) in which we studied the counterparts of the Lie groups of type $G_2$ as groups of automorphisms of Cayley algebras. In an analogous fashion the present paper deals with the counterparts of the Lie group $F_4$ as groups of automorphisms of exceptional Jordan algebras.

An exceptional Jordan algebra may be a division algebra in a certain sense. Such algebras are excluded from our considerations. On the other hand, most of our results are valid for arbitrary reduced (non-division) exceptional simple Jordan algebras $\mathfrak{J}$. We prove simplicity of the group of automorphisms of any $\mathfrak{J}$ containing non-zero nilpotent elements. This condition on $\mathfrak{J}$ is the analogue of Dieudonné's condition that the Witt index is positive for orthogonal and unitary groups. The algebras satisfying the condition include the so-called split exceptional Jordan algebras. It has been shown by Seligman that the groups of automorphisms of the split exceptional Jordan algebras are the groups of type $F_4$ which have been defined by Chevalley ([7]).

A number of results are treated in somewhat greater detail than is strictly necessary for the structure theory, since these appear to be of some interest on their own. These are: a discussion of the triality principle for arbitrary Cayley algebras [2]) and an extension of this to certain nine dimensional spaces.

Throughout the paper the term "algebra" will be synonymous with "finite dimensional algebra over a field of characteristic $\neq 2, 3$." The restriction: characteristic $\neq 3$ is used only in a few places and so one suspects that it may be easy to drop this. We have therefore indicated explicitly the places where this is used.

---

[1]) This research was supported by the United States Air Force through the Air Force Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. AF 49 (C 38) 515. Reproduction in whole or in part is permitted for any purpose of the United States Government.

[2]) The case of split Cayley algebras is considered in Chevalley [6] and the case of the Cayley division algebra over the field of real numbers is discussed in Freudenthal [10].

## 1. Jordan algebras of symmetric bilinear forms and Clifford algebras.

Let $\mathfrak{M}$ be a vector space over a field $\Phi$ equipped with a non-degenerate symmetric bilinear form $(x, y)$. We consider the algebra $\mathfrak{A} = \Phi 1 \oplus \mathfrak{M}$ determined by $(x, y)$ by the rules that $1$ is the identity of $\mathfrak{A}$, and for $x, y$ in $\mathfrak{M}$ the product $x \cdot y$ is given by

$$x \cdot y = (x, y)\, 1. \tag{1}$$

The algebra $\mathfrak{A}$ is a Jordan algebra which is called *the Jordan algebra of the bilinear form* $(x, y)$ in $\mathfrak{M}$ (I, p. 184 and p. 187). We assume throughout that $\dim \mathfrak{M} > 1$, which implies that $\mathfrak{A}$ is central simple. If $a = \xi + x (\equiv \xi 1 + x)$, $\xi$ in $\Phi$, $x$ in $\mathfrak{M}$, the generic trace and norm of $a$ are respectively

$$T(a) = 2\xi, \quad N(a) = \xi^2 - (x, x). \tag{2}$$

The group $L(\mathfrak{A})$ introduced in I is the group of $1-1$ linear mappings $\eta$ of $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}$ such that $N(a^\eta) = N(a)$, $a \in \mathfrak{A}$. In the present case this is just the orthogonal group $O(\mathfrak{A}, N)$ of the space $\mathfrak{A}$ relative to the quadratic form $N$ or relative to the associated bilinear form $\frac{1}{2}(N(a+b) - N(a) - N(b)) = \xi\zeta - (x, y)$ for $a = \xi + x$, $b = \zeta + y$[3]). The subgroup $G(\mathfrak{A})$ of $L(\mathfrak{A})$ is the group of automorphisms of $\mathfrak{A}$. This is the set of elements of $L$ which satisfy $1^\eta = 1$. Since $\mathfrak{M} = (\Phi 1)^\perp$ it is clear that an automorphism maps $\mathfrak{M}$ into itself and so is an orthogonal transformation in $\mathfrak{M}$ relative to $(x, y)$. Conversely, if $\eta \in O(\mathfrak{M}, (x, y))$ then the linear extension of $\eta$ to $\mathfrak{A}$ satisfying $1^\eta = 1$ is an automorphism. In this way we obtain an identification of $G(\mathfrak{A})$ with $O(\mathfrak{M}, (x, y))$. We remark also that if $\mathfrak{A}$ is any vector space with a non-degenerate symmetric bilinear form, then we can choose a suitable multiple of this form and obtain a vector $1$ of length $1$. Then we may write $\mathfrak{A} = \Phi 1 \oplus \mathfrak{M}$ where $\mathfrak{M} = (\Phi 1)^\perp$ and we can consider the given quadratic form $N(a) = N(a, a)$ as the norm form of the Jordan algebra of $\mathfrak{M}$ relative to $-N(x,y)$. Hence the norm forms $N(a)$ are essentially arbitrary (non-degenerate) quadratic forms.

If $a$ is an element of a Jordan algebra then the operator $U_a$ is defined as $2R_a^2 - R_{a^2}$ where $R_a$ is the mapping $x \to x \cdot a$. If $\mathfrak{A}$ is central simple the linear transformations of the form $\prod_{i=1}^{r} U_{a_i}$ where the $a_i \in \mathfrak{A}$ and $\Pi N(a_i) = 1$ are in $L(\mathfrak{A})$. These form a subgroup $L_2(\mathfrak{A})$ of $L(\mathfrak{A})$ called the reduced norm preserving (n. p.) subgroup of the n. p. group $L(\mathfrak{A})$. Now assume $\mathfrak{A} = \Phi 1 \oplus \mathfrak{M}$ as before and let $b$ be an element of $\mathfrak{A}$ such that $N(b) \neq 0$. Then $V_b = N(b)^{-1}\, U_b = S_1 S_b$ where $S_x$ denotes the symmetry in $\mathfrak{A}$ (relative to $N$) determined by the non-isotropic vector $x$ (that is, with respect to the hyperplane orthogonal to $x$). It follows from this that every rotation of $\mathfrak{A}$ has the form $\prod_{1}^{r} V_{b_i}$ where the $N(b_i) \neq 0$ (I, p. 187). It follows also that $L_2(\mathfrak{A})$ is the so-called reduced orthogonal group $O'(\mathfrak{A}, N)$, which can be defined as the set of rotations of the form $\prod_{i=1}^{2r} S_{c_i}$ such that $\prod_{1}^{2r} N(c_i)$ is a square, or equally well, such that $\prod_{1}^{2r} N(c_i) = 1$.

Let $x \in \mathfrak{M}$. Then $1\, U_x = (x, x)\, 1 = -N(x)\, 1$, $x U_x = -N(x)\, x$ and $y U_x = N(x)\, y$ if $y \in \mathfrak{M}$ and $y \perp x$. Hence if $N(x) \neq 0$ then $V_x = N(x)^{-1} U_x$ induces the symmetry $\bar{S}_x$ determined by $x$ in $\mathfrak{M}$ and maps $1$ into $-1$. This implies that the automorphisms of $\mathfrak{A}$ which induce rotations in $\mathfrak{M}$ can be characterized as the mapping $\prod_{1}^{2r} V_{x_i}$ such that $x_i \in \mathfrak{M}$

[3]) Throughout the paper we use quadratic forms and their associated bilinear forms interchangeably.

and $N(x_i) \neq 0$. The automorphisms which induce the elements of the reduced orthogonal group $O'(\mathfrak{M}, (x, y))$ can be characterized as the mappings $\prod_1^{2r} U_{x_i}$, $x_i \in \mathfrak{M}$, $\prod_1^{2r} N(x_i) = 1$.

We consider next the Clifford algebras $C(\mathfrak{A}, N)$ and $C(\mathfrak{M}, (x, y))$ defined by $N(a, b)$ and $(x, y)$ respectively (Chevalley [6], Artin [4] p. 186). We denote the identity elements of $C(\mathfrak{A}, N)$ and $C(\mathfrak{M}, (x, y))$ by I and 1 respectively and we identify $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{M}$ as usual with the corresponding subspaces of $C(\mathfrak{A}, N)$ and $C(\mathfrak{M}, (x, y))$. Also we shall identify $\mathfrak{A}$ with the subspace $\Phi 1 + \mathfrak{M}$ of $C(\mathfrak{M}, (x, y))$. Let $C^e(\mathfrak{A}, N)$ denote the subalgebra of even elements of $C(\mathfrak{A}, N)$ [4]). Then $C^e(\mathfrak{A}, N)$ is generated by the even elements $1x$, $x \in \mathfrak{M}$. Since $1 \perp \mathfrak{M}$,

$$(1x)^2 = -N(x)\,\mathrm{I} = (x, x)\,\mathrm{I}. \tag{3}$$

This implies that we have an isomorphism $\varepsilon$ of $C^e(\mathfrak{A}, N)$ onto $C(\mathfrak{M}, (x, y))$ such that

$$(1x)^\varepsilon = x, \quad \mathrm{I}^\varepsilon = 1. \tag{4}$$

If $a = \xi 1 + x$, $x \in \mathfrak{M}$, is in the subspace $\mathfrak{A}$ of $C(\mathfrak{A}, N)$ then in $C(\mathfrak{A}, N)$ we have $1a = \xi 1^2 + 1x = \xi \mathrm{I} + 1x$. Hence $1a \in C^e(\mathfrak{A}, N)$ and

$$(1a)^\varepsilon = \xi 1 + x = a \tag{5}$$

where $a$ is in the subspace $\mathfrak{A} = \Phi 1 + \mathfrak{M}$ of $C(\mathfrak{M}, (x, y))$.

We recall the definition of the Clifford group $\Gamma(\mathfrak{A}, N)$ as the multiplicative group of elements $c$ of $C(\mathfrak{A}, N)$ such that $c^{-1}\mathfrak{A}c \subseteq \mathfrak{A}$. We also have the subgroup $\Gamma^e(\mathfrak{A}, N) = \Gamma(A, N) \cap C^e(\mathfrak{A}, N)$ and the *reduced Clifford group* $\Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$ defined as the subset of $\Gamma^e(\mathfrak{A}, N)$ of elements of norm one (Chevalley [6] p. 52). If $c \in \Gamma(\mathfrak{A}, N)$ then the mapping $a \to c^{-1}ac$ of $\mathfrak{A}$ is an orthogonal transformation $\chi(c)$. The mapping $c \to \chi(c)$ is a representation of $\Gamma(\mathfrak{A}, N)$. Since the only even elements in the center of $C(\mathfrak{A}, N)$ are the elements of $\Phi\mathrm{I}$ it follows that the kernel of the restriction of $\chi$ to $\Gamma^e(\mathfrak{A}, N)$ is the set of non-zero elements of $\Phi\mathrm{I}$. This implies that the kernel of the restriction of $\chi$ to $\Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$ consists of the two elements I, $-$ I. It is known also that the image of $\Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$ under $\chi$ is the reduced orthogonal group $O'(\mathfrak{A}, N) = L_2(\mathfrak{A})$. The formula

$$b^{-1}ab = -a + 2\frac{N(a, b)}{N(b)}\,b = -aS_b \tag{6}$$

for $a, b \in \mathfrak{A}$, $N(b) \neq 0$ implies that $(1b)^\chi (= \chi(1b)) = S_1 S_b = V_b$. If $\eta \in O'(\mathfrak{A}, N)$,

$$\eta = U_{b_1} U_{b_2} \cdots U_{b_r} = S_1 S_{b_1} S_1 S_{b_2} \cdots S_1 S_{b_r}$$

where $\prod_1^r N(b_i) = 1$; hence $(1b_1 1b_2 \cdots 1b_r)^\chi = \eta$. Since $1b_1 1b_2 \cdots 1b_r \in \Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$, it follows from this and the fact that the kernel of $\chi$ on $\Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$ is $\pm$ I that $\Gamma_0^e(\mathfrak{A}, N)$ is the set of elements of the form $1b_1 1b_2 \cdots 1b_r$ of $C^e(\mathfrak{A}, N)$ where the $b_i \in \mathfrak{A}$ and $\prod_1^r N(b_i) = 1$.

Similar considerations apply to $\Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ and these show that this group consists of the set of elements of $C(\mathfrak{M}, (x, y))$ of the form $x_1 x_2 \cdots x_{2r}$ where the $x_i \in \mathfrak{M}$ and $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$. We have $(x_1 x_2 \cdots x_{2r})^\chi = \bar{S}_{x_1} \bar{S}_{x_2} \cdots \bar{S}_{x_{2r}} = \bar{U}_{x_1} \bar{U}_{x_2} \cdots \bar{U}_{x_{2r}}$ where the $\bar{S}_x$ and $\bar{U}_x$ are restrictions to $\mathfrak{M}$ of $S_x$, $U_x$ defined in $\mathfrak{A}$.

---

[4]) In this paper the term "subalgebra generated by a set $S$" will mean the smallest subalgebra containing $S$ and 1; "subalgebra strictly generated by $S$" will mean the smallest subalgebra containing $S$.

## 2. Cayley algebras.

In this section we collect the results on Cayley algebras which will be needed in the sequel. Most of the results stated without proof can be found in Jacobson [13].

Let $\mathfrak{C}$ be a (generalized) Cayley algebra over the field $\Phi$. We have the usual involution $\pi$: $a \to \bar{a}$ in $\mathfrak{C}$ and we write $N(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$. Then $N(a)$ is a quadratic form on the eight dimensional space $\mathfrak{C}$ permitting composition: $N(ab) = N(a)\,N(b)$ and the associated bilinear form $N(a, b) = \frac{1}{2}[N(a+b) - N(a) - N(b)] = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a})$ is non-degenerate. Let $\mathfrak{C}_0 = (\Phi 1)^\perp$ be the space of skew elements of $\mathfrak{C}$ and write $a_L$, $a_R$ for the left and right multiplications in $\mathfrak{C}$ determined by $a \in \mathfrak{C}$. The algebra $\mathfrak{C}$ is alternative, that is, the associator $(a, b, c) \equiv (ab)\,c - a(bc)$ is an alternating function of its arguments. We obtain a standard generation of $\mathfrak{C}$ as follows. Let $i$ be any non-isotropic element of $\mathfrak{C}_0$. Then $\Phi[i]$ is a commutative, associative semi-simple two dimensional algebra. Next choose a non-isotropic $j \in \Phi[i]^\perp$. Then $ij = -ji$ and the subalgebra $\Phi[i, j]$ generated by $i$ and $j$ is a (generalized) quaternion algebra. Finally, let $l$ be a non-isotropic element of $\Phi[i, j]^\perp$. Then the subalgebra $\Phi[i, j, l]$ generated by $i, j, l$ is $\mathfrak{C}$ and every element of $\mathfrak{C}$ can be written in one and only one way in the form $a + bl$, $a, b \in \Phi[i, j]$. If $l^2 = \mu 1 \neq 0$ then the multiplication in $\mathfrak{C}$ is given by

$$(7) \qquad (a + bl)\,(c + dl) = (ac + \mu\bar{d}b) + (da + b\bar{c})\,l$$

if $c, d \in \Phi[i, j]$.

If we introduce the composition $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ in $\mathfrak{C}$ we obtain a Jordan algebra $\mathfrak{C}^+$. If $x \in \mathfrak{C}_0$ then $x^2 = -N(x)\,1$, which shows that $\mathfrak{C}$ is the Jordan algebra of the bilinear form $-N(x, y)$ in $\mathfrak{C}_0$. The generic trace and norm of $a = \xi + x$ in $\mathfrak{C}^+$ are respectively $2\xi$ and $\xi^2 + N(x) = a\bar{a}$, so that these coincide with the trace and norm as defined in $\mathfrak{C}$. The multiplication by $a$ in $\mathfrak{C}^+$ is $R_a \equiv \frac{1}{2}(a_R + a_L)$. If we use the fact that any two elements of $\mathfrak{C}$ generate an associative algebra we can verify that $bU_a = aba\,(= (ab)a = a(ba))$. Thus $U_a = a_L a_R = a_R a_L$. The results quoted in the last section show that the rotation group in $\mathfrak{C}$ (relative to $N$) is generated by the mappings $V_b = N(b)^{-1}\,U_b$ with $N(b) \neq 0$ and the reduced orthogonal group $O'(\mathfrak{C}, N)$ is the set of mappings $\eta = U_{b_1} U_{b_2} \cdots U_{b_r}$ such that $\prod_1^r N(b_i) = 1$.

We recall the following relations for $N(a, b)$:

$$(8) \qquad N(ab, c) = N(a, c\bar{b}), \quad N(ab, c) = N(b, \bar{a}c),$$
$$N(a, b) = N(\bar{a}, \bar{b}).$$

Hence $N(ac, bc) = N(c)\,N(a, b)$, $N(ca, cb) = N(c)\,N(a, b)$. We recall that a linear transformation $A$ in a vector space with a bilinear form $N(a, b)$ is called *a similitude of ratio* $\alpha$ if $N(aA) = \alpha N(a)$ where $\alpha \neq 0$ is independent of $a$. It is easy to see that this implies that $(\det A)^2 = \alpha^n$, $n$ the dimensionality, so that if $n = 2\nu$ then $\det A = \pm\,\alpha^\nu$. $A$ is called *proper* if $\det A = \alpha^\nu$. In the case of $\mathfrak{C}$ the condition is that $\det A = \alpha^4$. The relations above show that if $N(c) \neq 0$ then $c_L$ and $c_R$ are similitudes of ratio $N(c)$. We proceed to show that these are proper by proving the following

**Lemma 1.** *The characteristic polynomial of* $c_L(c_R)$ *is* $(\lambda^2 - T(c)\,\lambda + N(c))^4$.

*Proof.* By subtracting a multiple of 1 from $c$ we obtain an element of $\mathfrak{C}_0$. It suffices to prove the result for elements of this type so we may assume $\bar{c} = -c$. Since the result to be established is a polynomial identity in the coordinates of $c$ we may assume $N(c) \neq 0$.

Then we may take $c = i$ where $i, j, l$ are canonical generators for $\mathfrak{C}$. Then $\mathfrak{C}$ has the basis $(1, i, j, ij, l, il, jl, (ij)\, l)$. If $i^2 = \alpha$ then $i_L$ has the matrix

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{diag}\{Q, Q, Q, -Q\}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Hence the characteristic polynomial of $c_L = i_L$ is $(\lambda^2 - \alpha)^4$. Similarly, the matrix of $c_R$ relative to our basis is $\operatorname{diag}\{Q, -Q, -Q, Q\}$ so that again the characteristic polynomial is $(\lambda^2 - \alpha)^4$.

This result implies that $\det c_L = N(c)^4$ and $\det c_R = N(c)^4$, which shows that $c_L$ and $c_R$ are proper similitudes when $N(c) \neq 0$.

It is known that the mappings $x \to x_L$, $x \to x_R$, $x \in \mathfrak{C}_0$, define two inequivalent irreducible representations $\varrho_L$, $\varrho_R$ of the Clifford algebra $C(\mathfrak{C}_0, -N(x, y))$ acting on $\mathfrak{C}$ and that $C(\mathfrak{C}_0, -N(x, y)) \cong \Phi_8 \oplus \Phi_8$ a direct sum of two complete eight rowed matrix algebras over $\Phi$ (Jacobson [11] p. 58). If we apply the isomorphism $\varepsilon$ of $C^e(\mathfrak{C}, N)$ onto $C(\mathfrak{C}_0, -N)$ we obtain inequivalent irreducible representations $\varrho_1 = \varepsilon\varrho_L$, $\varrho_2 = \varepsilon\varrho_R$ of $C^e(\mathfrak{C}, N)$ and, by restriction, representations $\varrho_i$ of $\Gamma_0^e(\mathfrak{C}, N)$. The induced representations $\varrho_i$ of $\Gamma_0^e(\mathfrak{C}, N)$ are inequivalent and irreducible (Chevalley [6] p. 57). Any element $u$ of $\Gamma_0^e(\mathfrak{C}, N)$ has the form $u = 1b_1 1b_2 \cdots 1b_r$, $b_i \in \mathfrak{C}$, $\prod_1^r N(b_i) = 1$ and $u^e = b_1 b_2 \cdots b_r$, so that

$$\text{(10)} \qquad u^{\varrho_1} = b_{1L} \cdots b_{rL}, \quad u^{\varrho_2} = b_{1R} \cdots b_{rR}.$$

We recall also that for the representation $\chi$ defined in § 1 we have

$$\text{(11)} \qquad u^{\chi} = U_{b_1} U_{b_2} \cdots U_{b_r}.$$

We can now prove the following "triality principle" connecting the three representations $\chi$, $\varrho_1$, $\varrho_2$:

**Theorem 1.** *If $u \in \Gamma_0^e(\mathfrak{C}, N)$ then*

$$\text{(12)} \qquad (ab)\, u^{\chi} = (au^{\varrho_1})\, (bu^{\varrho_2})$$

*holds for all $a, b \in \mathfrak{C}$. Conversely, suppose $A_1, A_2, A_3$ are any orthogonal transformations in $\mathfrak{C}$ (relative to $N$) such that*

$$\text{(13)} \qquad (ab)\, A_1 = (aA_2)\, (bA_3)$$

*then there exists a unique $u \in \Gamma_0^e(\mathfrak{C}, N)$ such that $A_1 = u^{\chi}$, $A_2 = u^{\varrho_1}$, $A_3 = u^{\varrho_2}$.*

*Proof.* We recall Moufang's identity: $c(ab)\, c = (ca)\, (bc)$, which can be re-written as $(ab) U_c = (ac_L)\, (bc_R)$. Iteration of this gives

$$\text{(14)} \qquad (ab)\, U_{b_1} \cdots U_{b_r} = (ab_{1L} \cdots b_{rL})\, (bb_{1R} \cdots b_{rR}),$$

which, by (10) and (11), is the required relation (12) for $u = 1b_1 1b_2 \cdots 1b_r$, $\Pi N(b_i) = 1$. We note next that if $A_1$ is any rotation in $\mathfrak{C}$ then there exist proper similitudes $A_2, A_3$ determined up to scalar factors satisfying (13). Thus we may write $A_1 = V_{b_1} V_{b_2} \cdots V_{b_r}$ where $V_{b_i} = N(b_i)^{-1} U_{b_i}$ and Moufang's identity shows that $A_2 = \prod_1^r N(b_i)^{-1} b_{1L} \cdots b_{rL}$, $A_3 = b_{1R} \cdots b_{rR}$ satisfy (13). The result noted before shows that these are proper similitudes. Since (13) implies that $(ab)\, A_1^{-1} = (aA_2^{-1})\, (bA_3^{-1})$, to prove the assertion on the uniqueness of $A_2$ and $A_4$ it suffices to take $A_1 = 1$. Then we have $ab = (aA_2)\, (bA_3)$. This gives $1A_2 = q$, $1A_3 = q^{-1}$, $A_2 = q_R$, $A_3 = q_L^{-1}$. Hence $(aq)\, (q^{-1}b) = ab$ or $(aq)\, b = a(qb)$. Since the nucleus of $\mathfrak{C}$ is $\Phi 1$ this implies that $q = \beta 1 \in \Phi 1$ and $A_2 = \beta 1$, $A_3 = \beta^{-1} 1$ as required. We prove next that if $A_1$ is orthogonal of determinant $-1$ then no similitudes $A_2, A_3$ satisfying (13) exist. It suffices to show this for $A_1 = \pi$. Then the

condition is $\overline{ab} = (aA_2)(bA_3)$. Then $1A_2 = q$, $1A_3 = q^{-1}$, $aA_2 = \bar{a}q$, $bA_3 = q^{-1}\bar{b}$ so that $\overline{ba} = (\bar{a}q)(q^{-1}\bar{b})$. Hence $ba = (aq)(q^{-1}b)$, or $(qb)a = (aq)b$. Then $qa = aq$ and $q = \beta 1$ which implies that $ba = ab$ for all $a, b$. This is impossible and so no $A_2, A_3$ can be found for $\pi$. Now let $A_1, A_2, A_3$ be any three orthogonal transformations satisfying (13). Then $A_1$ is a rotation. Hence we must have $A_1 = V_{b_1} \cdots V_{b_r}$, $A_2 = \beta \prod_1^r N(b_i)^{-1} b_{1L} \cdots b_{rL}$, $A_3 = \beta^{-1} b_{1R} \cdots b_{rR}$. Since $A_3$ is orthogonal and is a similitude of ratio $\beta^{-2} \prod_1^r N(b_i)$ we have $\prod_1^r N(b_i) = \beta^2$. Then $A_1 = V_{b_1} \cdots V_{b_r} = \prod_1^r N(b_i)^{-1} U_{b_1} \cdots U_{b_r} = U_{b_1} \cdots U_{b_{r+1}}$ where $b_{r+1} = \beta^{-1} 1$ and $\prod_1^{r+1} N(b_j) = 1$ and $A_2 = \beta \Pi N(b_i)^{-1} b_{1L} \cdots b_{rL} = b_{1L} \cdots b_{r+1,L}$, $A_3 = b_{1R} \cdots b_{r+1,R}$. Thus $A_1 \in O'$ and $A_1, A_2, A_3$ have the required form, that is, $A_1 = u^\chi$, $A_2 = u^{\varrho_1}$, $A_3 = u^{\varrho_2}$ for $u = 1b_1 \cdots 1b_{r+1}$ where $\prod_1^{r+1} N(b_j) = 1$. It is known that the algebra $C^*(\mathfrak{C}, N)$ is semi-simple and has at most two simple components (Chevalley [6] p. 44), and therefore at most two inequivalent irreducible representations. On the other hand, $\varrho_1$ and $\varrho_2$ are two such representations. It follows that $u^{\varrho_1} = v^{\varrho_1}$, $u^{\varrho_2} = v^{\varrho_2}$ for $u, v \in C^*(\mathfrak{C}, N)$ implies $u = v$. This proves that the element $u \in \Gamma_0^*$ is uniquely determined by $A_1, A_2, A_3$.

The image of $\Gamma_0^*$ under $\chi$ is the reduced orthogonal group which contains the commutator group of the orthogonal group. Since the latter acts irreducibly in $\mathfrak{C}$ (Chevalley [6] p. 32), $\chi$ is an irreducible representation of $\Gamma_0^*$. In § 6 we shall establish a complete symmetry among the representations $\chi, \varrho_1, \varrho_2$ of $\Gamma_0^*$. We shall prove also that all three of these representations are inequivalent. (We have already noted that $\varrho_1$ and $\varrho_2$ are inequivalent.)

A Cayley algebra may be a division algebra. The condition for this is that $N(a) \neq 0$ for $a \neq 0$, that is, the Witt index of $N$ is 0. If $\mathfrak{C}$ is not a division algebra, $\mathfrak{C}$ is said to be *split*. Over a given field there is only one such algebra and this is analogous to the $2 \times 2$ matrix algebra $\Phi_2$, which can be considered a split quaternion algebra. We shall also consider the two dimensional algebra $\Phi \oplus \Phi$ as a split two dimensional commutative associative semi-simple algebra. If $\mathfrak{C}$ is a split Cayley algebra, then the norm form $N(a)$ has maximal Witt index $= 4$. $\mathfrak{C}$ contains idempotents $\neq 0, 1$ and the maximum number of non-zero orthogonal idempotents in any set is two (cf I, Th. 2). If $e_1, e_2$ are non-zero orthogonal idempotents then we have the Peirce decomposition

$$\mathfrak{C} = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2 \oplus \mathfrak{C}_{12} \oplus \mathfrak{C}_{21} \tag{15}$$

where $\mathfrak{C}_{ij} = \{c_{ij} \mid e_i c_{ij} = c_{ij} = c_{ij} e_j\}$. We can find a split quaternion subalgebra $\mathfrak{B}$ of $\mathfrak{C}$ so that if $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}_0$ then

$$\mathfrak{C}_{21} = \mathfrak{B}_0 e_1, \quad \mathfrak{C}_{12} = \mathfrak{B}_0 e_2 \tag{16}$$

and the multiplication in $\mathfrak{C}$ can be deduced from the properties of the $e_i$ and the rules

$$(b_1 e_i)(b_2 e_i) = (b_1 \times b_2) e_j, \quad b_1 \times b_2 = \tfrac{1}{2}(b_1 b_2 - b_2 b_1) \tag{17}$$

$$(b_1 e_i)(b_2 e_j) = N(b_1, b_2) e_j, \quad i \neq j. \tag{18}$$

Any element of a Cayley division algebra can be imbedded in a quadratic subfield and any two elements can be imbedded in a quaternion subalgebra. Any element of a split Cayley algebra can be imbedded in a split quaternion subalgebra. We shall need also

**Lemma 2.** *Let $\mathfrak{A}$ be a three dimensional subalgebra of a split Cayley algebra $\mathfrak{C}$ such that $\mathfrak{A}$ contains a two dimensional semi-simple subalgebra $\Phi[a]$. Then $\mathfrak{A}$ can be imbedded in a split quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$.*

*Proof.* $\mathfrak{A}$ is generated by $a$ and a second element; hence, $\mathfrak{A}$ is associative. The only possibility for $\mathfrak{A}$ to be semi-simple are that it be a direct sum of three copies of $\Phi$ or a quadratic field and a copy of $\Phi$. The former case can be realized from the latter on extension of the base field. However, this is ruled out since $\mathfrak{C}$ does not contain three non-zero orthogonal idempotents. Hence $\mathfrak{A} = \Phi[a] + \Phi z$ where $\Phi z$ is the one dimensional radical. Since $\Phi[a]$ contains the identity and $\Phi[z]$ is a left $\Phi[a]$-module, $\Phi[a]$ cannot be a quadratic subfield. Hence $\Phi[a] = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2$ where the $e_i$ are orthogonal idempotents. Also for a suitable ordering of the $e_i$ we have $e_1 z = z$, $e_2 z = 0$, $z e_1 = 0$, $z e_2 = z$, so that $z$ is in the Peirce space $\mathfrak{C}_{12}$ relative to the $e_i$. If we choose $\mathfrak{B}$ as above then $z = b e_2$, $b \in \mathfrak{B}_0$. Choose $b'$ in $\mathfrak{B}_0$ so that $N(b, b') = 1$. Then if $w = b' e_1$, $w^2 = 0$, $zw = (b e_2)(b' e_1) = e_1$, $wz = (b' e_1)(b e_2) = e_2$. Hence $\mathfrak{D} = \Phi e_1 + \Phi e_2 + \Phi z + \Phi w \cong \Phi_2$ is a split quaternion algebra.

## 3. Exceptional Jordan algebras.

Let $\mathfrak{J}$ be an exceptional central simple Jordan algebra. Then $\mathfrak{J}$ is 27 dimensional and its degree is three in the sense that the generic minimum polynomial is of degree three. $\mathfrak{J}$ is either a division algebra, that is, every element $a \neq 0$ of $\mathfrak{J}$ has a Jordan inverse $b$ satisfying $a \cdot b = 1$, $a^2 \cdot b = a$ or $\mathfrak{J}$ is reduced. In the latter case $\mathfrak{J}$ has three non-zero orthogonal idempotents. If $\mathfrak{J}$ is a division algebra any $a$ of $\mathfrak{J}$ which is not a multiple of 1 generates an associative cubic field. If $\mathfrak{J}$ is reduced then there exists a Cayley algebra $\mathfrak{C}$ and a matrix

$$\gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \quad \gamma_i \neq 0 \text{ in } \Phi, \tag{19}$$

such that $\mathfrak{J}$ is isomorphic to the algebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$, the set of $\gamma$-hermitian $3 \times 3$ Cayley matrices. Thus $A$ in $\mathfrak{C}_3$ is in $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ if and only if $A = \gamma^{-1} \bar{A}' \gamma$ and the multiplication in $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. The elements of $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ have the form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \gamma_1^{-1}\gamma_3 \bar{a}_2 \\ \gamma_2^{-1}\gamma_1 \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{20}$$

where the $\alpha_i \in \Phi$ and $\bar{a} = a^\pi$ the conjugate of the Cayley number $a$. The generic trace and norm are

$$T(A) = \sum_1^3 \alpha_i, \tag{21}$$

$$N(A) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + T(a_3(a_1 a_2)) - \alpha_1\gamma_3^{-1}\gamma_2 N(a_1) - \alpha_2\gamma_1^{-1}\gamma_3 N(a_2) - \alpha_3\gamma_2^{-1}\gamma_1 N(a_3).$$

Let $\{e_{ij} \mid i, j = 1, 2, 3\}$ be the usual set of matrix units in $\mathfrak{C}_3$. Then $\mathfrak{J}$ contains the three orthogonal idempotents $e_i = e_{ii}$. For $i \neq j$, we define

$$a_{ij} = a e_{ij} + \gamma_j^{-1}\gamma_i \bar{a} e_{ji}. \tag{22}$$

Then $a_{ij} \in \mathfrak{J}$. If $\mathfrak{J}_{ij} = \{a_{ij} \mid a \in \mathfrak{C}\}$, $a \to a_{ij}$ is a $1-1$ linear mapping of $\mathfrak{C}$ onto $\mathfrak{J}_{ij} = \mathfrak{J}_{ji}$ and

$$\mathfrak{J} = \Phi e_1 \oplus \Phi e_2 \oplus \Phi e_3 \oplus \mathfrak{J}_{12} \oplus \mathfrak{J}_{23} \oplus \mathfrak{J}_{13}. \tag{23}$$

This decomposition is the Peirce decomposition of $\mathfrak{J}$ relative to the $e_i$ since the $a_{ij}$ can be characterized by

$$e_i \cdot a_{ij} = \tfrac{1}{2} a_{ij} = a_{ij} \cdot e_j. \tag{24}$$

We list also the following relations:

$$a_{ij}^2 = \gamma_j^{-1}\gamma_i N(a)(e_i + e_j), \quad i \neq j, \tag{25}$$

$$2 a_{ij} \cdot b_{jk} = (ab)_{ij}, \quad i, j, k \text{ unequal}, \tag{26}$$

$$a_{ji} = \gamma_i^{-1}\gamma_j \bar{a}_{ij}. \tag{27}$$

Equations (24), (25), (26) and the fact that the $e_i$ are orthogonal idempotents completely describe the multiplication in $\mathfrak{J}$.

If $e_1, e_2, e_3$ are any three non-zero orthogonal idempotents in $\mathfrak{J}$ and

$$\mathfrak{J} = \Phi e_1 + \Phi e_2 + \Phi e_3 + \sum_{i<j} \mathfrak{J}_{ij}$$

is the Peirce decomposition relative to the $e_i$ then there exist elements $a_{12} \in \mathfrak{J}_{12}$, $b_{13} \in \mathfrak{J}_{13}$ such that $a_{12}^2 = (\gamma_2^*)^{-1}(e_1 + e_2) \neq 0$, $b_{13}^2 = (\gamma_3^*)^{-1}(e_1 + e_3) \neq 0$. If $a_{12}$ and $b_{13}$ are any two elements satisfying these conditions then there is an isomorphism of $\mathfrak{J}$ onto $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma^*)$, $\gamma^* = \operatorname{diag}\{1, \gamma_2^*, \gamma_3^*\}$ such that the images of the $e_i$, $i = 1, 2, 3$, are respectively the diagonal idempotents diag $\{1, 0, 0\}$, diag $\{0, 1, 0\}$, diag $\{0, 0, 1\}$ and the image of $a_{12}$ is $1_{12} \equiv e_{12} + (\gamma_2^*)^{-1} e_{21}$ and of $b_{13}$ is $1_{13} \equiv e_{13} + (\gamma_3^*)^{-1} e_{31}$ (Albert-Jacobson [3] p. 404).

There are many respresentations of a reduced Jordan algebra in the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. However, it is known that the Cayley algebra $\mathfrak{C}$ is determined up to isomorphism by $\mathfrak{J}$. Also the conditions on $\gamma$ and $\gamma'$ that $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma) \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma')$ are known (Albert-Jacobson [3]).

If $\mathfrak{D}$ is a subalgebra of $\mathfrak{C}$ containing 1 then $\mathfrak{D}$ is closed relative to the involution $a \to \bar{a}$ in $\mathfrak{C}$; hence $\mathfrak{D}$ determines a subalgebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ of $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ contains the $e_i = e_{ii}$ and the $1_{ij}$, $i < j$. Conversely, any subalgebra $\mathfrak{K}$ of $\mathfrak{J}$ which contains the $e_i$ and $1_{ij}$ has the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a subalgebra of $\mathfrak{C}$ containing 1. If $\mathfrak{D}$ is one of the following types: $\mathfrak{D} = \Phi$, $\mathfrak{D}$ a semi-simple associative commutative algebra of two dimensions, $\mathfrak{D}$ a quaternion algebra then $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ is a reduced special simple Jordan algebra of degree three. Moreover, this condition is characteristic. We call $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ split if either $\mathfrak{D} = \Phi \oplus \Phi$ or $\mathfrak{D}$ is a split quaternion algebra. In the first case $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma) \cong \Phi_3^+$ the Jordan algebra associated with the complete matrix algebra $\Phi_3$ and in the second case $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ is isomorphic to the subalgebra of $\Phi_6^+$ of symplectic symmetric matrices $A$ (satisfying $Q^{-1}A'Q = A$, $Q$ a skew matrix). If $\mathfrak{C}$ is split then we shall call $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ a *split* exceptional simple Jordan algebra. For such an algebra $\gamma$ can be replaced by any other diagonal matrix. Hence, because of the uniqueness of $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}$ is uniquely determined by the base field. If $\mathfrak{K}$ is any special reduced central simple subalgebra of degree three of an exceptional Jordan algebra $\mathfrak{F}$ then any isomorphism of $\mathfrak{K}$ into $\mathfrak{J}$ can be extended to an automorphism (Albert-Jacobson [3] p. 412).

## 4. Idempotents of exceptional Jordan algebras.

Let $e$ be an idempotent in a Jordan algebra $\mathfrak{J}$. Then we have the Peirce decomposition $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0(e) \oplus \mathfrak{J}_1(e) \oplus \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e)$ relative to $e$ where $\mathfrak{J}_i(e) = \{x_i \mid e \cdot x_i = i x_i\}$. The spaces $\mathfrak{J}_0$ and $\mathfrak{J}_1$ are subalgebras, $\mathfrak{J}_0 \cdot \mathfrak{J}_1 = 0$, $\mathfrak{J}_0 \cdot \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}} \subseteq \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ and $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}^2 \subseteq \mathfrak{J}_0 + \mathfrak{J}_1$. The idempotent $e$ is called primitive if $e \neq 0$ and it is impossible to write $e = e_1 + e_2$ where the $e_i$ are non-zero orthogonal idempotents. Since $e$ is the identity of $\mathfrak{J}_1(e)$, $e$ is primitive if and only if $\mathfrak{J}_1$ has no idempotents $\neq e, 0$. We shall call $e$ absolutely primitive if $e \neq 0$ and $\mathfrak{J}_1(e) = \Phi e$. This, of course, implies primitivity. If $\mathfrak{J}$ is simple over an algebraically closed field then $e \in \mathfrak{J}$ is primitive if and only if $e$ is absolutely primitive and every idempotent is a sum of non-zero absolutely primitive orthogonal idempotents (Albert [1] p. 522, Jacobson [12]).

Now let $\mathfrak{J}$ be a reduced simple exceptional Jordan algebra. Assume first that the base field is algebraically closed. Then $e \in \mathfrak{J}$ is (absolutely) primitive if and only if $T(e) = 1$. In this case we can imbed $e$ in a set of orthogonal idempotents $e_1, e_2, e_3$; $e_i \neq 0$, $e_1 = e$ and we may take the representation of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ so that these are diagonal. Then $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi e_2 + \Phi e_3 + \mathfrak{J}_{23}$ where $\mathfrak{J}_{ij}$ is the $(i, j)$-component in the Peirce

decomposition of $\mathfrak{J}$ relative to the $e_i$. Hence $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi(1-e) \oplus \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$ and $\mathfrak{J}_0(e)$ is the Jordan algebra of a non-degenerate symmetric bilinear form on the nine dimensional space $\mathfrak{M}$.

Now let the base field be arbitrary. Then an extension field argument shows that $e \in \mathfrak{J}$ is absolutely primitive if and only if $T(e) = 1$ and if this condition holds then $\mathfrak{J}_0(e)$ is the Jordan algebra of a non-degenerate symmetric bilinear form in a nine dimensional space. If $e = e^2 \neq 0, 1$ is not absolutely primitive then $T(e) = 2$. In this case we shall show that $e$ is a sum of two absolutely primitive idempotents. This is equivalent to showing that any absolutely primitive idempotent $e$ can be imbedded in a set of three pair-wise orthogonal idempotents $\neq 0$. Our proof of this will be based on the determination of the possible subalgebras which can be strictly generated by two absolutely primitive idempotents[4]).

Let $e$ be an absolutely primitive idempotent in the exceptional Jordan algebra $\mathfrak{J}$. Since $(2R_e - 1)(R_e - 1)R_e = 0$ any $x$ of $\mathfrak{J}$ satisfies: $x(2R_e - 1)R_e \in \mathfrak{J}_1(e) = \Phi e$. Hence there exists a $\xi$ in $\Phi$ such that $2(x \cdot e) \cdot e - x \cdot e = \xi e$. Since $T((x \cdot e) \cdot e) = T(x \cdot e)$ this gives $\xi = T(x \cdot e)$. Hence we have

$$2(x \cdot e) \cdot e = x \cdot e + T(x \cdot e)\, e. \tag{28}$$

If $f$ is a second absolutely primitive idempotent, then $2(x \cdot f) \cdot f = x \cdot f + T(x \cdot f) f$. Set $v = e - f$. Then $v^2 = e - 2e \cdot f + f$ and

$$e \cdot v^2 = e - 2e \cdot (e \cdot f) + e \cdot f = \delta e \tag{29}$$

where

$$\delta = 1 - T(e \cdot f). \tag{30}$$

Similarly,

$$f \cdot v^2 = \delta f. \tag{31}$$

Hence

$$v^3 = (e - f) \cdot v^2 = \delta v, \quad v^4 = \delta v^2. \tag{32}$$

We now introduce a commutative algebra $\mathfrak{B}'$ with a basis $(e', f', g')$ and multiplication table:

$$\begin{gathered} (e')^2 = e', \quad (f')^2 = f', \quad (g')^2 = \delta g' \\ e' \cdot f' = \tfrac{1}{2}(e' + f' - g'), \quad e' \cdot g' = \delta e', \; f' \cdot g' = \delta f'. \end{gathered} \tag{33}$$

The foregoing relations imply that we have a homomorphism of $\mathfrak{B}'$ onto $\mathfrak{B}$ mapping $e' \to e$, $f' \to f$, $g' \to v^2 = (e - f)^2$. We determine the possible structures of $\mathfrak{B}$ by investigating $\mathfrak{B}'$ and its ideals. We distinguish two possibilities for $\mathfrak{B}'$:

Case I. $\delta \neq 0$. Then $\delta^{-1} g' = 1$ acts as identity in $\mathfrak{B}'$. Set $k = 2e' - 1$, $l = 2f' - 1$. Then $(1, k, l)$ is a basis and

$$k^2 = 1, \quad l^2 = 1, \quad k \cdot l = 1 - 2\delta. \tag{34}$$

This shows that if $\mathfrak{M} = \Phi k + \Phi l$ then $\mathfrak{B}'$ is the Jordan algebra of a symmetric bilinear form in $\mathfrak{M}$. The discriminant of this form is

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\delta \\ 1 - 2\delta & 1 \end{vmatrix} = 4(\delta - \delta^2). \tag{35}$$

Hence $\mathfrak{B}'$ is simple if $\delta \neq 1$ $(T(e \cdot f) \neq 0)$ and has a radical if $\delta = 1$. In fact if $\delta = 1$ then $k^2 = 1 = l^2$, $k \cdot l = -1$ so that $z = k + l$ satisfies $k \cdot z = 0 = l \cdot z$. Then $\Phi z$ is the radical and $\mathfrak{B}'/\Phi z$ is a direct sum of two copies of $\Phi$. If $w = \alpha + \beta k + \gamma l$ then $k \cdot w = \alpha k + (\beta - \gamma) 1$ and $l \cdot w = \alpha l + (\gamma - \beta) 1$. This shows that $\Phi z$ is the only one dimensional ideal in $\mathfrak{B}'$.

Case II. $\delta = 0$. Set $z = e' - f' + g'$. Then $\mathfrak{B}'$ has the basis $(e', z, z^2)$ and

$$e' \cdot z = \tfrac{1}{2} z, \quad e' \cdot z^2 = 0, \quad z^3 = 0. \tag{36}$$

This implies that $\mathfrak{B}'$ is Jordan and the Peirce spaces relative to $e'$ are $\mathfrak{B}'_1(e') = \Phi e'$, $\mathfrak{B}'_{\frac{1}{2}}(e') = \Phi z$, $\mathfrak{B}'_0(e') = \Phi z^2$. It follows that the only non-trivial ideals in $\mathfrak{B}'$ are $\Phi z^2$ and $\Phi z + \Phi z^2$.

If $e$ and $f$ are distinct absolutely primitive idempotents in $\mathfrak{J}$ then the subalgebra $\mathfrak{B}$ strictly generated by $e$ and $f$ is a two or three dimensional homomorphic image of $\mathfrak{B}'$. The results on $\mathfrak{B}'$ and its ideals now give the following

**Theorem 2.** *Let $e$ and $f$ be distinct absolutely primitive idempotents in a reduced simple exceptional Jordan algebra $\mathfrak{J}$ and let $\mathfrak{B}$ be the subalgebra strictly generated by $e$ and $f$. Then $\mathfrak{B}$ has one of the following structures:*

I $\mathfrak{B}$ *is a three dimensional simple algebra of a non-degenerate symmetric bilinear form.*

II $\mathfrak{B}$ *is a three dimensional Jordan algebra of a degenerate symmetric bilinear form with a one dimensional radical.*

III $\mathfrak{B} = \Phi e \oplus \Phi f$ *with* $e \cdot f = 0$.

IV $\mathfrak{B}$ *is three dimensional with basis* $(e, z, z^2)$ *such that* $e \cdot z = \frac{1}{2} z$, $e \cdot z^2 = 0$, $z^3 = 0$.

V $\mathfrak{B}$ *is two dimensional with basis* $(e, z)$ *such that* $e \cdot z = \frac{1}{2} z$, $z^2 = 0$.

$\mathfrak{B}$ *is of type* I, II *or* III *if and only if* $T(e \cdot f) \neq 1$.

In cases I and II, $\mathfrak{B}$ is isomorphic to $\mathfrak{B}'$ and the identity of $\mathfrak{B}$ is $u = \delta^{-1} g = \delta^{-1}(e + f - 2e \cdot f)$. Then $T(u) = \delta^{-1} T(e + f - 2e \cdot f) = \delta^{-1}(2 - 2T(e \cdot f)) = 2$. In case III, $u = e + f$ is the identity of $\mathfrak{B}$ and again $T(u) = 2$. In any of these cases $u \neq 1$ and $e_1 = e$, $e_2 = u - e$, $e_3 = 1 - u$ are absolutely primitive and orthogonal. In cases IV and V, $\mathfrak{B}$ does not have an identity element. We remark also that the analysis of $\mathfrak{B}'$ shows that only I and III can occur if $\mathfrak{J}$ has no non-zero nilpotents. We can now prove

**Theorem 3.** *Let $e$ be an absolutely primitive idempotent in an exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$. Then $e$ can be imbedded in a set $e = e_1, e_2, e_3$ of mutually orthogonal absolutely primitive idempotents.*

*Proof.* The foregoing discussion shows that the present result will follow if we can prove the existence of an absolutely primitive idempotent $f$ such that $T(e \cdot f) \neq 1$. Let $f_1, f_2, f_3$ be non-zero orthogonal idempotents. If $T(e \cdot f_i) = 1$ for $i = 1, 2, 3$ then $T(e) = T(e \cdot 1) = T\left(e \cdot \sum_1^3 f_i\right) = 3$, contrary to $T(e) = 1$. Hence $T(e \cdot f_i) \neq 1$ for one of the $f_i$ and the result holds.

As we observed before this result implies that every primitive idempotent of $\mathfrak{J}$ is absolutely primitive.

## 5. An imbedding theorem.

The most complete results on automorphisms of exceptional Jordan algebras which we shall obtain will concern algebras containing non-zero nilpotents. It is known that $\mathfrak{J}$ has this property if and only if $\mathfrak{J} \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ where $\gamma = \operatorname{diag}\{1, -1, 1\}$ (Albert-Jacobson [3] p. 411). An (absolutely) primitive idempotent $e \in \mathfrak{J}$ will be called an *s-idempotent* if $\mathfrak{J}_0(e)$ contains non-zero nilpotents. We use the same terminology for arbitrary Jordan algebras. If $e$ is a primitive idempotent in $\mathfrak{J}$ then we can find a set of non-zero orthogonal idempotents $e_1 = e, e_2, e_3$ and obtain an isomorphism of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ such that the $e_i$ are respresented by the diagonal idempotents. Then $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi e_2 + \Phi e_3 + \mathfrak{J}_{23}$, $\mathfrak{J}_{ij}$ the

Peirce spaces relative to the $e_i$. Then $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi(e_2 + e_3) + \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$ and if $x = \xi(e_2 - e_3) + a_{23}$, $a \in \mathfrak{C}$, $x^2 = (\xi^2 + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(a))(e_2 + e_3)$. Hence $\mathfrak{J}_0(e)$ is the Jordan algebra of the symmetric bilinear form of the quadratic form $\xi^2 + \gamma_3^{-1}\gamma^2 N(a)$ in the nine dimensional space $\mathfrak{M}$. The idempotent $e$ is an $s$-idempotent if and only if $\xi^2 + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(a)$ has positive Witt index. If $\gamma = \operatorname{diag}\{1, -1, 1\}$, then the quadratic form is $\xi^2 - N(a)$ and this is 0 for $\xi = 1$, $a = 1$. Hence $e_1$ is an $s$-idempotent. Similarly, $e_3$ is an $s$-idempotent. If $\mathfrak{C}$ is a split Cayley algebra then $N(a)$ has positive Witt index. It follows that any primitive idempotent in a split exceptional $\mathfrak{J}$ is an $s$-idempotent. A similar result holds for the split algebra $\Phi_3^+$ and the algebra $\mathfrak{H}(\Phi_6, Q)$ of $6 \times 6$ symplectic symmetric matrices.

We shall now prove the following imbedding theorem which will be an important tool for the study of the groups of automorphisms.

**Theorem 4.** *Let $\mathfrak{J}$ be an exceptional simple Jordan algebra which contains non-zero nilpotent elements and let $e$ and $f$ be distinct $s$-idempotents in $\mathfrak{J}$. Then we can imbed $e$ and $f$ in a subalgebra $\mathfrak{K}$ which is isomorphic to an algebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a quaternion algebra, so that $e$ and $f$ are $s$-idempotents in $\mathfrak{K}$.*

*Proof.* Throughout the proof $\mathfrak{B}$ will denote the subalgebra strictly generated by $e$ and $f$; $e_i$, $i = 1, 2, 3$, will be non-zero orthogonal idempotents and $\mathfrak{J}_{ij}$, $i \neq j$, will be the Peirce components relative to the $e_i$. We shall consider representations of $\mathfrak{J}$ in the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$, $\mathfrak{C}$ a Cayley algebra, such that the $e_i$ are represented by the usual diagonal matrices. In such a representation $a_{ij}$, $a \in \mathfrak{C}$, is defined as in (22) and the rules (24)—(27) will be used without comment. We distinguish the two possibilities: $\mathfrak{C}$ a division algebra and $\mathfrak{C}$ split.

*Case* I. *$\mathfrak{C}$ a division algebra.* The proof will be achieved by finding a $\mathfrak{K} \cong \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ quaternion, containing $e, f$ and non-zero nilpotents $z, w$ where $z \in \mathfrak{J}_0(e)$ and $w \in \mathfrak{J}_0(f)$. Assume first that $\mathfrak{B}$ is of one of the types I, II or III listed in Theorem 2. Then $\mathfrak{B}$ can be imbedded in a subalgebra with basis $e_1$, $e_2$ and $a_{12} \in \mathfrak{J}_{12}$. Since $\mathfrak{C}$ is a division algebra $a_{12}^2 \neq 0$, so we may suppose the representation of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is such that $a_{12} = 1_{12}$. Also $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi(e_2 + e_3) + \mathfrak{M}$ where $\mathfrak{M} = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$. We have a $z = \beta(e_2 - e_3) + c_{23}$, $c_{23} \in \mathfrak{J}_{23}$ such that $z \neq 0$, $z^2 = 0$. By changing the representation, if necessary, we may suppose that $a_{12} = 1_{12}$ and $c_{23}$ which is $\neq 0$ is $1_{23}$. Then $z$ and $\mathfrak{B}$ are contained in the subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ of $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. Now $f \in \mathfrak{B} \subseteq \Phi e_1 + \Phi e_2 + \Phi 1_{12}$ so that $f = \alpha e_1 + \beta e_2 + \delta 1_{12}$. If $\delta = 0$, $f = e_2$ and $\mathfrak{J}_0(f) = \Phi e_1 + \Phi e_3 + \mathfrak{J}_{13}$, and we have a non-zero nilpotent $w = \varrho(e_1 - e_3) + d_{31}$, $d$ in $\mathfrak{C}$. Then we can imbed $d$ in a quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{C} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ gives the required imbedding of $e, f, z, w$. If $\delta \neq 0$ we write the nilpotent $w \neq 0$ as $w = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 + a_{12} + b_{23} + c_{31}$. The condition $f \cdot w = 0$ implies $\alpha c_{31} + \delta b_{13} = 0$ which shows that $b$ is in the subalgebra generated by $a$ and $c$. It follows that we can find a quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$ containing $a, b, c$ and hence $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ gives the required imbedding of $e, f, z, w$. Next assume $\mathfrak{B}$ of type IV. Then $\mathfrak{B}$ has the basis $(e, z, z^2)$ such that $e \cdot z = \frac{1}{2}z$ and $z^3 = 0$. The idempotent $f$ has the form $e + \alpha z + \alpha^2 z^2$ so that if we replace $z$ by $\alpha z$ then we may assume $f = e + z + z^2$. Since $e \cdot z^2 = 0 = f \cdot z^2$, $z^2$ is a non-zero nilpotent in $\mathfrak{J}_0(e) \cap \mathfrak{J}_0(f)$. Choose non-zero orthogonal idempotents $e_1 = e, e_2, e_3$. Then $z \in \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e) = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{13}$ so that $z = c_{12} + d_{31}$. We can imbed $c$ and $d$ in a quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$. Then $e, f, z, z^2 \in \mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ as required. Now suppose $\mathfrak{B}$ is of type V. Here we use the same notations as in the last case and we have $z = c_{12} + d_{31}$. Then $z^2 = 0$ implies $dc = 0$ so that either $c = 0$ or $d = 0$. However, if $z = c_{12} \neq 0$ or $z = d_{31} \neq 0$ then $z^2 \neq 0$. Thus V cannot occur if $\mathfrak{C}$ is a division algebra.

*Case* II. $\mathfrak{C}$ *split.* Here we shall show that $e$ and $f$ can be imbedded in an $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a split quaternion algebra. Since any primitive idempotent in such an algebra is $s$-idempotent the result will follow. Assume first that $\mathfrak{B}$ is of type I, II or III. Then $\mathfrak{B}$ can be imbedded in a subalgebra with the basis $e_1, e_2, a_{12} \in \mathfrak{J}_{12}$. The element $a \in \mathfrak{C}$ can be imbedded in a split quaternion algebra $\mathfrak{D}$. Then $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ contains $e$ and $f$ as required. Next assume $\mathfrak{B}$ of type IV. As in case I, $\mathfrak{B}$ is contained in a subalgebra generated by three non-zero orthogonal idempotents and two elements $c_{12}, d_{31}$ in $\mathfrak{J}_{12}$ and $\mathfrak{J}_{13}$ respectively. If either $c_{12}^2 \neq 0$ or $d_{31}^2 \neq 0$ then the representation as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ can be chosen so that $c = 1$ or $d = 1$. In either case the argument used for types I—III shows that $e, f$ can be imbedded in an $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ split quaternion. Hence we suppose $N(c) = 0 = N(d)$. Since $z^2 \neq 0$ for $z = c_{12} + d_{31}$, $dc \neq 0$. Let $x, y, \in \mathfrak{C}$ and consider an element $w$ of the form $w = (\bar{d}x)_{12} + (y\bar{c})_{31}$. Then

$$(37) \qquad z \cdot w = (\gamma_2^{-1}\gamma_1 N(c, \bar{d}x) + \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(d, y\bar{c}))\, e_1 + \gamma_2^{-1}\gamma_1 N(c, \bar{d}x) e_2 + \gamma_1^{-1}\gamma_3 N(d, y\bar{c})\, e_3.$$

Since $N(c, \bar{d}x) = N(dc, x)$, $N(d, y\bar{c}) = N(dc, y)$, $x$ and $y$ can be chosen so that $z \cdot w = e_2 - e_3$. This implies that the subalgebra $\mathfrak{L}$ generated by $z$ and $w$ contains the $e_i$ and so contains $\mathfrak{B}$. Since $z + w = (c + \bar{d}x)_{12} + (d + y\bar{c})_{31}$, $\mathfrak{L}$ contains $(c + \bar{d}x)_{12}$ and $(d + y\bar{c})_{31}$. Moreover, $(c + \bar{d}x)_{12}^2 = 2\gamma_2^{-1}\gamma_1 N(c, \bar{d}x)\,(e_1 + e_2) \neq 0$ and $(d + y\bar{c})_{31}^2 \neq 0$. Hence the isomorphism of $\mathfrak{J}$ with an $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ can be chosen so that $(c + \bar{d}x)_{12}$ and $(d + \bar{c}y)_{31}$ are mapped on $1_{12}$ and $1_{31}$ respectively. Then $\mathfrak{L}$ contains the subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ and consequently $\mathfrak{L}$ has the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{F}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{F}$ is a subalgebra of $\mathfrak{C}$ containing 1. On the other hand, since $\mathfrak{L}$ is generated by two elements $\dim \mathfrak{L} \leqq 9$ (Jacobson [14] p. 382). Hence $\dim \mathfrak{F} \leqq 2$, and so $\mathfrak{F}$ can be imbedded in a split quaternion subalgebra $\mathfrak{D}$. Then $\mathfrak{B}$ is contained in $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ as required. Finally suppose $\mathfrak{B}$ is of type V with basis $(e, z)$, $e \cdot z = \frac{1}{2}z$, $z^2 = 0$. Assuming the characteristic is not three then there exists a second element $w$, $w^2 = 0$ such that the subalgebra generated by $z$ and $w$ has a basis of three orthogonal idempotents $e_i$, and an element $a_{23} \in \mathfrak{J}_{23}$ such that $a_{23}^2 \neq 0$ (Jacobson [14] p. 385). Then $z^2 = 0$ implies that $z = \beta(e_2 - e_3) + \varrho a_{23}$, $\beta \neq 0$, $\varrho \neq 0$. We may choose the representation so that $\varrho a_{23} = 1_{23}$. Then $z = \beta(e_2 - e_3) + 1_{23}$. Write $e = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3 + a_{12} + b_{23} + c_{31}$. The component in $\mathfrak{J}_{12}$ of $e \cdot z$ is $\frac{1}{2}\beta a_{12} + \frac{1}{2}c_{21}$. Since $e \cdot z = \frac{1}{2}z$ this implies that $c = -\gamma_1\gamma_2^{-1}\beta\bar{a}$. Similarly, comparison of the components in $\mathfrak{J}_{23}$ of $e \cdot z$ and $\frac{1}{2}z$ gives $\eta + \zeta = 1$. Since $T(e) = 1$ this implies $\xi = 0$. Hence

$$(38) \qquad e = \eta e_2 + (1 - \eta)\, e_3 + a_{12} + b_{23} - \gamma_1\gamma_2^{-1}\beta\bar{a}_{31}.$$

Comparison of the components in $\mathfrak{J}_{12}$ of $e$ and $e^2$ gives

$$(39) \qquad \eta a_{12} - \gamma_1\gamma_2^{-1}\beta(b\bar{a})_{21} = a_{12}$$

which implies that $a\bar{b}$ is a multiple of $a$. This implies that $ab$ and $ba \in \Phi 1 + \Phi a + \Phi b$. Hence if $\mathfrak{F}$ denotes the subalgebra of $\mathfrak{C}$ generated by $a$ and $b$ then $\dim \mathfrak{F} \leqq 3$. If $\dim \mathfrak{F} \leqq 2$, $\mathfrak{F}$ can be imbedded in a split quaternion algebra $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$. The same conclusion will hold if $\dim \mathfrak{F} = 3$, provided that $\mathfrak{F}$ contains a two dimensional semisimple subalgebra containing 1 (Lemma 2). We prove this by showing that $b$, which is not in $\Phi 1$ since $\dim \mathfrak{F} = 3$, is not nilpotent. Suppose the contrary. Then $\bar{b}$ is nilpotent and since $a\bar{b} = \lambda a$, $a\bar{b} = 0$. Then (39) implies $\eta = 1$ and (38) gives $e = e_2 + a_{12} + b_{23} - \gamma_1\gamma_2^{-1}\beta\bar{a}_{31}$. Comparison of the $\mathfrak{J}_{13}$-components of $e$ and $e^2$ now gives $ab = -\gamma_2^{-1}\gamma_3\beta a$ which is ruled out by the nilpotency of $b$. Hence $b$ is not nilpotent and the proof is complete.

Two elements $a, b$ of a Jordan algebra $\mathfrak{J}$ will be called *conjugate* (in $\mathfrak{J}$) if there exists an automorphism $\eta$ of $\mathfrak{J}$ such that $a^\eta = b$.

**Lemma 3.** *Let $\mathfrak{K}$ be the Jordan algebra $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{D}$ is a quaternion algebra. Let $e$ and $f$ be s-idempotents of $\mathfrak{K}$. Then there exists a $\gamma$-unitary matrix $u \in \mathfrak{D}_3$ such that $f = u^{-1}eu$.*

*Proof.* Assume first that $\mathfrak{D}$ is a division algebra. Then we may replace $\mathfrak{K}$ by the Jordan algebra $\mathfrak{K}'(\cong \mathfrak{K})$ of self-adjoint linear transformations in a three dimensional space $\mathfrak{M}$ over $\mathfrak{D}$ relative to a non-degenerate hermitian form $(x, y)$. If $e$ is an idempotent self-adjoint transformation then $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}e \oplus \mathfrak{M}(1-e)$ and $\mathfrak{M}e$, $\mathfrak{M}(1-e)$ are orthogonal. Let $z \neq 0$ be a nilpotent element such that $z \cdot e = 0$. Then $z$ maps $\mathfrak{M}(1-e)$ into itself and the induced transformation is nilpotent and $\neq 0$. Hence there exist non-zero nilpotent self-adjoint transformations in $\mathfrak{M}(1-e)$ relative to the restriction of $(x, y)$. Hence $\mathfrak{M}(1-e)$ is two dimensional and the Witt index of the restriction of $(x, y)$ to $\mathfrak{M}(1-e)$ is positive (Albert-Jacobson [3] p. 410). Since any two non-isotropic two dimensional spaces which contain isotropic vectors are isometric it follows that $\mathfrak{M}(1-e)$ and $\mathfrak{M}(1-f)$ are isometric. Then by Witt's theorem $\mathfrak{M}e$ and $\mathfrak{M}f$ are isometric. We therefore have a unitary transformation $u$ such that $(\mathfrak{M}e)\, u = \mathfrak{M}f$, $\mathfrak{M}(1-e)\, u = \mathfrak{M}(1-f)$. This implies that $f = u^{-1}eu$ are as required. The argument for $\mathfrak{D}$ split is similar to this employing a six dimensional space $\mathfrak{M}$ over $\Phi$ and a non-degenerate skew form in $\mathfrak{M}$.

We can now prove

**Theorem 5.** *Any two s-idempotents of an exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ are conjugate in $\mathfrak{J}$.*

*Proof.* If $e$ and $f$ are $s$-idempotents then we can imbed $e, f$ in a subalgebra $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ quaternion, so that $e$ and $f$ are $s$-idempotents in $\mathfrak{K}$. Then $f = u^{-1}eu$ where $u$ is $\gamma$-unitary in $\mathfrak{D}_3$. The mapping $x \to u^{-1}xu$ is an automorphism in $\mathfrak{K}$ which can be extended to an automorphism $\eta$ of $\mathfrak{J}$. Then $f = e^\eta$.

## 6. Automorphisms leaving fixed three orthogonal idempotents.

Let $G(\mathfrak{J})$ denote the group of automorphisms of an exceptional central simple Jordan algebra. As we have seen in I, p. 185, a $1-1$ linear transformation $\eta$ of $\mathfrak{J}$ onto $\mathfrak{J}$ is an automorphism if and only if it leaves the symmetric bilinear form $T(a, b) = T(a \cdot b)$ and the symmetric trilinear form $T(a, b, c) = T\big((a \cdot b) \cdot c\big) = T\big(a \cdot (b \cdot c)\big)$ invariant. If the characteristic is not three then we have another characterization of automorphisms by the two conditions: $1^\eta = 1$, $N(a^\eta) = N(a)$ (I, p. 186). The $1-1$ linear mappings satisfying the second of these conditions constitute the n. p. group $L(\mathfrak{J})$ of $\mathfrak{J}$.

It is natural to call $G(\mathfrak{J})$ the Galois group of $\mathfrak{J}$ over $\Phi$ and more generally if $\mathfrak{K}$ is a subalgebra of $\mathfrak{J}$ then we shall call the subgroup $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ of $\mathfrak{J}$ leaving fixed the elements of $\mathfrak{K}$ the *Galois group* of $\mathfrak{J}$ over $\mathfrak{K}$. Important cases of this are obtained by taking $\mathfrak{K}$ to be one of the following:

1) $\mathfrak{K} = \Phi e_1 + \Phi e_2 + \Phi e_3$ where the $e_i$ are non-zero orthogonal idempotents, 2) $\mathfrak{K}$ a reduced central simple subalgebra of degree three, 3) $\mathfrak{K} = \Phi e$, $e$ a primitive idempotent. We proceed to determine the group $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ in these cases and we begin with the following [5])

**Theorem 6.** *Let $\mathfrak{K} = \Phi e_1 + \Phi e_2 + \Phi e_3$ where the $e_i$ are non-zero orthogonal idempotents in $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$. Then the Galois group $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is isomorphic to the reduced Clifford group $\Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$, $N$ the norm form in the Cayley algebra $\mathfrak{C}$.*

[5]) Another interesting case is $\mathfrak{K}$ a cubic subfield of $\mathfrak{J}$. The groups $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ give rise to new simple groups which we hope to discuss in another paper.

*Proof.* We may suppose the isomorphism of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ is such that the $e_i$ are the diagonal idempotents. Also we use the definition (22) and the multiplication formulas (24) — (26). If $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ then $e_i^\eta = e_i$ implies that $\mathfrak{J}_{ij}^\eta \leqq \mathfrak{J}_{ij}$ for the Peirce spaces $\mathfrak{J}_{ij}$ relative to the $e_i$. Hence for $i \neq j$ we can define a linear mapping $\eta_{ij}$ in $\mathfrak{C}$ by $(a^{\eta_{ij}})_{ij} = a_{ij}^\eta$. Since $(a_{ij}^2)^\eta = (a_{ij}^\eta)^2$, (25) implies that $N(a^{\eta_{ij}}) = N(a)$ so that $\eta_{ij} \in O(\mathfrak{C}, N)$. Also the relation $2a_{12} \cdot b_{23} = (ab)_{13}$ gives $(ab)^{\eta_{13}} = (a^{\eta_{12}})(b^{\eta_{23}})$. Hence $A_1 = \eta_{13}$, $A_2 = \eta_{12}$, $A_3 = \eta_{23}$ satisfy (13). Next suppose we have orthogonal transformations $\eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{23}$ of $\mathfrak{C}$ satisfying (13). Let $\eta$ be the linear mapping in $\mathfrak{J}$ such that $e_i^\eta = e_i$, $a_{ij}^\eta = (a^{\eta_{ij}})_{ij}$, $i < j$. Then $(a_{12} \cdot b_{23})^\eta = a_{12}^\eta \cdot b_{23}^\eta$. Hence

$$\begin{aligned}(ab)_{13}^\eta \cdot b_{23}^\eta &= 2(a_{12}^\eta \cdot b_{23}^\eta) \cdot b_{23}^\eta = \tfrac{1}{2}\gamma_3^{-1}\gamma_2 N(b)\, a_{12}^\eta \\ &= (\tfrac{1}{2}\gamma_3^{-1}\gamma_2 N(b)\, a_{12})^\eta = 2\big((a_{12} \cdot b_{23}) \cdot b_{23}\big)^\eta \\ &= \big((ab)_{13} \cdot b_{23}\big)^\eta,\end{aligned}$$

which implies that $(a_{13} \cdot b_{32})^\eta = a_{13}^\eta \cdot b_{32}^\eta$ for all $a, b$. Similarly $(a_{21} \cdot b_{13})^\eta = a_{21}^\eta \cdot b_{13}^\eta$. It follows that $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$. Our results now show that the elements $\eta$ of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ are in $1-1$ correspondence with the triples of orthogonal transformations $(A_1, A_2, A_3)$ satisfying (13). By Theorem 1 we have a $1-1$ mapping of $\Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$ onto the set of these triples. Hence if $u \in \Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$ and $(A_1, A_2, A_3) = (u^\chi, u^{\varrho_1}, u^{\varrho_2})$ then the mapping of $u$ into the automorphism $\eta$ such that $e_i^\eta = e_i$, $a_{13}^\eta = (aA_1)_{13}$, $a_{12}^\eta = (aA_2)_{12}$, $a_{23}^\eta = (aA_3)_{23}$ is an isomorphism of $\Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$ onto $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$.

We are now in a position to complete the discussion of triality for Cayley algebras which we began in § 2. The foregoing proof gives six representations of the group $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ $\big(\cong \Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)\big)$ acting in the space $\mathfrak{C}$. These are $\eta \to \eta_{ij}$, $i \neq j = 1, 2, 3$ where $a_{ij}^\eta = (a^{\eta_{ij}})_{ij}$. We have $\eta_{ij} = \pi\eta_{ji}\pi^{-1}$ where $\pi$ is the conjugation in $\mathfrak{C}$. Hence $\eta_{ij}$ and $\eta_{ji}$ are equivalent. Also we known that the image of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ under $\eta \to \eta_{13}$ is the reduced orthogonal group and that the representations $\eta \to \eta_{12}$ and $\eta \to \eta_{23}$ are inequivalent. If we permute the idempotents $e_i$ the same argument proves that the image of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ under all of the six representations is the reduced orthogonal group, so that all of these representations are irreducible. Moreover, this argument shows that among the six representations only the pairs $\eta \to \eta_{ij}$, $\eta \to \eta_{ji}$ are equivalent. The relation between the $\eta_{ij}$, $i < j$ and $\chi, \varrho_1, \varrho_2$ now implies the following

**Theorem 7.** *The representations $\chi, \varrho_1, \varrho_2$ of $\Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$ are inequivalent and irreducible. The image of $\Gamma_0^*$ under any one of these representations is the reduced orthogonal group.*

We now suppose the matrix $\gamma$ defining the involution in $\mathfrak{C}_3$ is $\gamma = 1$ and we consider the subgroup $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ of $G(\mathfrak{J})$ mapping $\mathfrak{K} = \Sigma\, \Phi e_i$ into itself. The group $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is an invariant subgroup of $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ and the elements of $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})/G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ are in $1-1$ correspondence with the distinct automorphisms in $\mathfrak{K}$ induced by the $\eta^* \in G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$. Since the group of automorphisms of $\mathfrak{K}$ is isomorphic to the symmetric group $S_3$ on the three idempotents $e_i$, $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})/G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is isomorphic to a subgroup of $S_3$. Now let $\sigma$ be any permutation of the $e_i$ and write $e_i^\sigma = e_{i'}$. Let $\sigma^*$ be the linear transformation in $\mathfrak{J}$ which coincides with the given $\sigma$ on the $e_i$ and satisfies $a_{ij}^{\sigma^*} = a_{i'j'}$, for $i < j = 1, 2, 3$. Then we have $a_{ji}^{\sigma^*} = \bar{a}_{ij}^{\sigma^*} = \bar{a}_{i'j'} = a_{j'i'}$, if $i < j$. Since $a_{ij}^{2\sigma^*} = N(a)\,(e_i + e_j)^{\sigma^*} = N(a)\,(e_{i'} + e_{j'}) = a_{i'j'}^2 = (a_{ij}^{\sigma^*})^2$ and

$$2a_{ij}^{\sigma^*} \cdot b_{jk}^{\sigma^*} = 2a_{i'j'} \cdot b_{j'k'} = (ab)_{i'k'} = (ab)_{ik}^{\sigma^*} = 2(a_{ij} \cdot b_{jk})^{\sigma^*},$$

if $i, j, k$ are unequal, it follows that $\sigma^*$ is an automorphism in $\mathfrak{J}$ mapping $\mathfrak{K}$ into itself. The automorphisms defined in this way by the permutations of the $e_i$ form a subgroup $S_3^*$ of $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ isomorphic to $S_3$ and it is clear that $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is a semi-direct product of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ and $S_3^*$. This proves the first part of the following

**Theorem 8.** *Let $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ be the group of automorphisms of the exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, 1)$, $\mathfrak{C}$ a Cayley algebra, mapping $\mathfrak{K} = \Sigma \Phi e_i$ into itself and let $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K}) \cong \Gamma_0^*(\mathfrak{C}, N)$ be the invariant subgroup leaving fixed the elements of $\mathfrak{K}$. Then $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is a semi-direct product of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ and a subgroup isomorphic to the symmetric group $S_3$. The centralizer of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ in $G^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$.*

*Proof.* The statement which remains to be proved is equivalent to the following: Let $\sigma$ be a permutation of the $e_i$ and let $\sigma^*$ be defined as before as the automorphism of $\mathfrak{J}$ such that $e_i^{\sigma^*} = e_i^{\sigma} \equiv e_i$ and $a_{ij}^{\sigma^*} = a_{i'j'}$. Then $\eta \to \sigma^* \eta (\sigma^*)^{-1}$, $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is an inner automorphism only if $\sigma = 1$. Now let $\eta_{ij}$ be defined as before by $a_{ij}^{\eta} = (a^{\eta})_{ij}$. Then $a_{ij}^{\sigma^* \eta \sigma^{*-1}} = a_{i'j'}^{\eta \sigma^{*-1}} = (a^{\eta_{i'j'}})_{i'j'}^{\sigma^{*-1}} = (a^{\eta_{i'j'}})_{ij}$. Hence $(\sigma^* \eta (\sigma^*)^{-1})_{ij} = \eta_{i'j'}$. Now suppose $\eta \to \sigma^* \eta (\sigma^*)^{-1}$ is inner so that there exists a $\varrho$ in $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ such that $\varrho \eta \varrho^{-1} = \sigma^* \eta (\sigma^*)^{-1}$. Then $\eta_{i'j'} = (\varrho \eta \varrho^{-1})_{ij} = \varrho_{ij} \eta_{ij} \varrho_{ij}^{-1}$. This implies that $\eta_{i'j'}$, $\eta_{ij}$ are equivalent representations of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ for every $(i, j)$, $(i', j')$. By Theorem 7 this implies that the unordered sets $\{i, j\} = \{i', j'\}$ for all $i, j$. Since $i, j = 1, 2, 3$, we have $i' = i$ and $\sigma = 1$, $\sigma^* = 1$.

## 7. Groups $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$, $\mathfrak{L}$ central simple of degree three.

We assume first that $\mathfrak{L}$ has the form $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$. Then we may assume $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ and $\mathfrak{L}$ is the subalgebra with basis $(e_1, e_2, e_3, 1_{12}, 1_{13}, 1_{23})$. The group $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$ is a subgroup of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$, $\mathfrak{K} = \Sigma \Phi e_i$. For $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ define $\eta_{ij}$ as before. Then $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$ if and only if $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ and $1^{\eta_{ij}} = 1$, $i < j$. Since $a^{\eta_{13}} b^{\eta_{23}} = (ab)^{\eta_{13}}$, substitution of 1 for $a$ and $b$ successively in this gives $\eta_{13} = \eta_{12} = \eta_{23}$. Hence if we set $\eta' = \eta_{12} = \eta_{23} = \eta_{13}$ then $\eta'$ is an automorphism of $\mathfrak{C}$. Conversely, if $\eta'$ is any automorphism of $\mathfrak{C}$ then the linear transformation $\eta$ in $\mathfrak{J}$ such that $e_i^{\eta} = e_i$, $a_{ij}^{\eta} = (a^{\eta'})_{ij}$, $i < j$, is an automorphism of $\mathfrak{J}$ leaving the elements of $\mathfrak{K} = \sum \Phi e_i + \sum_{i<j} \Phi 1_{ij}$ fixed. Hence $\eta \to \eta'$ defines an isomorphism of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$ onto the group of automorphisms of the Cayley algebra $\mathfrak{C}$.

Next let $\mathfrak{M}$ be a subalgebra of the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{D}$ is either a two dimensional semi-simple subalgebra or a quaternion subalgebra of $\mathfrak{C}$. Then it is clear that $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{M})$ is isomorphic to the subgroup of the group of automorphisms of $\mathfrak{C}$ leaving fixed the elements of $\mathfrak{D}$. We have determined these groups elsewhere (Jacobson [13]) and obtained the following results: If $\mathfrak{D} = \Phi + \Phi$ then the group is isomorphic to the unimodular unitary group in a three dimensional space. If $\mathfrak{D}$ is a quaternion algebra then the group is isomorphic to the multiplicative group of elements of norm 1 of $\mathfrak{D}$.

We may summarize these results in the following

**Theorem 9.** *Let $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ be a subalgebra of $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ such that $\mathfrak{D}$ is one of the following types:*

I $\mathfrak{D} = \Phi$,

II $\mathfrak{D}$ *a direct sum of two copies of* $\Phi$,

III $\mathfrak{D}$ *a quadratic field,*

IV $\mathfrak{D}$ *a quaternion algebra.*

*Accordingly $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ is isomorphic to*

I *the group of automorphisms of* $\mathfrak{C}$,

II *the unimodular group in a three dimensional space,*

III *a three dimensional unitary unimodular group,*

IV *the multiplicative group of elements of norm 1 of* $\mathfrak{D}$.

## 8. Groups $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ primitive idempotent.

Let $e$ be a primitive idempotent in $\mathfrak{J}$. Then we have a representation of $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ so that $e = e_1$ is the first diagonal idempotent. If $e_2$, $e_3$ are the other diagonal idempotents then $\mathfrak{J}_1(e) = \Phi e$, $\mathfrak{J}_0(e) = \Phi(e_2 + e_3) + \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$, $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e) = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{13}$. As noted in § 5, $\mathfrak{J}_0$ is the Jordan algebra of the bilinear form in $\mathfrak{M}$ given by

$$(40) \qquad (x, y) = \xi\eta + \gamma_3^{-1}\gamma_2 N(c, d) = \tfrac{1}{2} T(x, y)$$

where $x = \xi(e_2 - e_3) + c_{23}$, $y = \eta(e_2 - e_3) + d_{23}$, $c, d$ in $\mathfrak{C}$.

The determination of the group $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ is essentially equivalent to an extension to certain nine dimensional spaces of the triality of $\mathfrak{C}$. We consider this first. For $a \in \mathfrak{J}_0$ we set $\theta(a) = e + a$. Then

$$(41) \qquad \theta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & c \\ 0 & \gamma_3^{-1}\gamma_2 \bar{c} & -\xi \end{pmatrix}$$

if $x = \xi(e_2 - e_3) + c_{23}$. This implies that

$$(42) \qquad N(\theta(x)) = -(x, x), \quad x \in \mathfrak{M}.$$

We have $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}} \cdot (\mathfrak{J}_0 + \mathfrak{J}_1) \subseteq \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ which implies that $U_{\theta(a)}$, $a \in \mathfrak{J}_0$, maps $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ into itself. We let $W_a$ be the induced mapping in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ and we proceed to derive a formula for $W_a$. Note first that in any Jordan algebra one has

$$(43) \qquad U_{a+b} = U_a + U_b + 2(R_a R_b + R_b R_a - R_{a \cdot b}).$$

Hence if $\bar{X}$ denotes the restriction of $X$ to $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ then

$$W_a = \bar{U}_{\theta(a)} = \bar{U}_e + \bar{U}_a + 2(\bar{R}_e \bar{R}_a + \bar{R}_a \bar{R}_e).$$

It is known that if $a, b \in \mathfrak{J}_0$ then

$$(44) \qquad \bar{R}_{a \cdot b} = \bar{R}_a \bar{R}_b + \bar{R}_b \bar{R}_a$$

(Jacobson [11] p. 17). Hence $\bar{U}_a = 0$ and likewise $\bar{U}_e = 0$. Also $\bar{R}_e = \frac{1}{2}1$; hence we have

$$(45) \qquad W_a = 2\bar{R}_a, \quad a \in \mathfrak{J}_0.$$

It follows from (44), (45) (or the known result $U_a^2 = U_{a^2}$) that

$$(46) \qquad f \to W_\varrho = 1, \quad x \to W_x, \quad x \in \mathfrak{M},$$

defines a representation $\varrho$ of the Clifford algebra $C(\mathfrak{M}, (x, y))$. This gives induced representations $\varrho$ of $C^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ and of the reduced Clifford group $\Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$. Since $\mathfrak{M}$ is odd dimensional, $C^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ is simple. Moreover, $\dim C^e(\mathfrak{M}, (x, y)) = 2^8$. Since the representation space $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ for the representation $\varrho$ of $C^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ is 16-dimensional and $C^e$ is simple, so that $\varrho$ is faithful, the image of $C^e$ under $\varrho$ is the complete algebra of linear transformations in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$. Hence $C^e(\mathfrak{M}, (x, y)) \cong \Phi_{16}$ and $\varrho$ is irreducible for $C^e$. It is easily seen also that $\varrho$ is irreducible for $\Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ (Chevalley [6] p. 56).

The following is the extension of triality to the nine dimensional space $\mathfrak{M}$.

**Theorem 10.** *If $u \in \Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ then*

$$(47) \qquad (a \cdot x)\, u^\varrho = (a u^\varrho) \cdot (x u^\chi)$$

*for $a \in \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$, $x \in \mathfrak{M}$. Moreover, $u^\varrho$ is orthogonal in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ relative to $T(a, b) = T(a \cdot b)$. Conversely, let $C$ be an orthogonal transformation in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ relative to $T(a, b)$ and $B$ an orthogonal transformation in $\mathfrak{M}$ relative to $(x, y) = \frac{1}{2} T(x, y)$ such that*

$$(48) \qquad (a \cdot x)\, C = (aC) \cdot (xB), \quad a \in \mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathfrak{M},$$

*then there exists a unique $u \in \Gamma_0^e$ such that $C = u^\varrho$, $B = u^\chi$.*

*Proof.* Let $u \in \Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$. Then we can write $u = x_1 x_2 \cdots x_{2r}$ where the $x_i \in \mathfrak{M}$ and $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$. Let

$$\eta = U_{\theta(x_1)} U_{\theta(x_2)} \cdots U_{\theta(x_{2r})}. \tag{49}$$

Then $\prod_1^{2r} N(\theta(x_i)) = \prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$, by (42). Hence $\eta$ is in the n. p. group $L(\mathfrak{J})$. Also $e^\eta = e$ and since $fU_{\theta(x_i)} = fU_{x_i} = (x_i, x_i) f$, $f^\eta = f$. Hence $\eta \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. As in § 1, if $x \in \mathfrak{M}$, $xU_{\theta(x_i)} = xU_{x_i} = (x_i, x_i)\, x\bar{S}_{x_i}$ where $\bar{S}_{x_i}$ is the symmetry in $\mathfrak{M}$ determined by $x_i$. Hence the orthogonal transformation induced in $\mathfrak{M}$ by $\eta$ is $u^\chi$. The transformation induced in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ by $\eta$ is $u^\varrho = W_{x_1} W_{x_2} \cdots W_{x_{2r}}$. Hence (47) follows from the fact that $\eta$ is an automorphism. We show next that if $B$ is a rotation in $\mathfrak{M}$ then there exists an orthogonal similitude $C$ in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ satisfying (48) and that $C$ is determined up to a scalar factor. We write $B = \bar{S}_{x_1} \bar{S}_{x_2} \cdots \bar{S}_{x_{2r}}$ where $\bar{S}_{x_i}$ is the symmetry in $\mathfrak{M}$ relative to $x_i$, $(x_i, x_i) \neq 0$. The transformation $\prod_1^{2r} V_{x_i}$, $V_{x_i} = -(x_i, x_i)^{-1} U_{x_i}$ maps $f$ into $f$ and induces $B$ in $\mathfrak{M}$. Set $\beta = \prod_1^{2r} (x_i, x_i)$, $P = \Phi(\delta)$, $\delta^2 = \beta$, so that either $P = \Phi$ or $P$ is a quadratic extension field of $\Phi$. Set $\theta(x_i) = e + x_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2r$, $\theta(x_{r+1}) = e + \delta^{-1} f$. Then $N(\theta(x_i)) = -(x_i, x_i)$, $i \leqq 2r$, $N(\theta(x_{r+1})) = \beta^{-1}$. Hence $\prod_1^{2r+1} N(\theta(x_i)) = 1$ and $\eta = \prod_1^{2r+1} U_{\theta(x_i)} \in L(\mathfrak{J}_P)$. As before, $e^\eta = e$, $f^\eta = f$ so $\eta \in G(\mathfrak{J}_P / Pe)$. Let $A$ be the induced linear transformation in $(\mathfrak{J}_P)_{\frac{1}{2}} = (\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}})_P$. Then $(a \cdot x) A = (aA) \cdot xB$ for $x \in \mathfrak{M}_P$, $a \in (\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}})_P$. Let $C = \prod_1^{2r} (2\bar{R}_{x_i})$ where $\bar{R}_{x_i}$ is the restriction of $R_{x_i}$ to $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$. Then (45) shows that $A = \delta^{-1} C$ and $C$ maps $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ into itself and satisfies (48). Also since $A$ is orthogonal in $(\mathfrak{J}_P)_{\frac{1}{2}}$, $C = \delta A$ is an orthogonal similitude of ratio $\delta^2 = \beta$. To prove uniqueness up to scalars it suffices to take $B = 1$. The condition on $C$ now reads: $(a \cdot x) C = (aC) \cdot x$. We have noted before that the $\bar{R}_x$ generate the complete algebra of linear transformations in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$. Since $C$ commutes with all the $\bar{R}_x$ it follows that $C = \mu 1$ in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$, as asserted. We prove next that if $B$ is orthogonal of determinant $-1$ in $\mathfrak{M}$ then there exists no $1-1$ linear transformation $C$ in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}$ satisfying (48). In view of the result just established it suffices to show that no $C$ exists for $B = -1$, which has determinant $= -1$, since $\dim \mathfrak{M} = 9$. Since $(e_2 - e_3) B = -(e_2 - e_3)$, $\mathfrak{J}_{12} C = \mathfrak{J}_{13}$ and $\mathfrak{J}_{13} C = \mathfrak{J}_{12}$. If $a \in C$ we write $a_{12} C = (aD)_{13}$, $a_{13} C = (aE)_{21}$. Then for $a, x \in C$, $2(a_{13} \cdot x_{32}) C = -2(a_{13} C) \cdot x_{32}$; hence $((ax) D)_{13} = -(x(aE))_{21} = -\gamma_1 \gamma_3^{-1} \overline{x(aE)}_{13}$. Setting $x = 1$ gives $\overline{aE} = -\gamma_3 \gamma_1^{-1} (aD)$. Hence $(ax) D = (aD) \bar{x}$. This gives $xD = d\bar{x}$, $d = 1D$ and $d$ has an inverse since $D$ is $1-1$. We now have $d(\overline{xa}) = (d\bar{a}) \bar{x}$ or $d(ab) = (db) a$ for all $a, b \in C$. This states that $a_L d_L = d_L a_R$ and contradicts the fact that the representations $\varrho_L$, $\varrho_R$ of $C(\mathfrak{C}_0, -N)$ are inequivalent. Now suppose $B$ and $C$ are any orthogonal transformations satisfying (45). Then $B$ is a rotation and if $B = \prod_1^{2r} \bar{S}_{x_i}$, $x_i \in \mathfrak{M}$, $(x_i, x_i) \neq 0$ then the argument shows that there exists an orthogonal similitude $C^*$ of ratio $\beta = \prod_1^{2r} (x_i, x_i)$ satisfying (48) ($C^*$ in place of $C$). Then $\beta$ is a square and $B \in O'(\mathfrak{M}, (x, y))$. We can now write $B = \prod_1^{2r} \bar{S}_{x_i}$ where $x_i \in \mathfrak{M}$ and $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$. Then $u = x_1 x_2 \cdots x_{2r} \in \Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$ and $u^\chi = B$

and $u^\varrho$ satisfy (47). We have $u^\varrho = \pm C$ and by changing $x_{2r}$ to $-x_{2r}$ if necessary we may suppose that $u^\varrho = C$. The uniqueness of $u$ is clear since $\varrho$ is $1-1$ for $C^e(\mathfrak{M}, (x, y))$.

We can now prove

**Theorem 11.** *Let $e$ be a primitive idempotent in a reduced exceptional Jordan algebra $\mathfrak{J}$ and let $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ be the group of automorphisms of $\mathfrak{J}$ leaving $e$ fixed. Then $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ is isomorphic to the reduced Clifford group $\Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ where $\mathfrak{M}$ is the subspace of elements of trace 0 in $\mathfrak{J}_0(e)$ and $(x, y)$ is defined by $x \cdot y = (x, y)(1-e)$.*

*Proof.* If $u = x_1 x_2 \cdots x_{2r}$, $x_i \in \mathfrak{M}$, $\prod_1^{2r} (x_i, x_i) = 1$ then we define $\eta$ as in (49) by $\eta = \prod_1^{2r} U_{\theta(x_i)}$. Then $\eta \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ and the foregoing discussion implies that $u \to \eta$ is an isomorphism of $\Gamma_0^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ onto $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$.

The proof of the theorem gives the following

**Corollary 1.** *The group $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ is contained in the reduced n. p. group $L_2(\mathfrak{J})$.*

It is also easy to obtain the following result as a consequence of the theorem.

**Corollary 2.** *The center of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ consists of the identity mapping and the automorphism $\zeta$ such that $e_i^\zeta = e_i$, $a_{12}^\zeta = -a_{12}$, $a_{13}^\zeta = -a_{13}$, $a_{23}^\zeta = a_{23}$.*

## 9. Some coset spaces.

Let $\mathfrak{D}$ be a quaternion subalgebra of the Cayley algebra $\mathfrak{C}$, $P$ a two dimensional semi-simple subalgebra of $\mathfrak{D}$. Then we have the chain of subalgebras

$$\Phi < \Phi e_1 < \mathfrak{K} = \sum_1^3 \Phi e_i < \mathfrak{L} = \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma) < \mathfrak{R} = \mathfrak{H}(P_3, \gamma) < \mathfrak{P} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma) < \mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$$

where the $e_i$ are the diagonal idempotents. This gives a corresponding chain of Galois groups and coset spaces. We shall consider two of these: the left cosets $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)\,\eta$ of $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$ in $G$ and the left cosets of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$ in $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$.

The left cosets of $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$ in $G$ are in $1-1$ correspondence with the set of images $e_1^\eta$ of $e_1$ under $G$. In some cases this coincides with the set $\Pi$ of primitive idempotents. This is the situation if 1) $\mathfrak{C}$ is split (Theorem 5) or 2) $\Phi$ is real closed, $\mathfrak{C}$ a Cayley division algebra and $\gamma = 1$. If $\mathfrak{C}$ is split we may take $\gamma = 1$. In any case we assume this and we proceed to determine the conditions that

$$e = \sum_1^3 \xi_i e_i + x_{12} + y_{23} + z_{31} \in \Pi.$$

If the characteristic is not three then it is easy to see that one set of necessary and sufficient conditions are

$$T(e) = 1,\ T(e^2) = 1,\ T(e^3) = 1. \tag{50}$$

Another set which is applicable even for characteristic three is the following:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + N(x) + N(z) &= \xi_1, \\ \xi_2^2 + N(y) + N(x) &= \xi_2, \\ \xi_3^2 + N(z) + N(y) &= \xi_3, \end{aligned} \tag{52}$$

$$\xi_2 z = \overline{yx},\ \xi_3 x = \overline{zy},\ \xi_1 y = \overline{xz}. \tag{53}$$

If we multiply the first of (53) by $\xi_3$ and substitute $\xi_3 x$ from the second of these equations we obtain $(\xi_2\xi_3 - N(y))z = 0$. Similarly, $(\xi_3\xi_1 - N(z))x = 0$ and $(\xi_1\xi_2 - N(x))y = 0$. If $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ then these equations imply

$$\xi_2\xi_3 = N(y),\ \xi_3\xi_1 = N(z),\ \xi_1\xi_2 = N(x). \tag{54}$$

If $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z = 0$ then the last two of (54) hold. Moreover, (53) implies $\overline{yx} = 0$ and $\xi_3 x = 0$. Hence $N(y) = 0$ and $\xi_3 = 0$, which implies the first of (54). If $x \neq 0$, $y = z = 0$ then the second of (54) is satisfied. Also, by (53), $\xi_3 x = 0$ and $\xi_3 = 0$. Hence the first of (54) is valid. The first equation in (52) now becomes $\xi_1^2 + N(x) = \xi_1$ and $N(x) = \xi_1(1 - \xi_1) = \xi_1\xi_2$ since we have $\xi_1 + \xi_2 = 1$ by (51). If $x = y = z = 0$, two of the $\xi_i = 0$ and (54) holds. Hence (54) are always consequences of (51)—(53).

We now decompose the set $\Pi$ into three non-overlapping subsets: $\Pi_1$, defined by $\xi_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$; $\Pi_2$, the $e \in \Pi$ such that just one $\xi_i = 0$; $\Pi_3$, the $e \in \Pi$ such that two $\xi_i = 0$. For $\Pi_1$ we have

$$x = \xi_3^{-1}\overline{zy},\ N(y) = \xi_2\xi_3 \neq 0,\ N(z) = \xi_1\xi_3 \neq 0 \tag{55}$$

and it is readily seen that these equations and (51) imply (52) and (53). For $\Pi_2$ we have, if $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, then

$$z = \xi_2^{-1}\overline{yx},\ N(x) = \xi_1\xi_2 \neq 0,\ N(y) = 0 \tag{56}$$

and these equations and (51) imply (52) and (53). For $\Pi_3$, if $\xi_1 = 1$, then

$$y = \overline{xz},\ N(x) = 0,\ N(z) = 0, \tag{57}$$

and these together with $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \xi_3$ give (51)—(53).

We apply these considerations to determine the cardinal number $|\Pi|$ of $\Pi$ if $\Phi$ is a finite field containing $q$ elements. In this case $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{J}$ are split and we may take $\gamma = 1$. We note first that the number of solutions of $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$, $\xi_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ is $q^2 - 3q + 3$. Since $N(y)$ is a quadratic form in eight variables with non-zero square discriminant the number of solutions of $N(y) = \xi_2\xi_3 \neq 0$ is $q^7 - q^3$ (Bourbaki [5] p. 175). Hence, by (55),

$$|\Pi_1| = (q^2 - 3q + 3)(q^7 - q^3)^2. \tag{58}$$

Similarly, if we use the fact that the number of solutions of $N(y) = 0$ is $q^7 + q^4 - q^3$ then (56) and (57) show that

$$|\Pi_2| = 3(q - 2)(q^7 - q^3)(q^4 + q^4 - q^3), \tag{59}$$

$$|\Pi_3| = 3(q^7 + q^4 - q^3)^2. \tag{60}$$

Addition of (58), (59) und (60) gives

$$|\Pi| = q^8(q^8 + q^4 + 1). \tag{61}$$

We consider next $|\Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (y, x))|$. Since the center of $\Gamma_0^*$ has order two and is the kernel of the representation $\chi$ and since the image of $\chi$ is the reduced orthogonal group, $|\Gamma_0^*| = 2\,|O'(\mathfrak{M}, (x, y))|$. Also since the field is finite, $O'(\mathfrak{M}, (x, y))$ is the commutator group $\Omega(\mathfrak{M}, (x, y))$ of the orthogonal group (Artin [4] p. 195). Moreover, $\Omega(\mathfrak{M}, (x, y))$ has index two in the rotation group $O^+(\mathfrak{M}, (x, y))$ (Dieudonné [9] p. 62). Hence $|\Gamma_0^*| = |O^+|$ and

$$|\Gamma_0^*| = q^{16}(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^4 - 1)(q^2 - 1) \tag{62}$$

(Artin [4] p. 141, Dieudonné [9] p. 62).

Multiplication of (61) and (62) gives the following

**Theorem 12.** *The order of the group of automorphisms of the exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ over a finite field containing $q$ elements is*

$$|G| = q^{24}(q^{12}-1)\,(q^8-1)\,(q^6-1)\,(q^2-1). \tag{63}$$

We shall consider the situation for real closed fields later. We consider next the set of left cosets of $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})$ in $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$, $\mathfrak{K} = \sum_1^3 \Phi e_i$. We may suppose that $\gamma_1 = 1$ and $1_{12}^2 = \gamma_2^{-1}(e_1 + e_2)$, $1_{13}^2 = \gamma_3^{-1}(e_1 + e_3)$. An automorphism $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ maps $1_{12}$ into $u_{12}$, $1_{13}$ into $v_{13}$ such that $u_{12}^2 = \gamma_2^{-1}(e_1 + e_2)$, $v_{13}^2 = \gamma_3^{-1}(e_1 + e_3)$. Since $u_{12}^2 = \gamma_2^{-1}N(u)\,(e_1 + e_2)$ we have $N(u) = 1$ and similarly $N(v) = 1$. Conversely, if $u$ and $v$ are two elements of $\mathfrak{C}$ such that $N(u) = 1 = N(v)$ then there is an isomorphism of $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ mapping the $e_i$ into themselves and mapping $1_{12} \to u_{12}$, $1_{13} \to v_{13}$. This can be extended to an automorphism $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$. Hence if $\mathfrak{U}$ denotes the set of elements $u$ of $\mathfrak{C}$ such that $N(u) = 1$, then the mapping $\eta \to (u, v)$ where $1_{12} = u_{12}$, $1_{13} = v_{13}$ is $1-1$ of the set of left cosets $G(\mathfrak{J}/\mathfrak{L})\eta$, $\eta \in G(\mathfrak{J}/\mathfrak{K})$ onto the product set $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$.

## 10. Automorphisms of period two.

Let $\mathfrak{J}$ be a central simple exceptional Jordan algebra and let $\eta$ be an automorphism of period two in $\mathfrak{J}$. Assume first that the base field is algebraically closed and let $\mathfrak{K}$ be the subspace of $\eta$-fixed elements. Since $\eta$ is orthogonal relative to $T(a, b)$, $\mathfrak{K}$ is a non-isotropic — hence semi-simple — subalgebra and $\mathfrak{J} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{K}^\perp$. Moreover $\mathfrak{K}^\perp = \{a \mid a^\eta = -a\}$. If $\mathfrak{K} = \Phi 1$, $\mathfrak{K}$ is the set of elements of trace 0 and we have $l^2 = \lambda 1$ for every $l$ of trace 0. This is impossible; hence $\mathfrak{K} \neq \Phi 1$ and consequently, by the semi-simplicity of $\mathfrak{K}$, this subalgebra contains a primitive idempotent $e$. Then $\eta \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. We may have $\eta = -1$ in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e)$, $\eta = 1$ in $\mathfrak{J}_0(e)$ in which case $\eta$ is the element $\neq 1$ in the center of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. Then $\mathfrak{K} = \Phi e + \mathfrak{J}_0(e)$ is eleven dimensional and is a direct sum of the one dimensional ideal $\Phi e$ and the ten dimensional simple algebra $\mathfrak{J}_0(e)$ of a symmetric bilinear form. Now assume $\eta \neq -1$ in $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e)$. Since the base field is algebraically closed, $\mathfrak{K}$ contains three non-zero orthogonal idempotents unless $\mathfrak{K} = \Phi e + \Phi(1-e) + \mathfrak{K}_{\frac{1}{2}}(e)$. In this case the restriction of $\eta$ to the $\mathfrak{M}$ of Theorem 11 is $-1$. This is impossible. We now have three non-zero orthogonal idempotents $e_i$ such that $e_i^\eta = e_i$ and so $\eta \in G\left(\mathfrak{J}\Big/\sum_1^3 \Phi e_i\right)$. Hence $\mathfrak{J}_{ij}^\eta \subseteq \mathfrak{J}_{ij}$ for the Peirce component $\mathfrak{J}_{ij}$ relative to the $e_i$. The terms $\Phi e_i$ and $\mathfrak{J}_{ij}$ of the Peirce decomposition are pair-wise orthogonal subspaces relative to $T(a, b)$. Hence these are not isotropic. We can therefore decompose $\mathfrak{J}_{ij} = \mathfrak{J}_{ij}^+ + \mathfrak{J}_{ij}^-$ where $\mathfrak{J}_{ij}^+ = \mathfrak{J}_{ij} \cap \mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}_{ij}^- = \mathfrak{J}_{ij} \cap \mathfrak{K}^\perp$ and these are not isotropic. If $\mathfrak{J}_{ij} = \mathfrak{J}_{ij}^-$ for two of the $\mathfrak{J}_{ij}$ then $\eta$ is of the type considered before: $\mathfrak{K}$ is a direct sum of a one dimensional algebra and a ten dimensional simple algebra of a symmetric bilinear form. If, say, $\mathfrak{J}_{12}^+ \neq 0$ and $\mathfrak{J}_{13}^+ \neq 0$ then $\mathfrak{K}$ contains $u_{12} \in \mathfrak{J}_{12}$, $u_{12}^2 \neq 0$ and $v_{13} \in \mathfrak{J}_{13}$, $v_{13}^2 \neq 0$. Hence $\mathfrak{K}$ contains the subalgebra $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ with basis $(e_1, e_2, e_3, u_{12}, v_{13}, u_{12} \cdot v_{13})$ and we can represent $\mathfrak{J}$ as $\mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{C}$ is a (split) Cayley algebra. Now $\eta$ induces an automorphism $\eta'$ of period two in $\mathfrak{C}$. We have called such automorphisms reflections and we have shown that such an $\eta'$ acts as the identity on a quaternion subalgebra of $\mathfrak{C}$ and is $-1$ on the orthogonal complement (Jacobson [13]). It now follows that $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a (split) quaternion algebra.

If $\eta^2 = 1$ and $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ then we shall call $\eta$ a *reflection in* $\mathfrak{K}$. We can now state

**Theorem 13.** *Let $\mathfrak{J}$ be a central simple exceptional Jordan algebra and suppose $\mathfrak{J}$ possesses an automorphism $\eta$ of period two. Then $\mathfrak{J}$ is reduced and either $\eta$ is a reflection in a subalgebra $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ quaternion, or $\eta$ is in the center of a subgroup $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ a primitive idempotent.*

*Proof.* Let $\mathfrak{K}$ be the subalgebra of fixed elements under $\eta$ and let $\Omega$ be the algebraic closure of the base field. Then $\mathfrak{K}_\Omega$ is the set of fixed elements relative to the extension $\eta$ of $\eta$ to $\mathfrak{J}_\Omega$. We have seen that either $\mathfrak{K}_\Omega$ is a direct sum of a one dimensional algebra and a ten dimensional simple algebra of a symmetric bilinear form or $\mathfrak{K}_\Omega$ has the form $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}'_3, \gamma')$, $\mathfrak{D}'$ a split quaternion algebra. It follows easily from the structure theory that in the first case $\mathfrak{K}$ is a direct sum of a one dimensional algebra $\Phi e$ and a ten dimensional simple algebra of a symmetric form and in the second case $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a quaternion algebra (Jacobson [11] p. 44). In either case $\mathfrak{J}$ contains an idempotent $\neq 0,1$ and so $\mathfrak{J}$ is reduced. Also in the first case we have $\eta = -1$ on $(\mathfrak{J}_\Omega)_{\frac{1}{2}}(e)$. Then $\eta = -1$ on $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e)$ and so $\eta$ is in the center of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$.

## 11. Simplicity.

In this section we consider the structure of $G(\mathfrak{J})$, $\mathfrak{J}$ a central simple exceptional Jordan algebra containing nilpotent elements $\neq 0$. Our discussion will be based on the structure of $G(\mathfrak{K})$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a quaternion algebra and on that of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ an $s$-idempotent. We consider first the former of these. It is known that any automorphism of $\mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ has the form

$$\alpha\colon X \to A^{-1}XA, \quad A\gamma\bar{A}' = \delta\gamma, \quad \delta \in \Phi \tag{64}$$

(Jacobson [11] p. 25). The matrix $A$ is determined up to a scalar factor; consequently, $\delta$ is determined up to a square factor in $\Phi$. The coset of $\delta$ with respect to the subgroup of non-zero squares will be called the *multiplicator* of the automorphism $\alpha$. The mapping of $\alpha$ into its multiplicator is a homomorphism. The elements of the kernel $G_1(\mathfrak{K})$ will be called *special* automorphisms. Thus $\alpha$ is special if and only if $A$ can be chosen in (64) so that $\delta = 1$. The kernel contains the commutator group of $G(\mathfrak{K})$. If $\mathfrak{D}$ is a division ring then $G_1(\mathfrak{K})$ is isomorphic to a projective unitary group in a three dimensional space over $\mathfrak{D}$ and if $\mathfrak{K}$ contains non-zero nilpotents then the Witt index is positive and $G_1(\mathfrak{K})$ is simple (Dieudonné [8] p. 79). If $\mathfrak{D}$ is split then $G_1(\mathfrak{K})$ is isomorphic to a six dimensional projective symplectic group and hence $G_1(\mathfrak{K})$ is simple.

**Lemma 5.** *Let $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ a quaternion algebra and assume $\mathfrak{K}$ contains non-zero nilpotents. Then any invariant subgroup $H \neq 1$ of $G(\mathfrak{K})$ contains $G_1(\mathfrak{K})$.*

*Proof.* Let $\beta\colon X \to B^{-1}XB$ be in the centralizer of $G_1$. Then $B^{-1}AB = \mu(A)\,A$, $\mu(A) \in \Phi$, for every $A$ such that $A\gamma\bar{A}' = \gamma$. The mapping $A \to \mu(A)$ is a homomorphism whose kernel contains the commutator group of the group of the matrices $A$. Hence $B$ commutes with every element of this commutator group. It follows that $B$ is a scalar and $\beta = 1$. Now let $\beta$ be any element $\neq 1$ in $H$. Then there exists an $\alpha \in G_1$ such that $\lambda = \beta^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1} \neq 1$. Then $\lambda \in H \cap G_1$ and since $G_1$ is simple, $H \geqq G_1$.

We consider next the structure of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ an $s$-idempotent of $\mathfrak{J}$. We have seen that this group is isomorphic to $\Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$ where $\mathfrak{M}$ is a nine dimensional space. If we use the conjugacy of $s$-idempotents and recall that we may take $\gamma = \operatorname{diag}\{1, -1, 1\}$, in which case $e_1$ is an $s$-idempotent, then we see that we may assume $\mathfrak{M} = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$

and if $x = \xi(e_2 - e_3) + a_{23}$ then $(x, x) = \xi^2 - N(a)$ (cf. § 5). Thus the quadratic form in $\mathfrak{M}$ can be regarded as the norm form of the Jordan algebra based on the space $\mathfrak{C}$ and the bilinear form $N(c, d)$ in $\mathfrak{C}$. The canonical isomorphism $\varepsilon$ (§ 1) of $C^e(\mathfrak{M}, (x, y))$ onto $C(\mathfrak{C}, N)$ maps $fa_{23}$, $f = e_2 - e_3$ on $a \in \mathfrak{C}$.

Now choose $i, j \in \mathfrak{C}_0$ so that $i \perp j$, $N(i) \neq 0$, $N(j) \neq 0$. Then $1, i, j, k = ij$ are pair-wise orthogonal and $N(i)\,N(j)\,N(k) = \beta^2$, $\beta \neq 0$. Hence in $C(\mathfrak{C}, N)$ the elements 1 (of $\mathfrak{C}$), $(\beta^{-1}i)\,jk$ are images under $\varepsilon$ of elements of $\Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$. Since $1, i, j, k$ anti-commute we have $1v = -v1$ for $v = (\beta^{-1}i)\,jk$. This implies that $-\mathrm{I}$ is in the commutator group of $\Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$. We use this to prove

**Lemma 6.** *Let $e$ be an $s$-idempotent of $\mathfrak{J}$ (containing non-zero nilpotents). Then any invariant subgroup of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ which contains an element not in the center coincides with $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$.*

*Proof.* The factor group of $\Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y))$ with respect to the center $\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$ is the reduced orthogonal group $O'(\mathfrak{M}, (x, y))$. Since $(x, y)$ has positive Witt index $O'(\mathfrak{M}, (x, y))$ coincides with the commutator group $\Omega(\mathfrak{M}, (x, y))$ of the orthogonal group. Since the dimensionality is odd the latter is simple by Dieudonné's theorem. Hence $\Gamma_0^*/\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$ is simple and any invariant subgroup of $\Gamma_0^*$ containing the center coincides with $\Gamma_0^*$. It follows that either the result stated holds or $\Gamma_0^*$ is a direct product of its commutator group and $\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$. The latter possibility is ruled out since the commutator group contains $\{\mathrm{I}, -\mathrm{I}\}$.

We are now in a position to prove

**Theorem 14.** *The group of automorphisms of any exceptional central simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ containing non-zero nilpotent elements is a simple group.*

*Proof.* We show first that $G(\mathfrak{J})$ is generated by its subgroups $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ $s$-idempotent in $\mathfrak{J}$. Let $\alpha \in G(\mathfrak{J})$ and let $e$ be an $s$-idempotent. Then $e$ and $f = e^\alpha$ can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ quaternion, so that $e$ and $f$ are $s$-idempotents in $\mathfrak{K}$. By Lemma 4 $f = u^{-1}eu$ where $u$ is a $\gamma$-unitary matrix. Thus $e$ can be mapped into $f$ by a special automorphism $\beta$ of $\mathfrak{K}$. Since the group $G_1(\mathfrak{K})$ of special automorphisms of $\mathfrak{K}$ is simple $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_r$ where $\beta_i$ is a special automorphism of $\mathfrak{K}$ leaving fixed an $s$-idempotent $e_i \in \mathfrak{K}$. (There exist such $\beta_i \neq 1$). The $\beta_i$ can be extended to $\alpha_i \in G(\mathfrak{J}/\Phi e_i)$ and $\delta = \alpha\alpha_r^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$ satisfies $e^\delta = f^{\beta^{-1}} = e$. Hence $\delta \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ and $\alpha = \delta\alpha_1 \cdots \alpha_r$ is in the subgroup generated by the $G(\mathfrak{J}/\Phi e')$, $e'$ $s$-idempotent. We show next that if $H$ is an invariant subgroup $\neq 1$ of $G(\mathfrak{J})$ then $H$ contains an element $\neq 1$ in one of the $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ $s$-idempotent. Let $\beta \neq 1$ be in $H$ and let $e$ be an $s$-idempotent. We may assume $e^\beta = f \neq e$ and imbed $e, f$ in $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$, $\mathfrak{D}$ quaternion, so that $e$ and $f$ are $s$-idempotents in $\mathfrak{K}$. Assume first that $\mathfrak{K}^\beta \leqq \mathfrak{K}$ and let $\beta'$ denote the induced automorphism in $\mathfrak{K}$. Since $\beta' \neq 1$, Lemma 5 implies that the invariant subgroup of $G(\mathfrak{K})$ generated by $\beta'$ contains an $\alpha'$ such that $e^{\alpha'} = e$. This $\alpha'$ can be extended to an $\alpha \in H$ and $e^\alpha = e$ as required. Next assume $\mathfrak{K}^\beta \nleqq \mathfrak{K}$. Let $\eta$ be the reflection in $\mathfrak{K}$, that is the automorphism of period two having $\mathfrak{K}$ as subalgebra of fixed elements. If $k \in \mathfrak{K}$ and $k^\beta \notin \mathfrak{K}$ then $k^{\eta\beta} = k^\beta \neq k^{\beta\eta}$. Hence $\alpha = \eta\beta\eta^{-1}\beta^{-1} \neq 1$ and $\alpha \in H$. Also

$$e^{\eta\beta\eta^{-1}\beta^{-1}} = e^{\beta\eta^{-1}\beta^{-1}} = e^{\beta\beta^{-1}} = e,$$

so that $\alpha \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. We have now established that $H$ contains $\alpha \neq 1$ in a subgroup $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $e$ $s$-idempotent. If $\alpha$ is not in the center of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$ then $H$ contains $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, by Lemma 6. Since any two $s$-idempotents are conjugate in $\mathfrak{J}$ it follows that $H$ contains every $G(\mathfrak{J}/\Phi f)$, $f$ $s$-idempotent and $H = G$ since $G$ is generated by the $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. Now

assume $\alpha$ is in the center of $G(\mathfrak{J}/\Phi e)$. If $e = e_1$ in a set $e_1, e_2, e_3$ of non-zero orthogonal idempotents then $\alpha$ has the following form: $e_i^\alpha = e_i$, $x_{23}^\alpha = x_{23}$, $x_{13}^\alpha = -x_{13}$, $x_{12}^\alpha = -x_{12}$. We can now choose a subalgebra $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{D}_3, \gamma)$ where $\mathfrak{D}$ is a quaternion subalgebra of $\mathfrak{C}$ and we may take $\mathfrak{K}$ to contain nilpotent elements $\neq 0$. Then $\mathfrak{K}^\alpha \leqq \mathfrak{K}$ and $\alpha$ induces an automorphism $\alpha' \neq 1$ in $\mathfrak{K}$. Then Lemma 5 implies that $H$ contains $\beta \in G(\mathfrak{J}/\Phi e)$, $\beta$ not in the center of this group. This reduces the discussion to the situation considered before.

## 12. Invariant subspaces relative to $G$.

**Theorem 15.** *Let $\mathfrak{K}$ be a subspace of a reduced exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, \gamma)$ which is invariant under the group of automorphisms $G$ of $\mathfrak{J}$. Then either $\mathfrak{K} = O$, $\mathfrak{K} = \Phi 1$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{J}$, or $\mathfrak{K} = \mathfrak{J}'$ the set of elements of trace* 0.

*Proof.* The result will be proved by showing that if $\mathfrak{K}$ contains an element not in $\Phi 1$ then $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{J}'$. Hence assume $k = \sum_1^3 \xi_i e_i + a_{12} + b_{23} + c_{31} \in \mathfrak{K}$, $\notin \Phi 1$. Let $\eta_1$ be the automorphism such that $e_i^{\eta_1} = e_i$, $x_{12}^{\eta_1} = -x_{12}$, $x_{13}^{\eta_1} = -x_{13}$, $x_{23}^{\eta_1} = x_{23}$. Then $k^{\eta_1} = \Sigma \xi_i e_i - a_{12} + b_{23} - c_{13}$ and $\frac{1}{2}(k - k^{\eta_1}) = a_{12} + c_{31} \in \mathfrak{K}$. Similarly, $a_{12} + b_{23} \in \mathfrak{K}$ and $b_{23} + c_{31} \in \mathfrak{K}$. Hence $a_{12}, b_{23}, c_{31}, \Sigma \xi_i e_i \in \mathfrak{K}$. Assume first that $a_{12} \neq 0$. Then $\mathfrak{K}$ contains a non-zero element of the subspace $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e_1) \cap \mathfrak{K}$ which is invariant under $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$. We have seen that $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e_1)$ is irreducible relative to $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$. Hence $\mathfrak{J}_{\frac{1}{2}}(e_1) = \mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{13} \leqq \mathfrak{K}$. A similar argument using $G(\mathfrak{J}/\Phi e_2)$ shows that $\mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{23} \leqq \mathfrak{K}$. Hence every $\mathfrak{J}_{ij} \leqq \mathfrak{K}$. We now use the fact that $G(\mathfrak{J}/\Phi e_1)$ acts irreducibly in $\mathfrak{J}_0(e_1) = \Phi(e_2 - e_3) + \mathfrak{J}_{23}$ to conclude that $e_2 - e_3 \in \mathfrak{K}$. Similarly, $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3 \in \mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{J}'$. The same argument can be used to prove $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{J}'$ if either $b_{23} \neq 0$ or $c_{31} \neq 0$. Hence we may suppose $k = \sum_1^3 \xi_i e_i \in \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$. If $A$ is a $\gamma$-orthogonal matrix then $X \to A^{-1}XA$, $X \in \mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ is an automorphism of $\mathfrak{H}(\Phi_3, \gamma)$ and this can be extended to an automorphism of $\mathfrak{J}$. Assume first that $\Phi$ has at least six elements and let $\mathfrak{M}$ be a three dimensional vector space over $\Phi$ with basis $(u_1, u_2, u_3)$ and bilinear form $(x, y)$ such that $(u_i, u_j) = \gamma_i \delta_{ij}$ ($\delta_{ij}$ the Kronecker delta). Suppose $i, j$ is a pair of indices in $1, 2, 3$ such that $\xi_i \neq \xi_j$ and let $\varrho$ be chosen in $\Phi$ so that: $\varrho \neq 0, 1 + \varrho^2 \gamma_j \gamma_i^{-1} \neq 0, 1 - \varrho^2 \gamma_j \gamma_i^{-1} \neq 0$. Let

$$\alpha = (1 - \varrho^2 \gamma_j \gamma_i^{-1})\,(1 + \varrho^2 \gamma_j \gamma_i^{-1})^{-1}, \quad \beta = 2\varrho(1 + \varrho^2 \gamma_j \gamma_i^{-1})^{-1}$$

and let $A_{ij}$ be the linear mapping in $\mathfrak{M}$ such that

$$u_i A_{ij} = \alpha u_i - \beta u_j, \quad u_j A_{ij} = \gamma_j \gamma_i^{-1} \beta u_i + \alpha u_j, \quad u_k A_{ij} = u_k$$

if $k \neq i, j$. Then $A_{ij}$ is orthogonal and if $X$ is the linear mapping such that $u_i X = \xi_i u_i$, then

$$(u_i A_{ij} X,\ u_j A_{ij}) = (\alpha \xi_i u_i - \beta \xi_j u_j,\ \gamma_j \gamma_i^{-1} \beta u_i + \alpha u_j) = \alpha\beta\gamma_j(\xi_i - \xi_j) \neq 0.$$

This implies that $A_{ij} X A_{ij}^{-1}$ is not diagonal. Hence we have an automorphism $\eta$ in $\mathfrak{J}$ such that $k^\eta$ is not of the form $\sum_1^3 \xi_i' e_i$. It follows as before that $\mathfrak{K} \geqq \mathfrak{J}'$. Assume next that $\Phi$ is any finite field. Then $\mathfrak{C}$ is split and we may choose a split two dimensional semi-simple subalgebra $P$ of $\mathfrak{C}$. Then $k \in \mathfrak{H}(P_3, \gamma) \cong \Phi_3^+$. It follows from Kasch's theorem, or directly, that there is an inner automorphism of $\Phi_3$ mapping $k$ into an element $l$ not of the form $\Sigma \xi_i' e_i$. Then we have an $\eta \in G(\mathfrak{J})$ such that $k^\eta = l \in \mathfrak{K}$ and we can proceed as before.

**Corollary.** *Let $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{J}'$ be as in the theorem and suppose the characteristic is not three. Then $\mathfrak{J}'$ is an irreducible invariant subspace relative to $G(\mathfrak{J})$.*

*Proof.* The invariance is clear since $T(a) = 0$ implies $T(a^\eta) = 0$ for every $\eta \in G$. Since the characteristic is not three $1 \in \mathfrak{J}'$. Hence $\mathfrak{J}'$ contains no invariant subspace $\neq 0$.

**Remark.** This result has been used in [14] to prove that if $z \in \mathfrak{J}$ of characteristic not three satisfies $z^2 = 0$, $z \neq 0$ then there exists a $w$ in $\mathfrak{J}$ such that $w^2 = 0$ and such that the subalgebra generated by $z$ and $w$ has a basis of three orthogonal idempotents $e_i$ and an element $1_{12} \in \mathfrak{J}_{12}$. Originally, our proof of Theorem 15 was somewhat different from the one given here and used the assumption that $\Phi$ has at least six elements. Consequently the "$z$, $w$ theorem" of [14] was stated with this restriction. This can now be dropped. We recall also that the $z$, $w$ theorem was used in the last part of the proof of Theorem 4.

## 13. Concluding remarks.

If $k = \sum_1^3 \xi_i e_i + a_{12} + b_{23} + c_{31} \in \mathfrak{J} = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_3, 1)$ then

$$T(k, k) = \sum_1^3 \xi_i^2 + 2\big(N(a) + N(b) + N(c)\big).$$

Let $\Phi = \Phi_0 \langle t \rangle$ the field of formal power series over $\Phi_0$ the field of real numbers and let $\mathfrak{C}$ be a Cayley division algebra over $\Phi$ whose norm form $N(a)$ is a sum of eight squares. Relative to a suitable basis for $\mathfrak{J}$ the elements of the orthogonal group $O(\mathfrak{J}, T)$ have matrices $(\mu_{ij})$ such that $\sum_{j=1}^{27} \mu_{ij}\mu_{kj} = \delta_{ik}$. It follows that the entries $\mu_{ij}$ are integral, that is, have the form $\sum_{r>0} \alpha_r t^r$ and the transformations such that $\mu_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{t}$ form a proper invariant subgroup $O^{(1)} \neq 1$ in $O(\mathfrak{J}, T)$ (Dieudonné [8] p. 35). Since the group of automorphisms $G(\mathfrak{J})$ is a subgroup of $O(\mathfrak{J}, T)$, $G^{(1)} = O \cap O^{(1)}$ is an invariant subgroup of $G$. Let $D$ be a derivation in $\mathfrak{J}$ whose matrix is $\equiv 0 \pmod{t}$. Then $\eta = \exp D = 1 + D + \frac{D^2}{2} + \cdots$ is an automorphism and $\eta \neq 1$ is in $G^{(1)}$. On the other hand, we can consider $\mathfrak{J}$ as $(\mathfrak{J}_0)_\Phi$ where $\mathfrak{J}_0$ is a Jordan algebra over $\Phi_0$. Hence there exist automorphisms $\neq 1$ in $\mathfrak{J}_0$ (and hence in $\mathfrak{J}$) whose matrices have entries in $\Phi_0$. These automorphisms are not contained in $G^{(1)}$. Thus $G > G^{(1)} > 1$ and $G$ is not simple.

If $\Phi$ is real closed then there are exactly three non-isomorphic central simple exceptional Jordan algebras over $\Phi$: $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_s, 1)$, $\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_d, 1)$ and $\mathfrak{J}_3 = \mathfrak{H}(\mathfrak{C}_d, \gamma)$, $\gamma = \operatorname{diag}\{1, -1, 1\}$ where $\mathfrak{C}_s$ is the split Cayley algebra over $\Phi$ and $\mathfrak{C}_d$ is the Cayley division algebra over $\Phi$. Theorem 14 implies that $G(\mathfrak{J}_1)$ and $G(\mathfrak{J}_3)$ are simple. It is easy to see that any two primitive idempotents of $\mathfrak{J}_2$ are conjugate. One can then adapt the proof of Theorem 14 to show that $G(\mathfrak{J}_2)$ is simple.

If $\Phi$ is the field of real numbers then all of the groups $G(\mathfrak{J}_i)$, $i = 1, 2, 3$, can be considered as topological linear groups in the usual topology. Since these groups are simple they are connected. The group $G(\mathfrak{J}_2)$ is a closed subgroup of the orthogonal group $O(\mathfrak{J}_2, T)$ and so $G(\mathfrak{J}_2)$ is compact. The coset space of $G(\mathfrak{J}_2)$ relative to the closed subgroup $G(\mathfrak{J}_2/\Phi e)$, $e$ a primitive idempotent is the space $\Pi$ of primitive idempotents and this is Freudenthal's version of the Cayley plane. Since $G(\mathfrak{J}_2/\Phi e) \cong \Gamma_0^*(\mathfrak{M}, (x, y)) \cong \operatorname{Spin}(9)$ which is simply connected and $\Pi$ is simply connected (cf Jordan [16]) it follows that

$G(\mathfrak{J}_2)$ is simply connected. The coset space of $G\left(\mathfrak{J}_2 \Big/ \sum_1^3 \Phi e_i\right)$, $e_i$ non-zero orthogonal idempotents, relative to $G(\mathfrak{J}_2/\mathfrak{H}(\Phi_3, 1))$ is essentially the coset space of Spin (8) relative to the Killing-Cartan group $G_2$. The result of § 9 shows that this coset space is the topological product of two seven dimensional spheres.

It is known that if $\Phi$ is an algebraic number field with $t$ distinct real conjugate fields then there are exactly $3^t$ distinct central simple exceptional Jordan algebras $\mathfrak{J}_i$ over $\Phi$. We conjecture that all the $G(\mathfrak{J}_i)$ are simple.

## Bibliography.


[1] *A. A. Albert*, A theory of power associative commutative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 503—527.

[2] *A. A. Albert*, A construction of exceptional Jordan division algebras, Annals of Math. **67** (1958), 1—28.

[3] *A. A. Albert* and *N. Jacobson*, Reduced exceptional simple Jordan algebras, Annals of Math. **67** (1957).

[4] *E. Artin*, Geometric Algebra, New York, 1957.

[5] *N. Bourbaki*, Éléments de Mathematique, Livre II, Algèbre, Paris, 1950.

[6] *C. Chevalley*, The Algebraic Theory of Spinors, New York, 1954.

[7] *C. Chevalley*, Sur certains groupes simples, Tohoku Math. Jour., (2), **7** (1955), 14—66.

[8] *J. Dieudonné*, Sur les Groupes Classiques, Paris, 1948.

[9] *J. Dieudonné*, La Géometrie des Groupes Classiques, Ergebn. der Math., Berlin, 1955.

[10] *H. Freudenthal*, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht, 1951.

[11] *N. Jacobson*, Structure of alternative and Jordan bimodules, Osaka Math. Jour. **6** (1954), 1—70.

[12] *N. Jacobson*, A theorem on the structure of Jordan algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 140—147.

[13] *N. Jacobson*, Composition algebras and their automorphisms, Rend. Cir. Mat. di Palermo, (II), **7** (1958), 55—80.

[14] *N. Jacobson*, Nilpotent elements in semi-simple Jordan algebras, Math. Annalen, **136** (1958), 375—386.

[15] *N. Jacobson*, Some groups of transformations defined by Jordan algebras. I, this journal **201** (1959), 178—195.

[16] *P. Jordan*, Nicht-Desarguessche ebene projektive Geometrie, Hamb. Abhandl. **16** (1949), 74—76.

[17] *F. Kasch*, Über den Automorphismeoring einfacher Algebren, Arch. Math. **6** (1954), 59—64.


Eingegangen 31. Juli 1959.

# Anneaux de Rees intégralement clos.

**A M. Wolfgang Krull, à l'occasion de son 60e anniversaire.**

Par *P. Ribenboim* à Rio de Janeiro.

---

Soit $A$ un anneau d'intégrité, $K$ son corps des fractions, $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-groupes de $K$, de façon que

$$A_0 = A, A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n} \quad (\text{pour } m, n \geq 0).$$

Dans la théorie des anneaux locaux, on est amené à la considération de $A' = \sum_{n \geq 0} A_n X^n$, sous-anneau de $K[X]$ formé des polynômes

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m, \text{ où } a_i \in A_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m), \; m \geq 0;$$

$A'$ est appelé *l'anneau de Rees* défini par $A$ et par la suite de sous-groupes $(A_n)_{n \geq 0}$ (cf. [1]).

L'object principal de cette note est la détermination des conditions nécessaires et suffisantes sur $(A_n)_{n \geq 0}$ pour que l'anneau de Rees associé soit intégralement fermé dans $K(X)$. Nous utilisons les notions d'anneau Prüferien (relativement à la suite $(A_n)_{n \geq 0}$), qui généralise la notion d'idéal clos, introduite par Prüfer (cf. [2]); nous faisons aussi usage d'un résultat profond de Lorenzen (cf. [3]) qui montre l'identité entre les $a$-idéaux et les $b$-idéaux introduits par Krull (cf. [4]).

Comme conséquence, nous indiquons des exemples simples d'anneaux de Rees intégralement clos mais non complètement intégralement clos.

Nous voulons remercier le Professeur P. Samuel par les discussions sur le sujet de cette note.

## § 1. Rappel de résultats.

Nous voulons tout d'abord rappeler un important résultat de Lorenzen, dont nous ferons usage au théorème 1.

Soit $A$ un anneau intégralement clos, $K$ son corps des fractions, donc par le théorème de Krull, $A$ est l'intersection de la famille $(B_\iota)_{\iota \in \Omega}$ d'anneaux de valuation qui le contiennent: $A = \bigcap_\Omega B_\iota$. Si $M$ est un idéal fractionnaire de $K$ relativement à l'anneau $A$, soit $M_b = \bigcap_\Omega B_\iota \cdot M$; $M_b$ est encore un idéal fractionnaire de $K$, appelé le $b$-idéal engendré par $M$; tout idéal fractionnaire $M$ de $K$ tel que $M = M_b$ s'appelle un $b$-idéal ou idéal de valeurs (Krull). De même, si $M$ est un idéal fractionnaire de $K$, l'ensemble $M_a$ des éléments $x \in K$ qui satisfont une équation du type $X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m = 0$, avec $a_i \in M^i$ (idéal fractionnaire engendré par les produits $x_1 x_2 \cdots x_i$, avec $x_j \in M$), pour $i = 1, \ldots, m$, est un idéal fractionnaire de $K$, appelé le $a$-idéal engendré par $M$; tout idéal fractionnaire $M$ de $K$ tel que $M = M_a$ s'appelle un $a$-idéal ou un idéal clos (Prüfer).

Lorenzen a demontré qu'un idéal fractionnaire de $K$, relativement à l'anneau $A$, est un $a$-idéal si et seulement s'il est un $b$-idéal.

Nous utiliserons aussi le lemme suivant. Rappelons qu'un anneau $B$ est *gradué* lorsqu'on se donne une suite $(B^{(n)})_{n \in Z}$ de sous-groupes de $B$ de façon que:

1) $B^{(m)} \cdot B^{(n)} \leqq B^{(m+n)}$ pour $m$, $n$ entiers;

2) $B$ est la somme directe des sous-groupes $B^{(n)}$.

Les éléments de $B^{(n)}$ sont appelés homogènes de degré $n$, et ainsi tout élément de $B$ s'écrit de façon unique comme somme d'un nombre fini d'éléments homogènes, appelés les composantes homogènes de l'élément donné. Un sous-anneau $A$ d'un anneau gradué $B$ est dit *homogène* lorsque toutes les composantes homogènes d'un élément quelconque de $A$ sont dans $A$.

**Lemme 1.** *Soit $B$ un anneau intègre gradué, $A$ un sous-anneau homogène de $B$. Alors, la fermeture intégrale de $A$ dans $B$ est un sous-anneau homogène, c. a. d. si $b \in B$ est entier sur $A$ alors toute composante homogène de $b$ est entière sur $A$.*

La démonstration se fait par induction sur le nombre des composantes homogènes non nulles de $b$, le lemme étant trivial pour $b = 0$. Soit $b \in B$ entier sur $A$ et $b^{(s)}$ la composante homogène non nulle de plus petit degré de $b$; donc $b$ satisfait une équation

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \text{ avec } a_i \in A;$$

puisque $A$ est un sous-anneau homogène de $B$, alors chaque $a_i$ s'écrit comme somme de ses composantes homogènes $a_i = \sum_j a_i^{(j)}$, avec $a_i^{(j)} \in A$.

Si $P$ est l'anneau premier contenu dans $A$, si $R = P[a_i^{(j)}]_{i,j}$ alors $R$ est un anneau Noetherien, homogène, $R \leqq A$; $b$ étant entier sur $R$, alors $R[b]$ est un $R$-module de type fini, lequel engendre un $R$-module homogène $M$ contenu dans $B$ et qui est encore un $R$-module de type fini. De $b \in M$ il résulte que $b^{(s)} \in M$. Or, $R[b^{(s)}]$ est un sous-$R$-module de $M$; puisque $R$ est Noetherien alors $R[b^{(s)}]$ est un $R$-module de type fini, donc $b^{(s)}$ est entier sur $R$ et par conséquent, $b^{(s)}$ est entier sur $A$.

La démonstration se termine en remarquant que l'élément $b - b^{(s)}$ est entier sur $A$ et les composantes homogènes non nulles de $b - b^{(s)}$ sont celles de $b$, distinctes de $b^{(s)}$; donc, par induction, toutes les composantes homogènes de $b$ sont des éléments entiers sur $A$.

## § 2. Résultats.

Soit $A$ un anneau d'intégrité, $K$ son corps des fractions, $(A_n)_{n \geqq 0}$ une suite de sous-groupes de $K$, de façon que

$$A_0 = A, \; A_m \cdot A_n \leqq A_{m+n} \quad (\text{pour } m, n \geqq 0).$$

On dit alors que l'anneau $A$ est muni d'une structure définie par $(A_n)_{n \geqq 0}$ et [lorsqu'on] écrira $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, on suppose que les conditions ci-dessus sont vérifiées.

Par exemple, on peut avoir $A_n = (0)$ pour $n = 1, 2, \ldots$; ou bien $A_n = \mathfrak{a}^n$ pour $n = 1, 2, \ldots$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal fractionnaire de $A$; ou bien $A_n = K$ pour $n = 1, 2, \ldots$; ou bien par exemple $(A_n)_{n \geqq 1}$ définit une graduation de l'anneau $A$, c. a. d. $A$ est égal à la somme directe des idéaux $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$; ou bien par exemple, $(A_n)_{n \geqq 0}$ définit une filtration de l'anneau $A$, c. a. d.

$$A \geqq A_1 \supset A_2 \geqq \cdots.$$

Remarquons que si $A \subseteqq A_1$ alors

$$A \subseteqq A_1 \subseteqq A_2 \subseteqq \cdots,$$

car

$$A_n = 1 \cdot A_n \subseteqq A \cdot A_n \subseteqq A_1 \cdot A_n \subseteqq A_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

de même, si $A_1 \neq (0)$ et $A_n = K$ pour un entier $n \geqq 1$, alors

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = K,$$

car $K \subseteqq A_1 \cdot A_n \subseteqq A_{n+1} \subseteqq K$. De $AA_n \subseteqq A_n$ il résulte que chaque $A_n$ est un $A$-module contenu dans $K$ (mais non nécessairement un idéal fractionnaire).

**Définition.** *Soit l'anneau $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$; l'anneau $A' = \sum_{n \geqq 0} A_n X^n$ des polynômes*

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_m X^m, \; a_n \in A_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \; m \geqq 0,$$

*est appelé l'anneau de Rees défini par $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$.*

On a $A' \subseteqq K[X]$ et le corps des fractions de $A'$ n'est pas nécessairement égal à $K(X)$; par exemple, lorsque $A_n = (0)$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on a $A' = A$ et son corps des fractions est $K$.

**Définition.** *Soit l'anneau $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$ et $F$ un corps tel que $A \subseteqq F$. Un élément $y \in F$ est dit entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$ lorsque $y$ est racine d'une équation*

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n = 0, \; a_i \in A_{ip} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

*En particulier, les éléments entiers d'espèce 0 sur $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$, sont exactement les éléments entiers sur l'anneau $A$.*

Notons par $I_F(A_p)$ l'ensemble des éléments de $F$ entiers d'espèce $p \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$. Donc $A_p \subseteqq I_F(A_p)$ et $I_F(A)$ est la fermeture intégrale de $A$ dans $F$.

**Lemme 2.** *Avec ces notations, pour que $y \in F$ soit entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$, il faut et il suffit que $yX^p \in F[X]$ soit entier sur l'anneau de Rees $A'$.*

En effet, soit $y \in F$ et supposons que

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + + a_{n-1} y + a_n = 0, \; a_i \in A_{ip} \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

alors

$$(yX^p)^n + (a_1 X^p) \cdot (yX^p)^{n-1} + (a_2 X^{2p}) \cdot (yX^p)^{n-2} + \cdots + (a_{n-1} X^{(n-1)p}) \cdot (yX^p) + a_n X^{np} = 0,$$

avec $a_i X^{ip} \in A_{ip} X^{ip} \subseteqq A'$, donc $yX^p$ est entier sur $A'$.

Réciproquement, supposons que $yX^p$ soit entier sur $A'$, donc $yX^p$ satisfait une relation

$$(yX^p)^n + a'_1 \cdot (yX^p)^{n-1} + a'_2 \cdot (yX^p)^{n-2} + \cdots + a'_{n-1} \cdot (yX^p) + a'_n = 0, \; a'_i \in A',$$

donc $a'_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{i,j} X^j$, $a_{i,j} \in A_j$. En égalant à zéro le coefficient de $X^{np}$ du premier membre, on a

$$y^n + a_{1,p} y^{n-1} + a_{2,2p} y^{n-2} + \cdots + a_{n-1,(n-1)p} y + a_{n,np} = 0$$

avec $a_{i,ip} \in A_{ip}$ $(i = 1, \ldots, n)$; donc $y$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$.

**Corollaire.** *Avec ces notations on a:*

1) *Pour tout $n \geqq 0$, $I_F(A_n)$ est un sous-groupe de $F$; si $A_n$ est un idéal fractionnaire de $A$ alors $I_F(A_n)$ est un idéal fractionnaire de $I_F(A)$, si $A_n = K$ alors $I_F(A_n)$ est le corps des fractions de $I_F(A)$.*

2) *$I_F(A_n) \cdot I_F A_m) \subseteqq I_F(A_{m+n})$ pour $m, n \geqq 0$.*

En effet, soient $y, y' \in I_F(A_n)$, donc $yX^n$, $y'X^n$ sont entiers sur $A'$ et alors de $(y \pm y')X^n$ entier sur $A'$ il résulte que $y \pm y' \in I_F(A_n)$.

De même, soient $y \in I_F(A_m)$, $y' \in I_F(A_n)$, donc $yX^m$, $y'X^m$ sont entiers sur $A'$ et alors $(y \cdot y')X^{m+n}$ étant entier sur $A'$, il résulte que $y \cdot y' \in I_F(A_{m+n})$.

**Définition.** *L'anneau $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est dit Prüferien lorsque pour tout $p \geqq 0$ si $y \in K$ est entier d'espèce $p$ alors $y \in A_p$.*

En d'autres termes, $I_K(A_p) = A_p$ quelque soit $p \geqq 0$. En particulier, si $A, (A_n)_{n \geqq 0}$ est Prüferien, alors $A$ est un anneau intégralement clos.

**Lemme 3.** *Soit l'anneau $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$, soit $K$ le corps des fractions de $A$, $F$ un surcorps de $K$ et $B_n = I_F(A_n)$ pour $n \geqq 0$. Si $B' = \sum_{n=0}^{\infty} B_n X^n$ alors $B'$ est entier sur $A'$ et $B$, muni de $(B_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.*

En effet, soit $yX^p \in B_p X^p \subseteqq B'$; par le lemme 2, de $y \in B_p = I_F(A_p)$, il résulte que $yX^p$ est entier sur $A'$; donc $B'$ est contenu dans la fermeture intégrale de $A'$ dans $F(X)$.

Pour montrer que $B, (B_n)_{n \geqq 0}$ est Prüferien, soit $y \in F$, $y$ entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $B, (B_n)_{n \geqq 0}$, donc par le lemme 2, $yX^p$ est entier sur $B'$ et alors $yX^p$ est aussi entier sur $A'$, donc par le lemme 2, $y$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$, donc $y \in B_p = I_F(A_p)$.

Dans le cas particulier où $F = K$, l'anneau $B = I_K(A)$, muni de la suite $(B_n)_{n \geqq 0}$, est appelé la *fermeture Prüferienne* de $A, (A_n)_{n \geqq 0}$.

Donc, $A, (A_n)_{n \geqq 0}$ est Prüferien si et seulement s'il coincide avec sa fermeture Prüferienne.

Avant d'enoncer le théorème 1, introduisons encore une notation. Soit

$$\sqrt[k]{A_n} = \{x \in K \mid x^k \in A_n\} \text{ pour } k \geqq 1,\ n \geqq 0.$$

Donc, on a $\sqrt[k]{A_{nk}} \geqq A_n$ quelque soit $k \geqq 1$, $n \geqq 0$, en vertu de l'hypothèse.

**Théorème 1.** *Soit l'anneau $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *$A' = \Sigma A_n X^n$ est integralement fermé dans $K(X)$,*

2) *$A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.*

*En outre, si on suppose que chaque $A_n$ est un idéal fractionnaire de $K$ ou bien égal à $K$, ces conditions sont encore équivalentes à la suivante:*

3) (a) *on a $\sqrt[k]{A_{kn}} = A_n$ quelque soit $n \geqq 0$, $k \geqq 1$ et*

(b) *si $(B_\iota)_\Omega$ est la famille d'anneaux de valuation de $K$ contenant $A$ alors $A_n = \bigcap_\Omega B_\iota A_n$ pour tout $n \geqq 0$.*

*Démonstration*: (1) → (2): Soit $p \geqq 0$ et $y \in I_K(A_p)$, donc par le lemme 2, $yX^p$ est entier sur $A'$; par hypothèse, $yX^p \in A'$ donc $y \in A_p$ et $I_K(A_p) = A_p$ quelque soit $p \geqq 0$, c. a. d. $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.

(2) → (1): Soit $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, Prüferien, et $f \in K(X)$ entier sur $A' \subseteqq K[X]$, donc nécessairement $f \in K[X]$ et il est du type $f = \Sigma a_q X^q$. Par le lemme 1, chaque composante homogène $a_q X^q$ de $f$ est un élément entier sur $A'$, donc par le lemme 2, $a_q$ est entier d'espèce $q \geqq 0$ sur $A, (A_n)_{n \geqq 0}$; par hypothèse, $a_q \in A_q$ et alors

$$f = \Sigma a_q X^q \in \Sigma A_q X^q = A',$$

donc $A'$ est intégralement fermé dans $K(X)$.

Supposons maintenant que chaque $A_n$ soit un idéal fractionnaire ou égal à $K$ et montrons l'équivalence de (2) et (3).

(2) → (3): Montrons la condition (a). Soit $x \in K$ tel que $x^k \in A_{kn}$ (où $k \geqq 1$, $n \geqq 0$); alors $x$ est racine de l'équation $X^k - x^k = 0$ avec $x^k \in A_{kn}$; donc $x \in I_K(A_n) = A_n$ car, $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien. On conclut que $\sqrt[k]{A_{kn}} = A_n$ quelque soit $k \geqq 1$, $n \geqq 0$.

Montrons la condition (b); on peut se restreindre au cas où $A_n \neq K$, donc $A_n$ est un idéal fractionnaire de $A$. Soit $(B_\iota)_\Omega$ la famille d'anneaux de valuation de $K$ contenant $A$ et soit $x \in \bigcap_\Omega B_\iota A_n$ (où $n \geqq 0$). Par le résultat de Lorenzen, indiqué au § 1, on a $\bigcap_\Omega B_\iota A_n = A_n^*$ ($a$-idéal de $K$ engendré par $A_n$), donc $x$ est racine d'une équation

$$X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = 0 \text{ avec } a_k \in A_n^k \subseteqq A_{kn},$$

et alors $x \in I_K(A_n) = A_n$ car $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien. On conclut que $A_n = \bigcap_\Omega B_\iota A_n$ quelque soit $n \geqq 0$.

(3) → (2): Montrons que $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien. Soit $x \in K$ entier d'espèce $p \geqq 0$, donc $x$ est racine d'une équation du type

$$X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = 0, \; a_k \in A_{kp} \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Pour montrer que $x \in A_p = \bigcap_\Omega B_\iota A_p$ il suffit clairement de montrer que pour toute valuation $w_\iota \in \Omega$ on a $w_\iota(x) \in w_\iota(B_\iota A_p)$. Or, s'il existait une valuation $w_\iota \in \Omega$ telle que $w_\iota(x) \notin w_\iota(B_\iota A_p)$ alors il serait $x \notin A_p$ donc $x^k \notin A_{kp}$ quelque soit $k = 1, \ldots, m$; il résulte que pour $k = 1, \ldots, m$, on a

$$w_\iota(a_k x^{m-k}) = w_\iota(a_k) + (m - k)\, w_\iota(x) > m w(x);$$

on conclut que

$$\begin{aligned} \infty = w_\iota(0) &= w_\iota(x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m) \\ &= \min \{w_\iota(a_k) + (m - k)\, w_\iota(x)\} = m \cdot w_\iota(x), \end{aligned}$$

absurde!

**Corollaire 1.** *Soit $A$ un anneau de valuation, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *$A' = \Sigma A_n X^n$ est intégralement fermé dans $K(X)$,*

2) *$A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien,*

3) *$\sqrt[k]{A_{kn}} = A_n$ quelque soit $n \geqq 0$, $k \geqq 1$.*

En effet, il suffit de remarquer que, pour un anneau de valuation $A$ tout $A$-module distinct de $K$ est un idéal fractionnaire.

Il est bon de noter que la condition (3) ci-dessus n'implique pas nécessairement qu'on ait $A_n^k = A_{kn}$ quelque soit $n \geqq 0$, $k \geqq 1$.

Comme conséquence triviale du théorème, on obtient encore ce résultat bien connu:

**Corollaire 2.** *Le corps $K$ est algébriquement fermé dans $K(X)$; c. a. d. si $f \in K(X)$, $f \notin K$, alors $f$ est transcendant sur $K$.*

En effet, prenons $A = K$, $A_n^1 = (0)$ lorsque $n \geqq 1$; alors $K$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien, donc $A' = K$ est intégralement fermé dans $K(X)$. Donc, si $f \in K(X)$ est algébrique sur $K$, il satisfait une relation

$$a_0 f^m + a_1 f^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \; a_0 \neq 0,$$

donc

$$(a_0 f^m) + a_1(a_0 f)^{m-1} + a_0 a_2 (a_0 f)^{m-2} + \cdots + a_0^{m-1} a_m = 0,$$

donc $a_0 f$ serait entier sur $K$ et alors $a_0 f \in K$, donc $f \in K$.

**Corollaire 3.** *Soit $(B_\iota)_\Omega$ une famille d'anneaux (par exemple, de valuation) d'un corps $K$, chacun des anneaux $B_\iota$ étant Prüferien relativement à une suite de sous-groupes $(B_{\iota,n})_{n \geqq 0}$. Alors $A = \bigcap_\Omega B_\iota$ est un anneau Prüferien relativement à la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$, où $A_n = \bigcap_\Omega B_{\iota,n}$, pour $n \geqq 0$.*

En effet, si chaque anneau $B_\iota$ est Prüferien relativement à la suite $(B_{\iota,n})_{n \geqq 0}$, soit $A = \bigcap_\Omega B_\iota$, $A_n = \bigcap_\Omega B_{\iota,n}$ (pour $n = 0, 1, 2, \ldots$). Tout d'abord on a $A_0 = A$ et $A_m A_n \leqq A_{m+n}$ pour $m, n \geqq 0$. Si $y \in K$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$ alors $y$ est racine d'une équation

$$X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_{m-1} X + a_m = 0, \quad a_k \in A_{kp} \leqq B_{\iota,p} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

donc pour tout $B_\iota \in \Omega$ $y$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $B_\iota$, $(B_{\iota,n})_{n \geqq 0}$; par hypothèse $y \in \bigcap_\Omega B_{\iota,p} = A_p$, ce qui montre que $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.

Nous allons maintenant indiquer quelques conditions suffisantes pour que la réciproque du corollaire 3 soit valable.

**Théorème 2.** *Soit $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, un anneau Prüferien, et $K$ le corps des fractions de $A$. Pour que tout anneau de valuation $B$ de $K$, $A \leqq B \leqq K$, muni de la suite $(B_n)_{n \geqq 0}$, avec $B_n = B \cdot A_n$, soit Prüferien, il suffit qu'une quelconque des conditions suivantes soit vérifiée:*

(a) *$K$ est algébriquement clos,*

(b) *$A_n^k = A_{kn}$ quelques soient $k \geqq 1$, $n \geqq 0$.*

*Il résulte alors que, si chaque $A_n$ est un idéal fractionnaire ou égal à $K$ alors $A_n = \bigcap_\Omega B_\iota \cdot A_n$ pour tout $n \geqq 0$, où $(B_\iota)_\Omega$ est la famille d'anneaux de valuation de $K$ contenant $A$.*

*Démonstration*: En effet, supposons qu'on ait démontré que tout anneau de valuation $B_\iota$ de $K$ tel que $A \leqq B_\iota \leqq K$ est Prüferien relativement à la suite $(B_\iota \cdot A_n)_{n \geqq 0}$. Alors, par le résultat de Lorenzen, si $A_n \neq K$ on a $\bigcap B_\iota \cdot A_n = A_n^*$ ($a$-idéal engendré par $A_n$), donc $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$ étant Prüferien, on a $A_n^* = A_n$.

Montrons successivement que chacune des conditions (a), (b) entraîne que tout anneau de valuation $B$ de $K$, $A \leqq B \leqq K$, soit Prüferien relativement à la suite $(B \cdot A_n)_{n \geqq 0}$.

(a) Soit $K$ algébriquement clos, $x \in K$ tel que $x^k \in B \cdot A_{kn}$, donc il existe $y \in A_{kn}$ tel que $w(x^k) \geqq w(y)$; or, il existe $z \in K$ tel que $z^k = y$ donc $w(x^k) \geqq w(z^k)$ et $w(x) \geqq w(z)$; de $z^k \in A_{kn}$ il résulte que $z$ est racine de $X^k - z^k = 0$, donc $z$ est entier d'espèce $n$ sur $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$, et par hypothèse $z \in A_n$; on conclut que $x \in B \cdot A_n$ et alors $B$ muni de $(B \cdot A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.

(b) Soit $x \in K$ tel que $x^k \in B \cdot A_{kn}$, donc il existe $y \in A_{kn}$ tel que $w(x^k) \geqq w(y)$. Or, de $A_{kn} = A_n^k$ on déduit que $y$ est somme d'un nombre fini d'éléments du type $z_1 \cdots z_k$ avec $z_i \in A_n$. Il résulte qu'il existe au moins un élément $z_i$ tel que $k \cdot w(z_i) \leqq w(y)$, sinon on aurait $k \cdot w(z_i) > w(y)$ quelque soit $z_i$, si $w(z_{i_0}) = \min \{w(z_i)\}$ alors $w(z_1 \cdots z_k) \geqq k \cdot w(z_{i_0}) > w(y)$, ce qui est absurde, car de $y = \Sigma z_1 \cdots z_k$ vient $w(y) \geqq \min \{w(z_1 \cdots z_k)\}$. Donc $k \cdot w(x) \geqq w(y) \geqq k \cdot w(z_i)$ et

$w(x) \geqq w(z_i)$ avec $z_i \in A_n$, ce qui montre que $x \in B \cdot A_n$ et alors $B$, muni de $(B \cdot A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.

Nous ne savons pas décider en général si, $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, étant Prüferien, alors tout anneau de valuation $B$ contenant $A$, muni de la suite $(B \cdot A_n)_{n \geqq 0}$, est aussi Prüferien.

Dans le cas où l'anneau $A$ est normal, nous pouvons démontrer:

**Théorème 3.** *Soit $A$ un anneau normal, $K$ son corps des fractions, $(B_\iota)_\Omega$ la famille des valuations essentielles de l'anneau $A$. Si $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$, où chaque $A_n$ est un idéal fractionnaire ou égal à $K$, est Prüferien, alors chaque anneau de valuation essentielle $B_\iota$ est Prüferien relativement à la suite $(B_\iota A_n)_{n \geqq 0}$ et on a $A_n = \bigcap_\Omega B_\iota A_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

*Démonstration*: Montrons que $\sqrt[k]{B_\iota A_{kn}} = B_\iota A_p$ quelque soit $k \geqq 1$, $p \geqq 0$. Soit $x \in K$ tel que $x^k \in B_\iota A_{kp}$. Si $A_{kp} = K$ alors de $\sqrt[k]{A_{kp}} = A_p$ (car $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$ est Prüferien) il résulte que $A_p = K = \sqrt[k]{K}$ donc $x \in K = A_p = B_\iota A_p$. Soit $A_{kp} \neq K$, donc $A_{kp}$ est un idéal fractionnaire de $A$ et alors, $A$ étant normal, il existe seulement un nombre fini de valuations essentielles $B_\alpha$ telles que $w_\alpha(B_\alpha A_{kp}) \neq N$ (ensemble des entiers $\geqq 0$). De $w_\alpha(x^k) = 0$ pour presque toutes les valuations $w_\alpha \in \Omega$, on déduit que l'ensemble $\{w_\alpha \in \Omega \mid w_\alpha(x^k) \notin w_\alpha(B_\alpha A_{kp})\}$ est fini; notons $w_{\alpha_1}, \ldots, w_{\alpha_m}$ les valuations de cet ensemble, lequel ne contient pas $w_\iota$, par l'hypothèse. Par le théorème d'approximation renforcé, il existe $y \in K$ tel que

$$w_{\alpha_i}(y) \geqq 0$$

et

$$w_{\alpha_i}(y) + w_{\alpha_i}(x) \in w_{\alpha_i}(B_{\alpha_i} A_p) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$w_\iota(y) = 0, \quad w_\beta(y) \geqq 0$$

lorque $w_\beta \in \Omega$, distinct de $w_{\alpha_i}$, $w_\iota$. Donc

$$w_{\alpha_i}(y^k) \geqq 0,$$

$$w_{\alpha_i}(y^k) + w_{\alpha_i}(x^k) \in k \cdot w_{\alpha_i}(B_{\alpha_i} A_p) \subseteq w_{\alpha_i}(B_{\alpha_i} A_{kp}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$w_\iota(y^k) = 0, \quad w_\beta(y^k) \geqq 0$$

lorsque $w_\beta \in \Omega$, distinct de $w_{\alpha_i}$, $w_\iota$. Donc $y^k x^k \in \bigcap_\Omega B_\gamma A_{kp}$; or, $\bigcap_\Omega B_\gamma A_{kp}$ est le $v$-idéal engendré par $A_{kp}$ qui coïncide avec le $b$-idéal engendré par $A_{kp}$ (car $A$ est un anneau normal); donc, par le théorème de Lorenzen, $\bigcap_\Omega B_\gamma A_{kp}$ est le $a$-idéal engendré par $A_{kp}$ et puisque $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$ est Prüferien, $\bigcap_\Omega B_\gamma A_{kp} = A_{kp}$. Donc

$$yx \in \sqrt[k]{A_{kp}} = A_p$$

et alors

$$x \in A_p \cdot y^{-1} \subseteq B_\iota A_p \text{ car } w_\iota(y) = 0.$$

Cela montre que $B_\iota$, muni de $(B_\iota A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien et que

$$A_n = \bigcap_\Omega B_\iota A_n \text{ pour } n = 0, 1, \ldots.$$

Sur l'anneau de Rees $A' = \Sigma A_n X^n$ associé à l'anneau $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, on peut considérer la famille de sous-groupes $(A'_p)_{p \geqq 0}$, définis par $A'_p = \sum_n A_{n+p} X^n$ (pour tout $p \geqq 0$). On a $A'_0 = A'$, $A'_p \cdot A'_q \leqq A'_{p+q}$ car

$$\begin{aligned} A'_p \cdot A'_q &= \Big(\sum_n A_{n+p} X^n\Big) \cdot \Big(\sum_n A_{n+q} X^n\Big) \\ &= \sum_n \Big(\sum_{m+m'=n} A_{m+p} \cdot A_{m'+q}\Big) \cdot X^n \\ &\leqq \sum_n A_{n+p+q} X^n = A'_{p+q}. \end{aligned}$$

Il est alors possible considérer l'anneau de Rees $(A')' = \sum_p A'_p X^p$ défini par $A'$, muni de la suite $(A'_p)_{p \geqq 0}$.

Pour démontrer le théorème 4 nous avons besoin d'un lemme:

**Lemme 4.** *Soit l'anneau $A$, muni de la suite $(A_n)_{n \geqq 0}$, et l'anneau de Rees $A' = \sum_n A_n X^n$, muni de la suite $(A'_p)_{q \geqq 0}$, $A'_q = \sum_n A_{n+q} X^n$. Si $f = \sum_m a_m X^m \in K[X]$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, $(A'_q)_{q \geqq 0}$, alors toute composante homogène $a_m X^m$ de $f$ est aussi entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, $(A'_q)_{q \geqq 0}$.*

En effet, par le lemme 2, $f$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, $(A'_q)_{q \geqq 0}$, si et seulement si $fY^p = \Sigma a_m X^m Y^p$ est entier sur l'anneau de Rees $A'' = \Sigma A'_q Y^q \leqq K[X, Y]$. Par le lemme 1 du § 1, toute composante homogène $(a_m X^m) Y^p$ de $fY^p$ est entier sur $A''$, donc par le lemme 2, $a_m X^m$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, muni de $(A'_q)_{q \geqq 0}$.

**Théorème 4.** *Pour que l'anneau $A$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$, soit Prüferien, c. a. d. pour que l'anneau de Rees $A' = \Sigma A_n X^n$ soit intégralement fermé dans $K(X)$, il faut et il suffit que $A'$, muni de la suite $(A'_p)_{p \geqq 0}$, soit Prüferien.*

*Démonstration*: Soit $A'$, muni de $(A'_p)_{p \geqq 0}$, Prüferien et $y \in K$ un entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$; donc, $y$ est racine d'une équation

$$Y^m + a_1 Y^{m-1} + a_2 Y^{m-2} + \cdots + a_m = 0, \; a_i \in A_{ip} \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

or,

$$A_{ip} \leqq A_{ip} + A_{ip+1} X + A_{ip+2} X^2 + \cdots = A'_{ip},$$

donc $y$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, muni de $(A'_p)_{p \geqq 0}$; puisque $y \in K$ et $K$ est contenu dans le corps des fractions de $A'$, alors par l'hypothèse on a $y \in A'_p \cap K = A_p$, donc $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$, est Prüferien.

Réciproquement, soit $A$, $(A_n)_{n \geqq 0}$, Prüferien, et $f$ un élément du corps des fractions de $A'$ (lequel est contenu dans $K(X)$) entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, muni de $(A_n)_{n \geqq 0}$; donc $f$ est racine d'une équation

$$Y^m + b'_1 Y^{m-1} + \cdots + b'_m = 0, \quad b'_i \in A'_{ip} \leqq K[X];$$

il résulte que $f$ est entier sur $K[X]$, donc $f \in K[X]$ et il est du type $f = \Sigma a_q X^q$. Par le lemme 4, chaque terme $a_q X^q$ est entier d'espèce $p \geqq 0$ sur $A'$, $(A'_n)_{n \geqq 0}$, donc $a_q X^q$ est racine d'une équation du même type:

$$(a_q X^q)^m + b'_1 (a_q X^q)^{m-1} + \cdots + b'_m = 0, \; b'_i \in A'_{ip},$$

donc

$$b'_i = \sum_j b_{i,j} X^j \quad \text{et} \quad b_{i,j} \in A_{ip+j}.$$

En prenant le terme en $X^{qm}$ on a

$$a_q^m + b_{1,q} a_q^{m-1} + b_{2,2q} a_q^{m-2} + \cdots + b_{m,mq} = 0,$$

où $b_{i,iq} \in A_{i(p+q)}$, donc $a_q$ est entier d'espèce $p+q$ sur $A$, $(A_n)_{n \geq 0}$, et par l'hypothèse $a_q \in A_{p+q}$, donc

$$f = \sum_q a_q X^q \in A'_p = \sum_q A_{p+q} X^q,$$

ce qui montre que $A'$, $(A'_n)_{n \geq 0}$, est Prüferien.

Le théorème 1 permet de donner une classe simple d'exemples d'anneaux de Rees intégralement clos mais non complètement intégralement clos.

Soit, par exemple, $A$ un anneau intégralement clos (Noetherien ou non) et $A_1 = A_2 = \cdots = K$ (corps des fractions de $A$). Alors, par le théorème 1, l'anneau de Rees $A' = A + K[X] \cdot X$ est intégralement clos; toutefois, il n'est pas complètement intégralement clos, car si $y \in K$, $y \notin A$ alors $y^n X \in A'$ quelque soit $n \geqq 0$ sans que $y$ appartienne à $A'$. Donc, en particulier, $A'$ n'est pas un anneau Noetherien.

## Bibliographie.

[1] *D. Rees*, Two classical theorems of ideal theory, Proc. Cambridge Phil Soc. **52** (156), 155—157.
[2] *H. Prüfer*, Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, J. reine angew. Math. **168** (1932), 1—36.
[3] *P. Lorenzen*, Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, Math. Zeitschr. **45** (1939), 533—553.
[4] *W. Krull*, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. I, Math. Zeitschr. **41** (1936), 545—577.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, Brasil.

Eingegangen 3. August 1959.

# Über lineare Übertragungen mit fallweise konstanter Torsion.

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *M. Pinl* in Köln

Wir beziehen uns im folgenden auf die Gruppe $\mathfrak{G}_0$ aller stetigen Punkttransformationen

$$(1) \qquad x_\alpha = f_\alpha(x'_1, \ldots, x'_n), \quad \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)} \neq 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante. Wir setzen also die Funktionen $f_\alpha$ zu mindestens einmal stetig differenzierbar voraus und gewinnen damit die induzierte lineare homogene Gruppe für die ersten Differentiale $dx^\alpha$ und die ersten Ableitungen eines Skalars. Diese lineare Gruppe bestimmt den Begriff der ko- und kontravarianten Transformation und damit den Tensorbegriff über $\mathfrak{G}_0$. Auch die induzierte Gruppe für höhere Differentiale und höhere Ableitungen ist mitbestimmt, wenn wir in (1) geeignete Differenzierbarkeitsvoraussetzungen treffen. In derartigen Koordinatenmannigfaltigkeiten $X_n$ ist eine im Sinne von H. Weyl lineare Tensoranalysis[1]) beliebiger Differentiationsstufe möglich. Den Übergang zur allgemeinen Tensoranalysis ermöglicht die Einführung einer linearen Übertragung, d. h. eines Systems von $n^3$ Funktionen $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ mit dem Transformationsgesetz[2])

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \Gamma^\lambda_{\varrho\sigma} \frac{\partial x_\varrho}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x'_\beta} = \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\gamma}.$$

Eine $X_n$ mit einem System von Komponenten $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, die sich nach (2) transformieren, heißt eine $L_n$, die Komponenten $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ heißen die Komponenten des affinen Zusammenhangs der $L_n$.

Aus (2) folgt $\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} = \Gamma'^\gamma_{\beta\alpha}$, wenn $\Gamma^\lambda_{\varrho\sigma} = 0$ ist, und umgekehrt $\Gamma^\lambda_{\varrho\sigma} = \Gamma^\lambda_{\sigma\varrho}$, wenn $\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} = 0$ ist. Ein affiner Zusammenhang, der auf Null transformiert werden kann, ist also notwendig symmetrisch[3]). Eine $L_n$ mit symmetrischer Übertragung heißt eine $A_n$. Einem affinen Zusammenhang $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ entspringt auf nullter Differentiationsstufe der Torsionstensor

$$(3) \qquad t^\lambda_{\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{[\alpha\beta]} = \tfrac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}) = -t^\lambda_{\beta\alpha}$$

und auf erster Differentiationsstufe der affine gemischte Krümmungstensor

$$(4) \qquad \Gamma^\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\Gamma^\lambda_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\sigma\gamma}.$$

---

[1]) Vgl. *H. Weyl*, Raum-Zeit-Materie, Kap. I, § 7, S. 50; 5. Auflage, Berlin 1923.

[2]) Vgl. *L. Pf. Eisenhart*, Non-Riemannian Geometry, Ch. I, p. 3; American Mathematical Society, New York 1927.

[3]) Vgl. [2]) p. 4.

In $A_n$ verschwindet $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ identisch. Da es sich um einen Tensor handelt, ist diese Eigenschaft vom Koordinatensystem unabhängig. Wir fragen im folgenden nach Bedingungen, unter welchen die Komponenten $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ in einem geeigneten Koordinatensystem auf nicht insgesamt verschwindende Konstante $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ transformiert werden können. Man kennt das analoge Problem aus der Theorie regulärer Riemannscher Räume $V_n$ vom metrischen Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}(x_1, \ldots, x_n)$ mit $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ und den Satz: der reguläre Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ läßt sich genau dann auf nicht insgesamt verschwindende Konstante $c_{\alpha\beta}$ transformieren (mit $|c_{\alpha\beta}| \neq 0$), wenn der zu $g_{\alpha\beta}$ gehörige Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor $R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ verschwindet[4]). Diese Bedingungen charakterisieren unter den Riemannschen $V_n$, in vom Koordinatensystem unabhängiger Weise, die euklidischen Räume $E_n$. Der zu $g_{\alpha\beta}$ gehörige affine Zusammenhang ist symmetrisch und durch die Christoffelschen Klammern zweiter Art $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$ gegeben:

$$\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = g^{\lambda\varrho}[\varrho, \alpha\beta] = \frac{1}{2} g^{\lambda\varrho} \left( \frac{\partial g_{\alpha\varrho}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\varrho}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\varrho} \right) = \left\{ {\lambda \atop \beta\alpha} \right\}, \tag{5}$$

$$g^{\lambda\varrho} g_{\lambda\sigma} = \delta^{\varrho}_{\sigma} = \begin{cases} 1, & \varrho = \sigma \\ 0, & \varrho \neq \sigma \end{cases}.$$

Wir versuchen im folgenden dieses in der Theorie regulärer symmetrischer kovarianter Tensoren zweiter Stufe bekannte Resultat für die Theorie des Torsionstensors $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ einer $L_n$ nutzbar zu machen, indem wir von den asymmetrischen Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ ausgehen und mit Hilfe der Torsions- und eventuell auch der Krümmungskomponenten (3) und (4) geeignete symmetrische kovariante Tensoren zweiter Stufe aufbauen. Wir nennen die so entstehenden Tensoren assoziierte Tensoren, die durch sie repräsentierten Riemannschen Räume assoziierte Riemannsche Räume und die zugehörigen Riemannschen Übertragungen assoziierte Riemannsche Übertragungen.

Unter die zu $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ assoziierten Tensoren fällt auch der kovariante Torsionsvektor $t_\beta = t^{\lambda}_{\lambda\beta}$[5]). Für $n = 2$ bestimmt umgekehrt $t_\beta$ auch $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$, denn man hat $t_1 = t^{2}_{21}$, $t_2 = t^{1}_{12}$. In diesem Falle gilt[6]): die Torsion $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ eines $L_2$ kann dann und nur dann auf konstante nicht insgesamt verschwindende Komponenten transformiert werden, wenn der Torsionsvektor $t_\beta$ ein Gradient ist. Wir setzen also weiterhin $n \geqq 3$ voraus.

## § 1. Assoziierte reguläre Riemannsche Räume.

Neben dem Torsionsvektor $t_\beta$ ergibt sich aus den Komponenten $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ durch Überschiebung in einfacher Weise der symmetrische kovariante Tensor zweiter Stufe[7])

$$g_{\alpha\beta} = t^{\lambda}_{\alpha\mu} t^{\mu}_{\beta\lambda} = g_{\beta\alpha}. \tag{6}$$

Für $n = 2$ gilt stets $|g_{\alpha\beta}| = 0$. Für $n \geqq 3$ können reguläre wie singuläre Fälle auftreten. Im regulären Falle existiert die assoziierte Riemannsche Übertragung (5) mit dem Krümmungstensor

$$R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial \left\{ {\lambda \atop \alpha\gamma} \right\}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}}{\partial x_\gamma} + \left\{ {\sigma \atop \alpha\gamma} \right\} \left\{ {\lambda \atop \sigma\beta} \right\} - \left\{ {\sigma \atop \alpha\beta} \right\} \left\{ {\lambda \atop \sigma\gamma} \right\}. \tag{7}$$

Damit ergibt sich das bekannte Resultat[8]):

---

[4]) Vgl. *R. Weitzenböck*, Invariantentheorie, Abschnitt XIII, § 15; Groningen 1923.

[5]) Vgl. *G. Vranceanu*, Leçons de Géométrie Différentielle I, Ch. IV, p. 191; Bukarest 1957.

[6]) Vgl. *M. Pinl*, On affinely connected manifolds whose torsion can be transformed into constant components. Wird in Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 11. No. 3, June 1960, erscheinen.

[7]) Vgl. [5]).

(I) *Die Komponenten $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ einer $L_n (n \geqq 3)$ mit regulärem assoziierten Tensor $g_{\alpha\beta}$ (6) lassen sich dann und nur dann auf konstante nicht insgesamt verschwindende Komponenten $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ transformieren, wenn*

$$(8) \quad R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0,\ t^{\lambda}_{\alpha\beta(\gamma)} \equiv \frac{\partial t^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + t^{\varrho}_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \gamma\varrho\end{Bmatrix} - t^{\lambda}_{\varrho\beta}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix} - t^{\lambda}_{\alpha\varrho}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \beta\gamma\end{Bmatrix} \equiv 0 \ \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Im singulären Falle $|g_{\alpha\beta}| = 0$ existieren zwar die Christoffelschen Klammern erster Art $[\varrho, \alpha\beta]$, aber nicht die zu $g_{\alpha\beta}$ assoziierten kontravarianten Komponenten $g^{\alpha\beta}$ und daher nicht die Christoffelschen Klammern zweiter Art. Daher versagt im singulären Falle die Satz (I) zu Grunde liegende Methode, solange man am Tensor $g_{\alpha\beta}$ und der Transformationsgruppe $\mathfrak{G}_0$ festhält und den Tensorkalkül über der von $\mathfrak{G}_0$ induzierten linearen homogenen Gruppe aufbaut. Um einen regulären Ersatz für den singulären Tensor (6) zu gewinnen, ziehen wir den affinen gemischten Krümmungstensor (4) heran, bilden den in $\alpha$ und $\beta$ symmetrischen Krümmungstensor

$$(9) \qquad G^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha\gamma} = G^{\lambda}_{\beta\alpha\gamma}$$

und verjüngen über $\lambda = \gamma$[9]). Ist der so entstehende symmetrische kovariante Tensor zweiter Stufe

$$(10) \qquad h_{\alpha\beta} = G^{\lambda}_{\alpha\beta\lambda} = h_{\beta\alpha}$$

regulär, so existieren die zu $h_{\alpha\beta}$ gehörenden Christoffelklammern $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}^*$ und Krümmungskomponenten $R^{\lambda*}_{\alpha\beta\gamma}$ und man erhält in Analogie zu (I) das Resultat:

(II) *Die Komponenten $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ einer $L_n$ $(n \geqq 3)$ mit regulärem assoziierten Tensor $h_{\alpha\beta}$ (10) lassen sich auf konstante nicht insgesamt verschwindende Komponenten $c^{\lambda}_{\alpha\beta}$ transformieren, wenn*

$$(11) \quad R^{\lambda*}_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0,\ t^{\lambda*}_{\alpha\beta(\gamma)} \equiv \frac{\partial t^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + t^{\varrho}_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \gamma\varrho\end{Bmatrix}^* - t^{\lambda}_{\varrho\beta}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \alpha\gamma\end{Bmatrix}^* - t^{\lambda}_{\alpha\varrho}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \beta\gamma\end{Bmatrix}^* \equiv 0, \ \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Die Bedingungen (11) sind im Gegensatz zu den Bedingungen (8) nur hinreichend, da im allgemeinen konstanten Komponenten $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ variable Komponenten $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ entsprechen, welche in die Tensoren (4), (9), (10) und in die Klammern $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \alpha\beta\end{Bmatrix}^*$ eingehen.

## § 2. Assoziierte singuläre Riemannsche Räume.

Wir bezeichnen den Rang der Matrix $\| g_{\alpha\beta} \|$ der Tensorkomponenten (6) mit $m$ und den Defekt $n - m$ mit $d$. Einem regulären Riemannschen $V_n$ entspricht der Defekt $d = 0$, einem totalsingulären der Defekt $d = n$. Für $d = 0$ ist Satz (I), für $d = n$ Satz (II) zuständig, wofern $|h_{\alpha\beta}| \neq 0$ ist. Wir behandeln jetzt den allgemeinen Fall $1 \leqq d \leqq n - 1$ und betrachten das dem Tensor $g_{\alpha\beta}$ zugeordnete Pfaffsche System

$$(12) \qquad \omega_\alpha \equiv g_{\alpha\beta} dx^\beta = 0,\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqq 3.$$

Im weiteren Text sollen griechische Indizes (wie bisher) die Werte $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen, kleine lateinische Indizes die Werte $1, 2, \ldots, m$ und große lateinische Indizes die Werte $m + 1, \ldots, n$. Nach Voraussetzung enthält die Matrix $\| g_{\alpha\beta} \|$ $m$ linear unabhängige Zeilen. Daher können wir nach passender Abänderung der Bezeichnungsweise an Stelle von (12) von dem Pfaffschen System

$$(13) \qquad \omega_s \equiv g_{s\beta} dx^\beta;\ s = 1, 2, \ldots, m;\ \beta = 1, 2, \ldots, n$$

[9]) Vgl. [6]).

[6]) Über zwei gleiche Indizes, von denen der eine im gleichen Term höher steht und der andere tiefer, ist stets zu summieren (Summenkonvention des Tensorkalküls).

ausgehen. Sobald ein Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ existiert, in welchem $t^\lambda_{\alpha\beta} = c^\lambda_{\alpha\beta}$ gilt, verwandeln sich die Koeffizienten des Pfaffschen Systems (13) nach (6) in ein System von Konstanten $c_{\alpha\beta}$ vom Rang $m$, und die bilinearen Kovarianten der Pfaffschen Formen $\omega_\alpha$ verschwinden identisch. Daher gilt:

(III) *Das zu einer $L_n$, deren Torsion auf konstante nicht insgesamt verschwindende Komponenten transformiert werden kann, assoziierte Pfaffsche System* (12) *bzw.* (13) *ist vollständig integrabel.*

Ein singulärer Riemannscher Raum vom Rang $m$ heißt *reduzibel-singulär*, wenn ein „reduzierendes" Koordinatensystem angegeben werden kann, in welchem die Matrix der Komponenten $g_{\alpha\beta}$ die kanonische Gestalt

$$(14) \qquad \left\| \begin{matrix} g_{11}, \ldots, g_{1m}, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ g_{m1}, \ldots, g_{mm}, & 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \end{matrix} \right\|$$

gewinnt[10]), andernfalls *irreduzibel-singulär*[11]). Singuläre Räume vom Defekt $d = 1$ sind stets reduzibel[12]). Allgemein gilt: ein singulärer Riemannscher Raum ist genau dann reduzibel, wenn sein zugeordnetes Pfaffsches System vollständig integrabel ist. Das bedeutet in unserm Fall:

(IV) *Ist der einer $L_n$ assoziierte Riemannsche $V_n$ vom Fundamentaltensor* (6) *irreduzibel-singulär, so gibt es keinerlei Koordinaten, in welchen die Torsionskomponenten $t^\lambda_{\alpha\beta}$ konstant ausfallen.*

Ist in einem reduzierenden Koordinatensystem für die Matrix der $g_{\alpha\beta}$ die kanonische Gestalt (14) gewonnen, so gilt nach P. K. Racheffskij überdies $\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_A} = 0$ für $r, s = 1, 2, \ldots, m$; $A = m + 1, \ldots, n$. Die Reduktion auf die kanonische Gestalt (14) wird durch je $m$ unabhängige Integrale des vollständigen integrablen Pfaffschen Systems geleistet, wenn man diese Funktionen als neue Veränderliche einführt[13]). Die reduzierenden Koordinatensysteme hängen durch die Transformationen der separablen Gruppe $\mathfrak{G}_d$

$$(15) \qquad \begin{matrix} x_1 = f_1(x'_1, \ldots, x'_m), & x_{m+1} = f_{m+1}(x'_{m+1}, \ldots, x'_n), \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_m = f_m(x'_1, \ldots, x'_m), & x_n \quad = f_n(x'_{m+1}, \ldots, x_n), \end{matrix} \qquad \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)} \neq 0$$

[10]) Vgl. *C. Jankiewicz*, Sur les espaces riemanniens dégénérés, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences Cl. III, Vol. II, No. 7, 1954, 301—304. Solche Riemannsche Räume werden in der Literatur auch als holonom-singuläre Riemannsche Räume bezeichnet.

[11]) Solche Riemannsche Räume werden in der Literatur auch als nichtholonom-singuläre Riemannsche Räume bezeichnet.

[12]) Vgl. [10]).

[13]) Vgl. [10]).

zusammen, welche die Struktur der Matrix (14) invariant läßt. Die Transformationen (15) gehen durch Spezialisierung der Funktionen $f_\alpha$ aus den Transformationen (1) hervor. Da sie untereinander eine Gruppe bilden, ist $\mathfrak{G}_d$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$. Gegenüber der Gruppe $\mathfrak{G}_d$ verhalten sich die reduzierten Komponenten $g_{rs}(x_1, \ldots, x_m)$ des singulären Tensors $g_{\alpha\beta}$ wie die Komponenten eines regulären Tensors vom Rang $m$ im $m$-ären Gebiet eines Systems reduzierender Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$. Da $|g_{rs}| \neq 0$ ist, können über $\mathfrak{G}_d$ kontravariante symmetrische Komponenten $g^{rs}$ gebildet werden, welche den Bedingungen $g_{is}g^{sk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ genügen. Ebenso kann man jetzt die zu $g_{rs}$ gehörigen $m$-ären Christoffelklammern $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ und den Krümmungstensor $R^i_{jkl}$ berechnen und über $\mathfrak{G}_d$ definieren, wenn man den Defekt mit $d \leqq n-2$ beschränkt (da die Anzahl $\frac{m^2(m^2-1)}{2}$ der Komponenten $R^i_{jkl}$ für $m = 1$ verschwindet). Sind also die nicht insgesamt verschwindenden Komponenten der Torsion $t^\lambda_{\alpha\beta}$ einer $L_n$ $(n \geqq 3)$ konstant, ist der assoziierte Tensor (6) vom Defekt $1 \leqq d \leqq n-2$ und verschwindet der über $\mathfrak{G}_d$ definierte Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor des reduzierten Tensors $g_{rs}$ identisch in allen reduzierenden Koordinatensystemen, so existiert innerhalb $\mathfrak{G}_d$ eine Transformation, welche die Matrix (14) in die konstante Matrix

$$(16) \qquad \left\| \begin{matrix} c_{11}, \ldots, c_{1m}, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ c_{m1}, \ldots, c_{mm}, & 0, \ldots, 0 \\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, 0, & 0, \ldots, 0 \end{matrix} \right\|$$

verwandelt. Liegt umgekehrt die konstante Matrix (16) mit $|c_{rs}| \neq 0$ vor, so gilt mit $g_{rs} = c_{rs}$

$$(17) \qquad \left\{ {i \atop kl} \right\} = \frac{1}{2} c^{is} \left( \frac{\partial c_{is}}{\partial x_k} - \frac{\partial c_{ks}}{\partial x_i} - \frac{\partial c_{kl}}{\partial x_s} \right) \equiv 0, \; i, k, l, s = 1, 2, \ldots, m.$$

Schreiben wir die Transformationsgleichungen für die Tensorkomponenten $t^\lambda_{\alpha\beta}$ in der Gestalt

$$(18) \qquad t'^{\varrho}_{\sigma\tau} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\varrho} = t^\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau},$$

so folgt durch Differentiation nach $x'_\mu$

$$(19) \qquad \frac{\partial t'^{\varrho}_{\sigma\tau}}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_\varrho} + t'^{\varrho}_{\sigma\tau} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\varrho \partial x'_\mu}$$
$$= \frac{\partial t^\lambda_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x_\gamma}{\partial x'_\mu} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau} + t^\lambda_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial x'_\sigma \partial x'_\mu} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau} + \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial^2 x_\beta}{\partial x'_\tau \partial x'_\mu} \right).$$

Beide Gleichungssysteme, (18) wie (19), gelten innerhalb $\mathfrak{G}_0$ und daher auch innerhalb $\mathfrak{G}_d$. Um für $t^\lambda_{\alpha\beta}$ zu einer kovarianten Differentiation zu gelangen, müssen die zweiten Ableitungen in (19) nach E. Christoffels klassischem Verfahren eliminiert werden. Dafür stehen zwar die $n^3$ asymmetrischen Komponenten $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ des affinen Zusammenhangs der $L_n$

zur Verfügung, doch schließt deren Verwendung jedweden Einfluß des zum reduzierten Tensor $g_{rs}$ gehörigen Krümmungstensors $R^i_{jkl}$ aus. Wir versuchen daher, die zu $g_{rs}$ gehörige reduzierte Übertragung $\left\{ {i \atop rs} \right\} = \left\{ {i \atop sr} \right\}$ durch weitere Klammern so zu ergänzen, daß im Falle $g_{rs} = c_{rs}$ entsprechend (17) nicht nur die Klammern $\left\{ {i \atop kl} \right\}$, sondern auch die ergänzenden Klammern verschwinden. (Gelingt diese Konstruktion, so fallen in Analogie zu Satz (I) in dem entsprechenden Koordinatensystem die — zu dieser ergänzten Übertragung — kovarianten Ableitungen der Torsion mit den gewöhnlichen Ableitungen der $t^\lambda_{\alpha\beta}$ zusammen!).

Nun gilt für alle Christoffelklammern $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$ das Transformationsgesetz

$$(20)\quad \left\{ {\varrho \atop \sigma\tau} \right\}' = \left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\sigma} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\tau} \frac{\partial x'_\varrho}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\sigma \partial x'_\tau} \frac{\partial x'_\varrho}{\partial x_\lambda}, \quad \alpha, \beta, \lambda, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n.$$

Für $\alpha, \beta, \lambda, \varrho, \sigma, \tau \leqq m$ sind die Gleichungen (20) die Transformationsgleichungen der zu $g_{rs}$ gehörigen $\left\{ {i \atop rs} \right\}$. Da die ergänzenden Klammern $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$, für welche mindestens einer der Indizes $\alpha, \beta, \lambda$ größer als $m$ ausfällt, im Falle $g_{rs} = c_{rs}$ mit den $\left\{ {i \atop rs} \right\}$ zusammen verschwinden sollen, setzen wir jetzt

$$(21)\quad \begin{aligned} &\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left( \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right), \text{ wenn } \alpha, \beta, \lambda, \mu \leqq m, \\ &\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0, \text{ wenn mindestens einer der Indizes } \alpha, \beta, \lambda > m. \end{aligned}$$

Da die Transformation (20) keine Tensortransformation ist, besteht von vornherein keine, Garantie mit $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\} = 0$ in einem Koordinatensystem auch $\left\{ {\varrho \atop \sigma\tau} \right\}' = 0$ in einem anderen Koordinatensystem zu bekommen. Diese Garantie ist nur dann gegeben, wenn in (20) die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\sigma \partial x'_\tau}$ verschwinden. Für $\lambda, \sigma, \tau \leqq m$ sind wir daran nicht interessiert. Fordern wir aber $\frac{\partial^2 x_A}{\partial x'_\sigma \partial x'_\tau} = 0$ (für $A = m+1, \ldots, n$), so bedeutet das eine Beschränkung der Funktionen $f_{m+1}, \ldots, f_n$ in den Transformationen (15) auf lineare Funktionen. Mit $\left\{ {\lambda \atop \alpha\beta} \right\}$ verschwinden dann stets auch die Klammern $\left\{ {\varrho \atop \sigma\tau} \right\}'$, sobald einer der Indizes den Wert $m$ übersteigt. Damit ist gezeigt:

(V) *Die Torsion $t^\lambda_{\alpha\beta}$ einer $L_n$ ($n \geqq 3$) mit reduzibel-singulärem assoziierten Riemannschen $V_n$, vom Fundamentaltensor* (6) *und Defekt $1 \leqq d \leqq n-2$, kann genau dann auf konstante nicht insgesamt verschwindende Komponenten $c^\lambda_{\alpha\beta}$ transformiert werden, wenn der zur Übertragung* (21) *gehörige Krümmungstensor $R^i_{jkl}$ und die zur gleichen Übertragung gehörigen kovarianten Ableitungen $t^\lambda_{\alpha\beta(\gamma)}$ identisch verschwinden. Dabei sind die Tensoren $R^i_{jkl}$ und $t^\lambda_{\alpha\beta(\gamma)}$ über der Gruppe von Transformationen*

$$(22)\quad \begin{array}{llll} x_1 = f_1(x'_1, \ldots, x'_m); & x_{m+1} = c_{m+1,A}\, x'^A + c_{m+1}, & & \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & & \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & & \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)} \neq 0, \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & & \\ x_m = f_m(x'_1, \ldots, x'_m), & x_n = c_{n,A}\, x'^A + c_n, & & A = m+1, \ldots, n \end{array}$$

*definiert und die Transformation auf konstante Torsion erfolgt durch eine Transformation dieser Gruppe*[14]).

Mit diesem Ergebnis ist ein Analogon zu Satz (I) für den Fall singulärer Riemannscher Begleiträume vom Fundamentaltensor (6) gewonnen. Ebenso kann man ein Analogon (VI) zu Satz (II) für den Fall reduzibel-singulärer[15]) Riemannscher Begleiträume vom Fundamentaltensor (10) gewinnen, wenn man den Defekt $d^*$ des Tensors $h_{\alpha\beta}$ (10) mit $1 \leqq d^* \leqq n-2$ beschränkt und die zu $h_{\alpha\beta}$ gehörigen Christoffelklammern $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}^*$ im Rahmen der Transformationen (22) analog (20) und (21) einführt. Wiederum erhält man aber mit Hilfe des Tensors $h_{\alpha\beta}$ nur hinreichende Bedingungen für die Existenz konstanter Torsionskomponenten.

## § 3. Rein affine Diskussion; Beispiele.

Der praktische Wert der Kriterien (I) und (V) und der hinreichenden Bedingungen (II) und (VI) vermindert sich mit wachsendem Defekt der verwendeten Tensoren (6) bzw. (10). Insbesondere werden die Aussagen für $d$ bzw. $d^* = n-1, n$ trivial (für $d$ bzw. $d^* = n$ besteht das System (22) durchgehend aus linearen Gleichungen).

Ein Beispiel für eine $L_n$ mit $d^* = n$ bieten die Mannigfaltigkeiten $L_n$, deren affiner Krümmungstensor $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ (4) identisch verschwindet. In diesem Falle kann man ein Koordinatensystem einführen, in welchem die asymmetrischen Komponenten $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ des affinen Zusammenhangs die Werte

$$\Gamma^\lambda_{1\beta} = -\delta^\lambda_1 \frac{\partial \lg \psi_1}{\partial x_\beta}, \ldots, \Gamma^\lambda_{n\beta} = -\delta^\lambda_n \frac{\partial \lg \psi_n}{\partial x_\beta} \tag{23}$$

und die Torsionskomponenten daher die Werte

$$2t^\lambda_{\alpha\beta} = -\delta^\lambda_\alpha \frac{\partial \lg \psi_\alpha}{\partial x_\beta} + \delta^\lambda_\beta \frac{\partial \lg \psi_\beta}{\partial x_\alpha} \tag{24}$$

annehmen, wobei über die Indizes $\alpha, \beta$ nicht zu summieren ist[16]). Mit Hilfe der Beziehungen (23) und (24) lassen sich leicht Beispiele für krümmungsfreie $L_n$ mit konstanter nichtverschwindender Torsion angeben. Wir setzen etwa für $n = 3$

$$\begin{aligned} \lg \psi_1 &= \chi_1(x_1) + c^1_{12} x_2 + c^1_{13} x_3, \\ \lg \psi_2 &= c^2_{12} x_1 + \chi_2(x_2) + c^2_{23} x_3, \\ \lg \psi_3 &= c^3_{31} x_1 + c^3_{32} x_2 + \chi_3(x_3) \end{aligned} \tag{25}$$

mit beliebigen (differenzierbaren) Funktionen $\chi_1(x_1)$, $\chi_2(x_2)$, $\chi_3(x_3)$. Dann ergibt (23)

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = -\chi_1', \Gamma^1_{12} = -c^1_{12}, \Gamma^1_{13} = -c^1_{13}, \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^2_{33} = 0, \Gamma^2_{21} = -c^2_{21}, \Gamma^2_{23} = -c^2_{23}, \Gamma^2_{22} = -\chi_2', \\ &\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{21} = 0, \Gamma^3_{31} = -c^3_{31}, \Gamma^3_{32} = -c^3_{32}, \Gamma^3_{33} = -\chi_3' \end{aligned} \tag{26}$$

und (24)

$$\begin{aligned} &2t^1_{12} = -c^1_{12}, 2t^1_{13} = -c^1_{13}, t^1_{23} = 0, 2t^2_{12} = c^2_{21}, t^2_{13} = 0, 2t^2_{23} = -c^2_{23}, \\ &t^3_{12} = 0, 2t^3_{13} = c^3_{31}, t^3_{23} = c^3_{32}. \end{aligned} \tag{27}$$

---

[14]) Für die Integrale der Pfaffschen Systeme ergeben sich im Falle konstanter Koeffizienten lineare Beziehungen zwischen den Koordinaten. Führt man diese Integrale als neue Veränderliche ein, so ergeben sich für die induzierten Transformationen der Tensorkomponenten Transformationen mit konstanten Koeffizienten, welche also konstante Tensorkomponenten wiederum in konstante Tensorkomponenten überführen.

[15]) Hier muß die Reduzibilität des jeweiligen Riemannschen Begleitraums eigens vorausgesetzt bzw. geprüft werden.

[16]) Vgl. [2]) Ch. I. § 10, p. 22.

Für den symmetrischen Teil $\Gamma^{\lambda}_{(\alpha\beta)}$ der Übertragung (26) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{(11)} = -\chi_1', \; 2\Gamma^1_{(12)} = -c^1_{12}, \; 2\Gamma^1_{(13)} = -c^1_{13}, \; \Gamma^1_{(22)} = \Gamma^1_{(23)} = \Gamma^1_{(33)} = 0,\\
&\Gamma^2_{(11)} = 0, \quad 2\Gamma^2_{(12)} = -c^2_{21}, \quad \Gamma^2_{(13)} = 0, \quad \Gamma^2_{(22)} = -\chi_2',\\
(28)\qquad &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2\Gamma^2_{(23)} = -c^2_{23}, \; \Gamma^2_{(33)} = 0,\\
&\Gamma^3_{(11)} = 0, \quad \Gamma^3_{(12)} = 0, \quad 2\Gamma^3_{(13)} = -c^3_{31}, \; \Gamma^3_{(22)} = 0, \; 2\Gamma^3_{(23)} = -c^3_{32},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma^3_{(33)} = -\chi_3'.
\end{aligned}
$$

Der zu (28) gehörige Krümmungstensor $S^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ (Krümmungstensor des symmetrischen Teils $\Gamma^{\lambda}_{(\alpha\beta)}$ der asymmetrischen Übertragung $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ mit $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma} = 0$) verschwindet im allgemeinen nicht, da andernfalls auch der verjüngte Krümmungstensor $s_{\alpha\beta} = S^{\lambda}_{\alpha\beta\lambda}$ verschwände. Für den symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil dieses Tensors $s_{\alpha\beta}$ gilt jedoch[17])

$$
s_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{(\sigma\alpha)}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{(\sigma\beta)}}{\partial x_\alpha}\right) - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{(\alpha\beta)}}{\partial x_\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{(\alpha\varrho)}\Gamma^{\varrho}_{(\sigma\beta)} - \Gamma^{\sigma}_{(\alpha\beta)}\Gamma^{\varrho}_{(\sigma\varrho)},
$$

$$
s_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{(\sigma\alpha)}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{(\sigma\beta)}}{\partial x_\alpha}\right)
$$

und man bekommt somit z. B. für $s_{11} = s_{(11)}$ den im allgemeinen nichtverschwindenden Wert

$$
4s_{(11)} = (c^2_{21})^2 + (c^3_{31})^2 - 2(c^2_{21} + c^3_{31})\,\chi_1'.
$$

Der asymmetrische Zusammenhang (26) führt demnach auf ein Beispiel für eine krümmungsfreie $L_3$ mit konstanter nichtverschwindender Torsion (27). Offensichtlich führt die Zerspaltung der asymmetrischen Übertragung $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ in symmetrische und schiefsymmetrische Teile und die damit verknüpfte Zerspaltung des affinen Krümmungstensors $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}$ auf verschiedene neue Wege zur Behandlung von Mannigfaltigkeiten $L_n$ mit konstanter Torsion. Eine ausführlichere Darstellung dieser Verhältnisse soll bei späterer Gelegenheit versucht werden.

Ein Beispiel mit $d = n = 3$ und $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ hat G. Vranceanu mitgeteilt[18]). Sein Ergebnis lautet: Die $L_3$ mit $t^{\lambda}_{\alpha\mu} t^{\mu}_{\beta\lambda} = g_{\alpha\beta} = 0$ und $t_\beta = 0$ können stets auf Koordinaten bezogen werden, in welchen $t^1_{23} = 1$ gilt und alle andern $t^{\lambda}_{\alpha\beta}$ verschwinden. Ein Beispiel für $d = n - 1 = 2$ und $t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$ erhält man mit den Komponenten

$$
y_1 = t^3_{13} = 1, \; y_2 = t^3_{12} = y_3 = t^2_{13} = y_4 = t^3_{23} = y_5 = t^1_{23} = y_6 = t^2_{23} = 0
$$

$$
y_7 = -2, \; y_8 = y_4, \; y_9 = -y_6,
$$

welche die für $m = 1$ und $t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = 0$ entstehenden Bedingungen befriedigen, die durch das System

$$
\begin{aligned}
&y_7^2 + 2y_2y_3 + y_1^2 = 1, \; -y_7y_8 + y_2y_6 - y_2y_9 + y_1y_4 = 0, \; y_7 + y_1 = -1,\\
&y_8^2 - 2y_2y_5 + y_4^2 = 0, \quad y_8y_3 + y_7y_6 + y_9y_1 + y_3y_4 = 0, \; y_8 - y_4 = 0,\\
&y_9^2 + 2y_3y_5 + y_6^2 = 0, \quad y_8y_9 + y_7y_5 - y_5y_1 + y_6y_1 = 0, \; y_9 + y_6 = 0,
\end{aligned}
$$

dargestellt werden.

---

[17]) Vgl. [2]) Ch. I. § 5, p. 8.

[18]) Vgl. [5]) Ch. IV. p. 197.

Eingegangen 26. September 1959.

# Trennende Knotenpunktmengen und Reduzibilität abstrakter Graphen mit Anwendung auf das Vierfarbenproblem[1]).

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *G. A. Dirac* in Hamburg.

**Diese Arbeit enthält allgemeine Sätze über abstrakte Graphen. Es werden ausschließlich rein kombinatorische Methoden verwendet. Das gewonnene Resultat steht auch in enger Beziehung zum Vierfarbenproblem.**

## 1. Einleitung.

In der Theorie des Vierfarbenproblems spielen bekanntlich die sogenannten *irreduziblen 5-chromen Landkarten* eine sehr wichtige Rolle. Das sind Landkarten auf der Ebene (oder auch auf der Kugel), für deren Färbung vier Farben nicht ausreichen, und welche die Eigenschaft besitzen, daß man aus ihnen durch beliebig wiederholte Anwendung der zwei *Reduzierungsprozesse*, des *Weglassens von Gebieten* und der *Vereinigung zweier benachbarter Gebiete zu einem einzigen Gebiet* nicht eine neue 5-chrome Landkarte erhalten kann. Sonst heißt die Landkarte *reduzibel*. (Zwei Gebiete heißen benachbart, wenn sie eine oder mehrere gemeinsame Grenz*linien* haben.) Dieser Begriff kann ganz analog zum Begriff der irreduziblen bzw. reduziblen $k$-chromen Landkarten auf beliebig gewählten Flächen verallgemeinert werden.

Das Vierfarbenproblem für Landkarten mit unendlich vielen Gebieten läßt sich wegen eines Satzes von de Bruijn und Erdös auf das Vierfarbenproblem für Landkarten mit nur endlich vielen Gebieten zurückführen. Dieser — rein kombinatorische — Satz besagt, daß für alle ganzen Zahlen $k \geqq 1$ ein unendlicher $k$-chromer Graph (siehe S. 118) für die Definition) notwendigerweise irgendeinen endlichen $k$-chromen Graphen als Teilgraphen besitzt [1]. Daraus folgt, daß man aus einer 5-chromen Landkarte mit unendlich vielen Gebieten immer durch Weglassen von geeigneten Gebieten eine 5-chrome Landkarte mit nur endlich vielen Gebieten erhalten kann. Diejenigen unter den 5-chromen Landkarten mit nur endlich vielen Gebieten, welche die kleinstmögliche Anzahl von Gebieten haben, sind offenbar irreduzibel. Eine irreduzible 5-chrome Landkarte hat auch immer nur endlich viele Gebiete.

Die wichtigste Eigenschaft der irreduziblen 5-chromen Landkarte ergibt sich aus einem Resultat von P. J. Heawood, der bewies [2]: *Wenn sich in einer auf der Ebene (oder Kugel) gezeichneten 5-chromen Landkarte ein Gebiet mit weniger als 5 Nachbarn finden läßt, dann kann die Landkarte durch geeignete Anwendung der zwei Reduzierungsprozesse zu einer neuen 5-chromen Landkarte reduziert werden* .....(1).

[1]) Verf. dankt der Vereinsbank in Hamburg, die durch ein Stipendium die Ausarbeitung dieses Problems ermöglichte.

Aus dieser Tatsache folgt, daß in einer auf der Ebene (oder Kugel) gezeichneten irreduziblen Landkarte jedes Gebiet mit mindestens fünf anderen Gebieten benachbart ist.

Für reguläre[2]) 5-chrome Landkarten auf der Ebene bewies G. D. Birkhoff [3]: *Wenn in einer solchen Landkarte vier Gebiete zusammen ein ringförmiges Gebiet bilden, so daß sich innerhalb und außerhalb dieses Ringes Gebiete der Landkarte befinden, dann läßt sich die Landkarte zu einer neuen 5-chromen Landkarte reduzieren* ..... (2).

Also enthält keine irreduzible 5-chrome reguläre Landkarte vier solche Gebiete.

Diese Eigenschaften spielen bekanntlich eine große Rolle in der Theorie des Vierfarbenproblems, z. B. bei der Auffindung von unteren Grenzen für die Anzahl der Gebiete in 5-chromen Landkarten auf der Ebene.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die erwähnten Resultate (1) und (2) beide Spezialfälle einer allgemeinen kombinatorischen Eigenschaft abstrakter Graphen sind. Diese Eigenschaft wird hier „Reduzierungssatz" genannt und ist eine weitgehende Verallgemeinerung von (1) und (2). Der Satz ist in der reinen Graphentheorie und Kombinatorik von Interesse und ist auch für das Vierfarbenproblem von Bedeutung. Aus dem Satz wird eine Eigenschaft der irreduziblen 5-chromen ebenen Graphen abgeleitet. Auch wird ein weiteres Resultat über Reduzierung von Graphen bewiesen.

Für den mit einer Landkarte assoziierten Graphen[3]) bedeutet das Weglassen eines Gebietes der Landkarte die Streichung des entsprechenden Knotenpunktes und aller mit diesem Knotenpunkt inzidierenden Kanten. Die Löschung der Grenzlinien und die Vereinigung der benachbarten Gebiete $A$ und $B$ in ein einziges Gebiet $C$ hat folgende Wirkung auf einen mit der Landkarte assoziierten Graphen $\Gamma$: Es seien $a$ und $b$ die Knotenpunkte, welche den Gebieten $A$ bzw. $B$ entsprechen, $a$ und $b$ sind durch eine Kante verbunden, weil $A$ und $B$ benachbarte Gebiete sind. Der mit der neuen Landkarte assoziierte Graph $\Gamma''$ entsteht aus $\Gamma$ dadurch, daß $a$ und $b$ und alle mit ihnen inzidierenden Kanten weggelassen werden und ein neuer Knotenpunkt $c$ eingeführt wird, welcher mit genau allen jenen Knotenpunkten durch Kanten verbunden wird, die in $\Gamma$ mit mindestens einem der Knotenpunkte $a, b$ durch eine Kante verbunden waren. Dem Knotenpunkt $c$ entspricht das Gebiet $C$. Dieser Prozeß kann anschaulich als Zusammenschrumpfen der Kante $(a, b)$ in einen einzigen neuen Knotenpunkt $c$ angesehen werden, wobei auftretende Doppelkanten immer durch eine Kante ersetzt werden. Umgekehrt, ist ein Graph ohne Schneiden von Kanten auf eine Fläche gezeichnet, so kann eine beliebige Kante des Graphen zu einem einzigen (neuen) Knotenpunkt zusammengezogen werden, und das bedeutet die Vereinigung der entsprechenden Gebiete einer mit dem Graphen assoziierten Landkarte auf der Fläche.

---

[2]) Birkhoffs reguläre Landkarten haben folgende Eigenschaften: 1. Jedes Gebiet hat mindestens 5 Nachbarn. 2. Mehr als drei Gebiete haben keinen Punkt gemeinsam. 3. Jedes Gebiet ist einfach zusammenhängend. 4. Keine zwei und keine drei Gebiete bilden einen Ring mit einigen Gebieten der Landkarte innerhalb und anderen außerhalb dieses Ringes. Die Landkarte der Staaten der USA ist z. B. nicht regulär.

[3]) Eine Landkarte und ein Graph, *immer ohne Schlingen und ohne Doppelkanten*, heißen assoziiert, wenn es einen Isomorphismus zwischen den Gebieten der Landkarte und den Knotenpunkten des Graphen gibt mit der Eigenschaft, daß zwei Knotenpunkte dann und nur dann durch eine Kante verbunden sind, wenn die zwei entsprechenden Gebiete eine oder mehrere gemeinsame Grenzlinien haben. Man sieht leicht, daß sich ein mit einer auf eine Fläche gezeichneten Landkarte assoziierter Graph ohne Schneiden von Kanten auf dieselbe Fläche zeichnen läßt, und umgekehrt, daß, wenn ein Graph auf eine Fläche ohne Schneiden von Kanten gezeichnet ist, eine mit dem Graphen assoziierte Landkarte auf die Fläche gezeichnet werden kann [4].

## 2. Verallgemeinerung.

Der Inhalt der Einleitung wird in zwei Richtungen verallgemeinert werden. Zunächst einige Definitionen:

Die hier vorkommenden Graphen haben keine Schlingen und keine Doppelkanten, d. h. kein Knotenpunkt ist mit sich selbst durch eine Kante verbunden, und zwei verschiedene Knotenpunkte sind durch höchstens eine Kante miteinander verbunden.

*Graph* bedeutet von jetzt an immer einen beliebigen abstrakten Graphen, insbesondere braucht er nicht eben zu sein. Eine *Zeichnung* des (abstrakten) Graphen $\Gamma$ auf einer Fläche $F$ ist ein zu $\Gamma$ isomorpher Graph, dessen Knotenpunkte durch Punkte auf $F$ und dessen Kanten durch 1-Simplexe auf $F$ dargestellt sind, und $\Gamma$ ist *eben*, wenn es eine Zeichnung von $\Gamma$ auf der Ebene ohne Schneiden von Kanten gibt. Man sagt in diesem Fall auch, daß $\Gamma$ ohne Schneiden von Kanten auf der Ebene gezeichnet werden kann, und analog für eine beliebige Fläche $F$. Ein Graph ist *k-färbbar*, wenn es eine Einteilung der Knotenpunkte in $k$ paarweise elementfremde Klassen (Farbenklassen) gibt, so daß keine zwei durch eine Kante verbundene Knotenpunkte zu derselben Klasse gehören. Eine *k-Färbung* eines Graphen ist eine solche Einteilung der Knotenpunkte in $k$ Klassen. Ein Graph heißt *k-chrom*, wenn er $k$-färbbar und nicht $(k-1)$-färbbar ist; man nennt $k$ dann die *chromatische Zahl* des Graphen. Wenn die Knotenpunkte eines Graphen nicht unter den erwähnten Bedingungen in eine endliche Anzahl von Klassen eingeteilt werden können, dann hat der Graph eine unendliche chromatische Zahl. Ein Graph und eine Landkarte, welche miteinander assoziiert sind, haben die gleiche chromatische Zahl. Ein *vollständiger k-Graph* ist ein Graph, welcher $k$ Knotenpunkte und $\frac{1}{2}k(k-1)$ Kanten hat.

*Zusammenziehen eines Graphen.* Dieser Begriff ist eine Verallgemeinerung der in der Einleitung eingeführten Idee des Zusammenschrumpfens einer Kante eines Graphen. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, $n \geqq 2$, Graphen, wobei für alle $i = 2, \ldots, n$, $\Gamma_i$ aus $\Gamma_{i-1}$ durch Zusammenschrumpfen einer Kante von $\Gamma_{i-1}$ entsteht. Dann sagt man, daß $\Gamma_1$ *sich in* $\Gamma_n$ *zusammenziehen läßt* und daß $\Gamma_n$ *durch Zusammenziehen von* $\Gamma_1$ *entsteht.* Es sei $\Lambda$ ein zusammenhängender Teilgraph von $\Gamma$ mit mindestens einer Kante. Man kann alle Kanten in $\Lambda$ nacheinander zusammenschrumpfen lassen, bis nur ein Knotenpunkt von $\Lambda$ übrigbleibt. In welcher Reihenfolge immer man die Kanten von $\Lambda$ zusammenschrumpfen läßt, bis nur ein Knotenpunkt übrigbleibt, der so aus $\Gamma$ entstandene Graph kann folgendermaßen erzeugt werden: Zu dem Graphen $\Gamma - \Lambda$, den man aus $\Gamma$ durch Streichen aller Knotenpunkte von $\Lambda$ und aller mit diesen Knotenpunkten inzidierenden Kanten gewinnt, wird ein neuer Knotenpunkt $\delta$ gegeben, und mit genau allen jenen Knotenpunkten von $\Gamma - \Lambda$ durch Kanten verbunden, welche in $\Gamma$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus $\Lambda$ durch eine Kante verbunden sind. Man sagt, der neue Graph *entsteht aus* $\Gamma$ *durch Zusammenziehen des Teilgraphen* $\Lambda$. Ähnlich kann man mehrere zusammenhängende Teilgraphen von $\Gamma$ zu je einem Knotenpunkt zusammenziehen. Es ist wert, hier zu erwähnen, daß, wenn $\Gamma$ endlich ist, jeder aus $\Gamma$ durch Zusammenziehen gewonnene Graph weniger Knotenpunkte und weniger Kanten als $\Gamma$ enthält.

Der Prozeß des Zusammenziehens eines Graphen entspricht dem Prozeß des Löschens von Grenzlinien und der Vereinigung von Gebieten in mit Zeichnungen des Graphen assoziierten Landkarten. Ein $k$-chromer Graph heißt *irreduzibel*, wenn man aus ihm weder durch Wegstreichen von Knotenpunkten noch durch Zusammenziehen einen $k$-chromen Graphen gewinnen kann, sonst heißt er *reduzibel.* Diese Definition ist analog zu der in der Einleitung gegebenen Definition der irreduziblen Landkarten. Landkarte und assoziierter Graph sind immer beide reduzibel oder beide irreduzibel. Es soll bemerkt werden, daß,

wenn ein Graph $\Gamma$ ohne Schneiden von Kanten auf eine Fläche $F$ gezeichnet werden kann, sich jeder Graph, welcher durch Zusammenziehen aus $\Gamma$ entsteht, ebenfalls ohne Schneiden von Kanten auf $F$ zeichnen läßt. H. Hadwiger hat vermutet, daß sich jeder zusammenhängende $k$-chrome Graph in einen vollständigen $k$-Graphen zusammenziehen läßt. Wegen der soeben angeführten Bemerkung folgt aus der Wahrheit dieser Vermutung für $k = 5$ der Vierfarbensatz. K. F. Wagner hat bewiesen, daß die Wahrheit von Hadwigers Vermutung für $k = 5$ aus dem Vierfarbensatz folgt [5]. Die Vermutung ist nur für $k \leqq 4$ bewiesen worden [6], es sind aber keine Gegenbeispiele bekannt. Aus der Wahrheit der Vermutung folgt, daß, wenn auf einer Fläche eine $k$-chrome Landkarte existiert, man auf der Fläche $k$ gegenseitig benachbarte Gebiete zeichnen kann. Für alle Flächen, außer Kugel und Ebene, geht dies aus zwei Arbeiten von G. Ringel tatsächlich hervor [7], dessen Beweis sich auf die Flächentopologie stützt. Ferner gibt es, wenn die Vermutung wahr ist, keine irreduziblen $k$-chromen Graphen, außer den vollständigen $k$-Graphen.

*Trennende Knotenpunktmenge eines Graphen.* Eine Menge von Knotenpunkten eines zusammenhängenden Graphen heißt *trennende Knotenpunktmenge*, wenn durch Löschung aller Knotenpunkte der Menge und aller mit mindestens einer von ihnen inzidierenden Kanten aus dem Graphen ein nicht zusammenhängender Graph entsteht. Siehe Abbildung 1. Jeder Graph außer den vollständigen $k$-Graphen hat trennende Knotenpunktmengen.

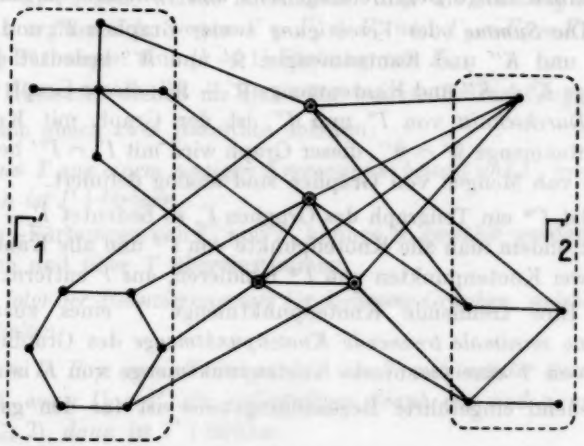


**Abbildung 1.**

Die Knotenpunkte der trennenden Knotenpunktmenge $T$ sind umringt. $\Gamma - T$ besteht in diesem Beispiel aus 4 zusammenhängenden Komponenten. Ihre Einteilung in zwei nicht-leere Klassen, d. h. die Bildung von $\Gamma'_1$ und $\Gamma'_2$, kann beliebig vollzogen werden. $\Gamma_1$ besteht aus allen Knotenpunkten, welche nicht zu $\Gamma'_2$ gehören und aus allen Kanten von $\Gamma$, die diese nicht zu $\Gamma'_2$ gehörenden Knotenpunkte miteinander verbinden, d. h. $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma'_2$. Und $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma'_1$.

Wie in der Einleitung erwähnt, läßt sich, wenn ein Gebiet $A$ einer auf der Ebene oder Kugel gezeichneten 5-chromen Landkarte weniger als 5 Nachbarn hat, die Landkarte zu einer neuen 5-chromen Landkarte reduzieren. In einem Graphen, welcher mit dieser Landkarte assoziiert ist, bilden die Knotenpunkte, welche mit den zu $A$ gehörigen Knotenpunkten durch Kanten verbunden sind, eine trennende Knotenpunktmenge von weniger als 5 Knotenpunkten. (Es gibt freilich mehr als 5 Gebiete bzw. Knotenpunkte.) Der Graph ist reduzibel.

Auch wurde erwähnt, daß eine auf der Ebene oder Kugel gezeichnete reguläre Landkarte, in welcher 4 Gebiete einen Ring bilden, wobei sich innerhalb und außerhalb

des Ringes Gebiete der Landkarte befinden, reduzibel ist. In einem mit dieser Landkarte assoziierten Graphen bilden die 4 Knotenpunkte mitsamt den sie verbindenden Kanten einen Kreis, und die 4 Knotenpunkte sind eine trennende Knotenpunktmenge. Der Graph ist reduzibel.

## 3. Reduzierungssatz.

Es wird folgendes bewiesen:

**Reduzierungssatz.** *Jeder zusammenhängende $k$-chrome Graph ($k \geqq 5$), welcher eine trennende Knotenpunktmenge von weniger als fünf Knotenpunkten enthält, läßt sich zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ reduzieren.*

Dieser Satz hat rein kombinatorischen Charakter. Graph bedeutet jetzt immer einen abstrakten Graphen. Für $k \leqq 4$ läßt sich ohnehin jeder zusammenhängende $k$-chrome Graph zu einem vollständigen $k$-Graphen reduzieren [6]. Der obige Satz ist offenbar eine weitreichende Erweiterung der in der Einleitung erwähnten, mit dem Vierfarbenproblem zusammenhängenden, Reduzierungseigenschaften von Landkarten und Graphen.

## 4. Beweis des Reduzierungssatzes.

Zunächst werden einige Begriffe eingeführt und Hilfssätze abgeleitet.

*Definition.* Die *Summe* oder *Vereinigung* zweier Graphen $\Gamma''$ und $\Gamma'''$ mit Knotenpunktmengen $K'$ und $K''$ und Kantenmengen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ bedeutet den Graphen mit Knotenpunktmenge $K' + K''$ und Kantenmenge $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$; dieser Graph wird mit $\Gamma'' + \Gamma'''$ bezeichnet. Der *Durchschnitt* von $\Gamma''$ und $\Gamma'''$ ist der Graph mit Knotenpunktmenge $K' \frown K''$ und Kantenmenge $\mathfrak{K}' \frown \mathfrak{K}''$, dieser Graph wird mit $\Gamma'' \frown \Gamma'''$ bezeichnet. Summe und Durchschnitt von Mengen von Graphen sind analog definiert.

*Definition.* Ist $\Gamma^*$ ein Teilgraph des Graphen $\Gamma$, so bedeutet $\Gamma - \Gamma^*$ den Graphen, der aus $\Gamma$ entsteht, indem man alle Knotenpunkte von $\Gamma^*$ und alle Kanten von $\Gamma$, welche mit einem oder zwei Knotenpunkten von $\Gamma^*$ inzidieren, aus $\Gamma$ entfernt.

*Definition.* Eine trennende Knotenpunktmenge $T$ eines zusammenhängenden Graphen $\Gamma$ ist eine *minimale trennende Knotenpunktmenge* des Graphen $\Gamma$, wenn keine echte Teilmenge von $T$ eine trennende Knotenpunktmenge von $\Gamma$ ist.

Die nachstehend eingeführte Bezeichnungsweise ist für den ganzen Rest dieser Arbeit gültig.

Es sei $T$ eine trennende Knotenpunktmenge des zusammenhängenden Graphen $\Gamma$. $\Gamma - T$ hat mindestens zwei zusammenhängende Komponenten. Alle zusammenhängenden Komponenten von $\Gamma - T$ seien in beliebiger Weise in zwei gegenseitig elementfremde nicht leere Klassen aufgeteilt, und die zwei Graphen, welche aus den Komponenten der zwei Klassen bestehen, seien mit $\Gamma_1'$ und $\Gamma_2'$ bezeichnet. Wenn $\Gamma - T$ aus zwei zusammenhängenden Komponenten besteht, dann sind $\Gamma_1'$ und $\Gamma_2'$ eindeutig festgelegt, wenn aber $\Gamma - T$ mehr als zwei zusammenhängende Komponenten hat, dann gibt es mehrere Einteilungen dieser in zwei Klassen, und $\Gamma_1'$ und $\Gamma_2'$ sollen irgendeiner beliebig festgesetzten Einteilung entsprechen. Es sei $\Gamma_1 = \Gamma - \Gamma_2'$ und $\Gamma_2 = \Gamma - \Gamma_1'$ (Siehe Abbildung 1.) Mit dieser Bezeichnungsweise, welche von jetzt an immer gilt, folgt

**Hilfssatz 1.** *Es ist $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, und $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ besteht aus allen Knotenpunkten von $T$, zusammen mit allen Kanten von $\Gamma$, welche zwei Knotenpunkte von $T$ miteinander verbinden.*

*Beweis.* Aus den Definitionen ergibt sich gleich, daß $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$ ist. Der Rest folgt aus der Tatsache, daß $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 = \Gamma - (\Gamma_1' + \Gamma_2')$ ist.

**Hilfssatz 2.** *Ist $T$ eine minimale trennende Knotenpunktmenge des Graphen $\Gamma$, dann ist jeder Knotenpunkt von $T$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus jeder zusammenhängenden Komponente von $\Gamma - T$ durch eine Kante verbunden.*

*Beweis.* Wenn $T$ aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, so folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\Gamma$ zusammenhängend ist. Angenommen, $T$ enthält mehrere Knotenpunkte und es gibt einen Knotenpunkt $t$ in $T$ und eine zusammenhängende Komponente $\Lambda$ von $\Gamma - T$, so daß $t$ mit keinem Knotenpunkt von $\Lambda$ verbunden ist, dann ist $\Lambda$ durch $T - t$ von den übrigen Knotenpunkten des Graphen $\Gamma$ abgetrennt, und daher ist in diesem Fall $T - t$ eine trennende Knotenpunktmenge; folglich ist $T$ nicht minimal. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Bezüglich des Zusammenhanges zwischen Färbung des Graphen und trennenden Knotenpunktmengen des Graphen ist offenbar nur der Fall von Interesse, daß $\Gamma$ mindestens $k$-chromatisch ist, während $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $(k-1)$-färbbar sind.

**Hilfssatz 3.** *Es sei die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ und $k \geqq 2$. Dann gibt es unter allen möglichen $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ allein und unter allen möglichen $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_2$ allein mit denselben $k-1$ Farben keine $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$, welche über die Knotenpunkte von $T$ miteinander übereinstimmen.*

*Beweis.* Gäbe es eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ und eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$ mit denselben $k-1$-Farben, welche miteinander über die Knotenpunkte von $T$ übereinstimmen, dann ergäbe sich, wegen $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ und $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Gamma - (\Gamma_1' + \Gamma_2')$, aus den zwei $(k-1)$-Färbungen eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma$.

Diese drei Hilfssätze dienen als Basis für weitere Betrachtungen.

Es lassen sich gleich zwei Resultate ableiten:

**Satz 1.** *Wenn $T$ aus einem einzigen Knotenpunkt besteht und $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $l$-färbbar sind $(l \geqq 2)$, dann ist $\Gamma$ $l$-färbbar.*

*Beweis.* Die $l$-Färbungen von $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ können so gewählt werden, daß sie dieselben $l$ Farben benutzen und über $T$ übereinstimmen.

*Aus Satz 1 folgt der Reduzierungssatz für $k$-chrome Graphen, welche einen trennenden Knotenpunkt enthalten.*

**Satz 2.** *Wenn in $\Gamma$ je zwei Knotenpunkte aus $T$ miteinander durch eine Kante verbunden sind (d. h. wenn $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ein vollständiger Graph ist) und wenn $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $l$-färbbar sind $(l \geqq 2)$, dann ist $\Gamma$ $l$-färbbar.*

*Beweis.* In einer beliebigen $l$-Färbung von $\Gamma_1$ haben alle Knotenpunkte in $T$ voneinander verschiedene Farben, und in einer beliebigen $l$-Färbung von $\Gamma_2$ ebenfalls. In $T$ seien die Knotenpunkte $t_1, t_2, \ldots, t_n$, wobei $n \leqq l$ ist. $\Gamma_1$ kann mit den Farben $1, 2, \ldots, l$ so gefärbt werden, daß $t_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ die Farbe $i$ bekommt; und $\Gamma_2$ ebenfalls. Die zwei Färbungen ergeben eine $l$-Färbung von $\Gamma$.

Satz 1 kann als Spezialfall von Satz 2 aufgefaßt werden.

Die folgenden Sätze behandeln Zusammenhänge zwischen Zusammenziehbarkeit und minimalen trennenden Knotenpunktmengen und chromatischer Zahl. Wenn $\Gamma$ $k$-chromatisch ist und mindestens einer der beiden Graphen $\Gamma_1, \Gamma_2$ ebenfalls $k$-chromatisch ist, dann hat $\Gamma$ sowieso echte Teilgraphen, die $k$-chromatisch sind; interessant ist also immer nur der Fall, daß $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $(k-1)$-färbbar sind. Auch wird $k \geqq 3$ (offenbar) immer vorausgesetzt. In diesem Fall hat also $T$ mehr als einen Knotenpunkt, nach Satz 1, und es gibt zwei Knotenpunkte von $T$, welche nicht durch eine Kante verbunden sind, nach Satz 2.

*Definition.* Knotenpunkte eines Graphen sind *voneinander unabhängig*, wenn keine zwei von ihnen durch eine Kante verbunden sind.

**Satz 3.** *Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ ist und $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $(k-1)$-färbbar sind und wenn $T$ minimal ist und die Knotenpunkte in $T$ voneinander unabhängig sind, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

*Beweis.* Nach Hilfssatz 3 gibt es entweder keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, bei welcher alle Knotenpunkte in $T$ dieselbe Farbe haben, oder es gibt keine solche $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$. Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß es keine solche $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ gibt. Dann ist ein Graph $\Gamma_1^*$, welcher aus $\Gamma_1$ entsteht, indem man alle Knotenpunkte von $T$ und alle mit ihnen inzidierenden Kanten aus $\Gamma_1$ streicht und dann einen neuen Knotenpunkt einführt und durch Kanten mit genau allen jenen Knotenpunkten in $\Gamma_1 - T$ verbindet, welche in $\Gamma_1$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus $T$ verbunden waren, nicht $(k-1)$-färbbar. Denn wäre $\Gamma_1^*$ $(k-1)$-färbbar, so gäbe es eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher alle Knotenpunkte in $T$ dieselbe Farbe tragen. $\Gamma$ läßt sich folgendermaßen zu einem Graphen, welcher einen Graphen wie $\Gamma_1^*$ als Teilgraphen enthält, zusammenziehen: Irgendeine zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2'$ sei, wenn sie nicht aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, zu einem einzigen Knotenpunkt $x$ zusammengezogen; wenn die Komponente aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, so sei diese mit $x$ bezeichnet. Dann ist auf jeden Fall nach Hilfssatz 2 jeder Knotenpunkt in $T$ durch eine Kante mit $x$ verbunden. Jetzt seien sämtliche Kanten, welche $x$ mit den Knotenpunkten in $T$ verbinden, zu einem einzigen Knotenpunkt $y$ zusammengeschrumpft. $y$ ist dann mit genau allen jenen Knotenpunkten aus $\Gamma_1 - T$ verbunden, welche in $\Gamma_1$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus $T$ verbunden sind. Daher enthält der auf diese Weise aus $\Gamma$ entstehende Graph einen Graphen wie $\Gamma_1^*$ als Teilgraphen, so daß er nicht $(k-1)$-färbbar ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

*Aus Satz 1 und Satz 2 folgt der Reduzierungssatz für Graphen, die eine trennende Knotenpunktmenge mit weniger als drei Knotenpunkten enthalten.*

**Satz 4.** *Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ ist, $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $(k-1)$-färbbar sind und $T$ minimal ist und mindestens 3 Knotenpunkte enthält, und wenn in $T$ ein Knotenpunkt $t$ existiert, so daß die Knotenpunkte von $T - t$ voneinander unabhängig sind, $t$ aber mit mindestens einem von ihnen durch eine Kante verbunden ist, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz 4.** *Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ und $T$ minimal ist, und wenn es eine Teilmenge $T' \leqq T$ gibt, welche mindestens zwei Knotenpunkte enthält und deren Knotenpunkte voneinander unabhängig sind, und wenn es entweder keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ gibt, in welcher alle Knotenpunkte von $T'$ dieselbe Farbe haben oder es keine solche $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$ gibt, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

*Beweis.* Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß es keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ gibt, in welcher alle Knotenpunkte aus $T'$ dieselbe Farbe haben. Dann sei $\overline{\Gamma}_1$ ein Graph, welcher aus $\Gamma_1$ entsteht, indem man alle Knotenpunkte in $T'$ und alle mit ihnen inzidierenden Kanten aus $\Gamma_1$ streicht und dann einen neuen Knotenpunkt einführt und durch Kanten mit genau allen jenen Knotenpunkten von $\Gamma_1 - T'$ verbindet, welche in $\Gamma_1$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus $T'$ verbunden waren; dieser Graph $\overline{\Gamma}_1$ ist nicht $(k-1)$-färbbar. $\Gamma$ läßt sich folgendermaßen zu einem Graphen, welcher einen Graphen wie $\overline{\Gamma}_1$ als Teilgraphen enthält, zusammenziehen: Wenn $\Gamma_2'$ eine zusammenhängende

Komponente enthält, welche aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, so sei eine solche mit $x$ bezeichnet, wenn keine solche zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2'$ existiert, dann sei eine beliebige zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2'$ zu einem einzigen Knotenpunkt $x$ zusammengezogen. In dem auf diese Weise aus $\Gamma$ erhaltenen Graphen ist wegen Hilfssatz 2 der Knotenpunkt $x$ auf jeden Fall mit jedem Knotenpunkt aus $T$ durch eine Kante verbunden. Jetzt seien sämtliche Kanten, welche $x$ mit den Knotenpunkten in $T'$ verbinden, zu einem einzigen Knotenpunkt $y$ zusammengezogen. Der auf diese Weise aus $\Gamma$ entstehende Graph hat einen zu $\overline{\Gamma}_1$ isomorphen Teilgraphen, und ist daher nicht $(k-1)$-färbbar. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen.

*Beweis von Satz* 4. Entweder existiert keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher alle Knotenpunkte aus $T-t$ dieselbe Farbe haben, oder es existiert keine solche $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$. Denn in jeder solchen $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ hat $t$ eine Farbe, welche von der Farbe der Knotenpunkte in $T-t$ verschieden ist, und in jeder solchen $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$ auch, nachdem $t$ ja mit mindestens einem Knotenpunkt aus $T-t$ durch eine Kante verbunden ist. Gäbe es also solche $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und auch von $\Gamma_2$, dann gäbe es eine Färbung von $\Gamma_1$ mit den Farben $1, 2, \ldots, k-1$, in welcher die Knotenpunkte von $T-t$ die Farbe 1 haben und $t$ die Farbe 2 hat, und es gäbe auch eine Färbung von $\Gamma_2$ mit denselben Farben, in welcher die Knotenpunkte von $T-t$ ebenfalls die Farbe 1 haben und $t$ die Farbe 2 hat, und das steht im Widerspruch zu Hilfssatz 3, so daß die Behauptung richtig ist. Satz 4 folgt jetzt aus Hilfssatz 4.

*Aus den Sätzen* 2, 3 *und* 4 *folgt der Reduzierungssatz für k-chrome Graphen, welche eine trennende Knotenpunktmenge mit weniger als vier Knotenpunkten enthalten.* Beweis: Es ist bereits gezeigt worden, daß der Reduzierungssatz für alle jene $k$-chromen Graphen wahr ist, welche eine trennende Knotenpunktmenge mit einem oder zwei Knotenpunkten enthalten. Es sei $\Gamma$ ein zusammenhängender $k$-chromer Graph und es sei $T$ eine minimale trennende Knotenpunktmenge von $\Gamma$ mit drei Knotenpunkten. $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ seien wie oben definiert. Wenn mindestens einer der Graphen $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ $k$-chrom ist, dann ist der Reduzierungssatz sicher für $\Gamma$ richtig. Dies ist wegen Satz 2 der Fall, wenn je zwei der drei Knotenpunkte in $T$ miteinander durch Kanten verbunden sind. Es gibt noch zwei weitere Alternativen: 1. Die Knotenpunkte aus $T$ sind voneinander unabhängig. 2. Zwei Knotenpunkte aus $T$ sind voneinander unabhängig (d. h. nicht durch eine Kante verbunden) und der dritte Knotenpunkt aus $T$ ist mit mindestens einem von ihnen durch eine Kante verbunden. Wenn Alternative 1 der Fall ist, so folgt aus Satz 3, daß $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammengezogen werden kann, und wenn Alternative 2 der Fall ist, so folgt dies aus Satz 4. Damit ist die Richtigkeit des Reduzierungssatzes für Graphen mit trennenden Knotenpunktmengen von weniger als 4 Knotenpunkten bewiesen. Es bleibt also nur übrig, minimale trennende Knotenpunktmengen mit vier Knotenpunkten zu behandeln. Dazu sind noch einige Resultate notwendig.

**Satz 5.** *Es sei die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ und es seien $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ beide $(k-1)$-färbbar. Es sei $T$ eine minimale trennende Knotenpunktmenge von $\Gamma$ mit den Knotenpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$, $n \geqq 3$, wobei je zwei Knotenpunkte aus $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ miteinander durch Kanten verbunden sind. Dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

*Beweis.* Nach Hilfssatz 3 läßt sich mindestens einer der Graphen $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ nicht auf solche Weise mit $k-1$ Farben färben, daß $t_1, \ldots, t_n$ alle verschiedene Farben haben. Es seien die Bezeichnungen so gewählt, daß es keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ gibt, bei welcher $t_1, \ldots, t_n$ alle verschiedene Farben haben. Daraus folgt wegen der Tatsache, daß $t_1, \ldots, t_{n-1}$ alle miteinander verbunden sind, daß, wenn aus $\Gamma_1$ ein neuer Graph $\Gamma_1^+$ kon-

struiert wird, indem man alle Kanten $(t_i, t_n)$, $i = 1, \ldots, n-1$, die nicht in $\Gamma_1$ enthalten sind, zu $\Gamma_1$ hinzufügt — nach Satz 2 sind nicht alle diese Kanten in $\Gamma_1$ enthalten —, der neue Graph $\Gamma_1^+$ $k$-chrom ist. $\Gamma$ läßt sich auf folgende Weise zu einem Graphen, welcher $\Gamma_1^+$ als Teilgraphen enthält, zusammenziehen: Wenn $\Gamma_2''$ eine zusammenhängende Komponente enthält, welche aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, so sei ein solcher mit $x$ bezeichnet, wenn keine solche zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2''$ existiert, dann sei eine beliebige zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2''$ zu einem einzigen Knotenpunkt $x$ zusammengezogen. Auf jeden Fall ist $x$ wegen Hilfssatz 2 mit sämtlichen Knotenpunkten aus $T$ durch Kanten verbunden. Nun sei die Kante $(t_n, x)$ zu einem Knotenpunkt $y$ zusammengeschrumpft. $y$ ist mit jedem von $t_1, \ldots, t_{n-1}$ durch eine Kante verbunden. Der auf diese Weise aus $\Gamma$ entstandene Graph enthält offenbar $\Gamma_1^+$ als Teilgraph und hat daher als chromatische Zahl mindestens $k$. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Der folgende Hilfssatz ergänzt Hilfssatz 4.

**Hilfssatz 5.** *Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k$ und $T$ minimal ist, und wenn es in $T$ zwei Knotenpunkte gibt, welche in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ dieselbe Farbe haben oder zwei Knotenpunkte, welche in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$ dieselbe Farbe haben, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

*Beweis.* Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß die Knotenpunkte $t'$ und $t''$ aus $T$ in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ dieselbe Farbe haben. Dann ist der Graph, welcher aus $\Gamma_1$ durch Hinzufügen der Kante $(t', t'')$ entsteht, nicht $(k-1)$-färbbar. Dieser Graph sei durch $\Gamma' + (t', t'')$ bezeichnet. $\Gamma$ läßt sich in folgender Weise zu einem Graphen zusammenziehen, welcher $\Gamma_1 + (t', t'')$ als Teilgraphen enthält: Wenn es eine zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2''$ gibt, welche aus einem einzigen Knotenpunkt besteht, so sei diese durch $x$ bezeichnet, wenn es keine solche gibt, dann sei eine beliebige zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2''$ zu einem einzigen Knotenpunkt $x$ zusammengezogen. Dann ist nach Hilfssatz 2 auf jeden Fall $x$ mit $t'$ und mit $t''$ durch Kanten verbunden. Der Graph, welcher entsteht, wenn $(t'', x)$ jetzt zusammenschrumpft, enthält $\Gamma_1 + (t', t'')$ als Teilgraphen. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Der Beweis unseres Reduzierungssatzes wird durch den Beweis des folgenden Satzes vollständig.

**Satz 6.** *Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma$ mindestens $k \geqq 5$ ist, $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ $(k-1)$-färbbar sind, und $T$ eine aus vier Knotenpunkten bestehende minimale trennende Knotenpunktmenge ist, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen.*

*Beweis.* Der Beweis richtet sich nach der Struktur von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Die verschiedenen Möglichkeiten lassen sich durch die Anzahl der Kanten in $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ unterscheiden. Diese Anzahl ist wegen Satz 2 höchstens 5.

1.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält 5 Kanten. In diesem Fall enthält $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ vollständige 3-Graphen. Satz 6 folgt dann wegen Satz 5.

2.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält 4 Kanten. Die vier Kanten bilden offenbar entweder einen Kreis oder $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält einen vollständigen 3-Graphen. Wenn $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ einen vollständigen 3-Graphen enthält, dann folgt Satz 6 wegen Satz 5. *Zu betrachten bleibt nur der Fall, daß die vier Kanten von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ einen Kreis bilden.*

3.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält 3 Kanten. Wie man sich leicht überzeugt, gibt es drei Möglichkeiten: a) Die drei Kanten haben einen gemeinsamen Knotenpunkt. b) Die drei Kanten bilden einen vollständigen 3-Graphen. c) Die drei Kanten bilden einen Weg. Im Fall a)

gibt es in $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ drei voneinander unabhängige Knotenpunkte, und sie sind alle mit dem vierten Knotenpunkt verbunden. Satz 6 folgt dann wegen Satz 4. Im Fall b) folgt Satz 6 wegen Satz 5. *Zu betrachten bleibt nur der Fall, daß die drei Kanten einen Weg bilden.*

4.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält 2 Kanten. Entweder haben sie einen gemeinsamen Knotenpunkt oder nicht. Wenn sie einen gemeinsamen Knotenpunkt haben, dann sind die anderen drei Knotenpunkte von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ voneinander unabhängig, und Satz 6 folgt dann wegen Satz 4. *Zu betrachten bleibt nur der Fall, daß die zwei Kanten keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben.*

5.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält nur eine Kante. Satz 6 folgt dann wegen Satz 4.

6.) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält keine Kante. Satz 6 folgt dann wegen Satz 3.

Es bleiben also drei Fälle zu betrachten. Sie werden jetzt der Reihe nach behandelt werden. Die vier Knotenpunkte von $T$ werden durch $t_1, t_2, t_3, t_4$ bezeichnet.

A. $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ *enthält vier Kanten, welche einen Kreis bilden.*

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $(t_1, t_2)$, $(t_2, t_3)$, $(t_3, t_4)$ und $(t_4, t_1)$ die vier Kanten sind.

Wegen Hilfssatz 3 gibt es Bedingungen hinsichtlich der Farben von $t_1, t_2, t_3, t_4$ in den $(k-1)$-Färbungen sowohl von $\Gamma_1$ als auch von $\Gamma_2$, welche Übereinstimmung der Färbungen über $t_1, t_2, t_3, t_4$ ausschließen. Diese Bedingungen können verschiedener Art sein:

Bedingungen wie z. B., daß in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ die Knotenpunkte $t_1$ und $t_3$ zwei verschiedene Farben haben müssen. Dann folgt auf jeden Fall Satz 6 aus Hilfssatz 4.

Bedingungen wie z. B., daß in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ die Knotenpunkte $t_1$ und $t_3$ dieselbe Farbe haben müssen. Dann folgt auf jeden Fall Satz 6 aus Hilfssatz 5.

Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, daß, wenn $t_i$ und $t_j$ irgend zwei unabhängige Knotenpunkte von $T$ sind, es $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$ gibt, in welchen die Farbe von $t_i$ gleich der Farbe von $t_j$ ist, und auch $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$, in welcher die Farbe von $t_i$ ungleich der Farbe von $t_j$ ist. Es sei vorausgesetzt, offenbar o. V. d. A., daß immer die Farben $1, 2, \ldots, k-1$ zur Färbung von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$ benutzt werden und daß für $i = 1, 2, 3, 4$ die Farbe von $t_i \leqq 4$ ist.

Nachdem Übereinstimmung der Farben von $t_1, t_2, t_3, t_4$ in $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$ nicht erreicht werden kann, ist sodann leicht zu sehen, daß, wegen der Struktur von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, genau eine der Alternativen a) und b) gültig ist:

a) In jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher $t_1$ und $t_3$ zwei verschiedene Farben haben, sind auch die Farben von $t_2$ und $t_4$ verschieden, und in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher $t_1$ und $t_3$ zwei verschiedene Farben haben, sind die Farben von $t_2$ und $t_4$ gleich.

b) Wie a), nur mit $\Gamma_1$ statt $\Gamma_2$ und $\Gamma_2$ statt $\Gamma_1$.

Auch ist entweder c) oder d) wahr:

c) In jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher $t_2$ und $t_4$ nicht dieselbe Farbe haben, sind auch die Farben von $t_1$ und $t_3$ verschieden, und in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher $t_2$ und $t_4$ nicht dieselbe Farbe haben, sind die Farben von $t_1$ und $t_3$ gleich.

d) Wie c), nur mit $\Gamma_1$ statt $\Gamma_2$ und $\Gamma_2$ statt $\Gamma_1$.

a) ist mit c) vereinbar und mit d) unvereinbar.

b) ist mit d) vereinbar und mit c) unvereinbar.

Folglich gilt *entweder* a) und c) *oder* b) und d).

Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß a) und c) gelten.

$\Gamma_2 + (t_1, t_3) + (t_2, t_4)$, d. h. der Graph, welcher aus $\Gamma_2$ durch Hinzufügen der Kanten $(t_1, t_3)$ und $(t_2, t_4)$ entsteht, hat dann die chromatische Zahl $k$. Es wird jetzt gezeigt werden, daß $\Gamma_1$ zwei Wege enthält, welche keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben und von denen der eine $t_1$ mit $t_3$ verbindet und der andere $t_2$ mit $t_4$. Durch Zusammenziehen dieser Wege zu den Kanten $(t_1, t_3)$ und $(t_2, t_4)$ entsteht aus $\Gamma$ ein Graph, welcher $\Gamma_2 + (t_1, t_3) + (t_2, t_4)$ als Teilgraphen enthält.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, bei der der Knotenpunkt $t_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$, die Farbe $i$ hat. (Es ist immer vorausgesetzt, daß $k \geqq 5$ ist.) Man betrachte alle Knotenpunkte von $\Gamma_1$, welche bei $\mathfrak{J}$ die Farbe 1 haben, und alle Knotenpunkte, welche bei $\mathfrak{J}$ die Farbe 3 haben, und alle Kanten, welche sie miteinander verbinden. Diese Knotenpunkte und Kanten bilden einen Teilgraphen von $\Gamma_1$, welcher mit $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ bezeichnet wird. $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ besteht aus einer oder mehreren zusammenhängenden Komponenten. Wenn in einer beliebigen Teilmenge der Menge der zusammenhängenden Komponenten von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ die Farben 1 und 3 miteinander vertauscht werden und die Farben aller anderen Knotenpunkte von $\Gamma_1$ unverändert bleiben, so entsteht aus $\mathfrak{J}$ immer eine regelrechte $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$. Es seien nun die Farben 1 und 3 in jener zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$, zu welcher $t_1$ gehört, miteinander vertauscht und die Farben von allen anderen Knotenpunkten in $\Gamma_1$ unverändert gelassen. In der so entstandenen $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ hat $t_1$ die Farbe 3, $t_2$ die Farbe 2 und $t_4$ die Farbe 4. Jetzt ist die Farbe von $t_3$ nicht mehr 3, weil ja c) gilt. Das bedeutet, daß $t_1$ und $t_3$ zur selben zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ gehören. Daraus folgt, daß $t_1$ und $t_3$ miteinander durch einen in $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ liegenden Weg verbunden sind. Ein solcher Weg sei mit $W(1, 3)$ bezeichnet.

Der Teilgraph von $\Gamma_1$, welcher aus allen Knotenpunkten mit Farbe 2 (bei $\mathfrak{J}$) und allen mit Farbe 4 und allen sie miteinander verbindenden Kanten besteht, sei mit $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ bezeichnet. Durch Vertauschen der Farben 2 und 4 in der zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$, zu welcher $t_2$ gehört, zeigt sich wegen a), daß $t_4$ zu dieser gehört. $t_2$ und $t_4$ sind also durch einen in $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ liegenden Weg $W(2, 4)$ miteinander verbunden. $W(1, 3)$ und $W(2, 4)$ haben offenbar keinen gemeinsamen Knotenpunkt. Keiner von ihnen besteht aus einer einzigen Kante.

Der Graph, welcher aus $\Gamma$ entsteht, wenn der Weg $W(1, 3) - t_1$[4]) zu dem Knotenpunkt $t_3$ und der Weg $W(2, 4) - t_2$ zu dem Knotenpunkt $t_4$ zusammengezogen wird, enthält $\Gamma_2 + (t_1, t_3) + (t_2, t_4)$ als Teilgraphen. Seine chromatische Zahl ist daher $\geqq k$. Damit ist Satz 6 im Fall A. bewiesen.

B. *$\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ enthält drei Kanten, welche einen Weg bilden.*

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $(t_1, t_2)$, $(t_2, t_3)$ und $(t_3, t_4)$ die drei Kanten sind.

Entweder gibt es keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher $t_1$ und $t_4$ beide dieselbe Farbe haben, oder es gibt keine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher $t_1$ und $t_4$ dieselbe Farbe haben. Beweis: Es sei angenommen, $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ können beide mit den Farben $1, 2, \ldots, k-1$ so gefärbt werden, daß $t_1$ und $t_4$ die Farbe 1 erhalten. Wegen der Struktur von $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ haben in jeder solchen Färbung von $\Gamma_1$ und auch in jeder solchen Färbung von $\Gamma_2$ die Punkte $t_2$ und $t_3$ zwei verschiedene Farben, welche beide von der Farbe 1 verschieden sind. Also gibt es eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher $t_1$ und $t_4$ die Farbe 1 haben, $t_2$ die Farbe 2 und $t_3$ die Farbe 3 hat; und es gibt eine $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher die Farben von $t_1, t_2, t_3, t_4$ der Reihe nach ebenfalls 1, 2, 3, 1 sind. Diese $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ stimmen über die Knotenpunkte von $T$ miteinander überein, im Widerspruch zu Hilfssatz 3. Damit ist die Behauptung bewiesen.

---

[4]) Siehe S. 120 für die Definition.

Nach Hilfssatz 4 läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen. Damit ist Satz 6 im Fall B. bewiesen.

C. *$\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ enthält zwei Kanten, welche keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben.*

Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $(t_1, t_2)$ und $(t_3, t_4)$ die zwei Kanten sind.

Nach Hilfssatz 3 gibt es Bedingungen hinsichtlich der Farben von $t_1, t_2, t_3, t_4$ in den $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$, welche Übereinstimmung der Färbungen über $t_1, t_2, t_3, t_4$ ausschließen.

Wegen Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5 kann im folgenden angenommen werden, daß, wenn $t_i$ und $t_j$ zwei beliebige Knotenpunkte aus $T$ sind, welche nicht durch eine Kante miteinander verbunden sind, $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$ existieren, in welchen die Farbe von $t_i$ gleich der Farbe von $t_j$ ist, und auch $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und von $\Gamma_2$ existieren, in welchen die Farbe von $t_i$ nicht gleich der Farbe von $t_j$ ist. Denn ist dies nicht der Fall, dann folgt Satz 6 aus Hilfssatz 4 oder 5.

Es gibt also $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und auch $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_2$, in welchen die Farbe von $t_1$ gleich der Farbe von $t_3$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß, wegen Hilfssatz 3 und der Struktur von $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$, genau eine der Alternativen a) und b) gültig ist:

a) In jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher die Farben von $t_1$ und $t_3$ gleich sind, ist die Farbe von $t_2$ gleich der Farbe von $t_4$, und in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher die Farben von $t_1$ und $t_3$ gleich sind, ist die Farbe von $t_2$ ungleich der Farbe von $t_4$.

b) Wie a), nur mit $\Gamma_1$ statt $\Gamma_2$ und $\Gamma_2$ statt $\Gamma_1$.

Es gibt ferner $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_1$ und auch $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_2$, in welchen die Farbe von $t_2$ gleich der Farbe von $t_4$ ist. Wegen Hilfssatz 3 und der Struktur von $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ gilt genau eine der Alternativen c) und d):

c) In jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher die Farben von $t_2$ und $t_4$ gleich sind, ist die Farbe von $t_1$ gleich der Farbe von $t_3$, und in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$, in welcher die Farben von $t_2$ und $t_4$ gleich sind, ist die Farbe von $t_1$ ungleich der Farbe von $t_3$.

d) Wie c), nur mit $\Gamma_1$ statt $\Gamma_2$ und $\Gamma_2$ statt $\Gamma_1$.

a) ist mit c) vereinbar und mit d) unvereinbar.

b) ist mit c) unvereinbar und mit d) vereinbar.

Folglich gilt *entweder* a) und c) *oder* b) und d).

Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß a) und c) gelten.

Dann enthält $\Gamma_1$ zwei Wege, welche keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben und von denen der eine $t_1$ mit $t_3$ verbindet und der andere $t_2$ mit $t_4$. Beweis: Es sei $\mathfrak{J}$ eine Färbung von $\Gamma_1$ mit den Farben $1, 2, \ldots, k-1$, in welcher $t_1$ und $t_3$ die Farbe 1 haben, und $t_2$ und $t_4$ die Farbe 2. Nach den soeben ausgeführten Überlegungen gibt es solche Färbungen von $\Gamma_1$. Alle Knotenpunkte von $\Gamma_1$, welche bei $\mathfrak{J}$ die Farbe 1 haben und alle jene, welche die Farbe 3 haben und alle Kanten aus $\Gamma_1$, welche diese Knotenpunkte miteinander verbinden, bilden einen Teilgraphen von $\Gamma_1$, der mit $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ bezeichnet wird; $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ sei analog definiert. ($k \geqq 5$ ist immer vorausgesetzt.) Es seien die Farben 1 und 3 in derjenigen zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$, zu welcher $t_1$ gehört, miteinander vertauscht, während die Farben aller anderen Knotenpunkte von $\Gamma_1$ unverändert bleiben. Dadurch entsteht eine regelrechte $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$, in welcher $t_2$ und $t_4$ beide die Farbe 2 haben und $t_1$ die Farbe 3. Wegen c) ist in dieser Färbung die Farbe von $t_3$ nicht mehr 1, sondern 3. $t_1$ und $t_3$ gehören also zu derselben zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$. Durch Vertauschen der Farben 2 und 4 in der zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$, zu welcher $t_2$ gehört, zeigt sich wegen

a), daß $t_2$ und $t_4$ zu derselben zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ gehören. Daher sind $t_1$ und $t_3$ durch einen in $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$ liegenden Weg $W(1, 3)$ miteinander verbunden, und $t_2$ und $t_4$ durch einen in $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ liegenden Weg $W(2, 4)$. $W(1, 3)$ und $W(2, 4)$ haben offenbar keinen gemeinsamen Knotenpunkt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Graph $\Gamma^*$, welcher aus $\Gamma$ entsteht, indem $W(1, 3)$ und $W(2, 4)$ zu je einem einzigen Knotenpunkt zusammengezogen werden, hat als chromatische Zahl mindestens $k$. Beweis: Der Graph $\Gamma_2^*$ entstehe aus $\Gamma_2$, indem man $t_1, t_2, t_3, t_4$ und alle mit einer oder zwei von ihnen inzidierenden Kanten aus $\Gamma_2$ streicht und zwei neue Knotenpunkte $T_{13}$ und $T_{24}$ zu $\Gamma_2$ hinzufügt, und $T_{13}$ durch Kanten mit genau allen jenen Knotenpunkten von $\Gamma_2'$ verbindet, welche in $\Gamma_2$ mit mindestens einem von $t_1, t_3$ durch eine Kante verbunden sind, und $T_{24}$ durch Kanten mit genau allen jenen Knotenpunkten von $\Gamma_2'$ verbindet, welche in $\Gamma_2$ mit mindestens einem von $t_2, t_4$ durch eine Kante verbunden sind, und $T_{13}$ mit $T_{24}$ durch eine Kante verbindet. $\Gamma_2^*$ ist nicht $(k-1)$-färbbar, denn wäre er $(k-1)$-färbbar, so gäbe es $(k-1)$-Färbungen von $\Gamma_2$, in welchen die Farbe von $t_1$ gleich der Farbe von $t_3$ und gleichzeitig auch die Farbe von $t_2$ gleich der Farbe von $t_4$ wäre, was mit a) und c) im Widerspruch steht. Die chromatische Zahl von $\Gamma_2^*$ ist also $\geqq k$. $\Gamma_2^*$ ist offenbar Teilgraph von $\Gamma^*$, womit die Behauptung bewiesen ist. Damit ist Satz 6 im Falle C. bewiesen.

Die Fälle A., B. und C. erschöpfen alle Möglichkeiten, welche betrachtet zu werden brauchen, wie gezeigt wurde. Daher ist Satz 6 und damit auch der Reduzierungssatz bewiesen.

## 5. Bemerkungen.

Aus dem Reduzierungssatz folgt:

*Jeder irreduzible Graph mit chromatischer Zahl* $\geqq 5$ *ist mindestens* 5*-fach zusammenhängend*[5]).

Nach dem Mengerschen Graphensatz folgt aus dieser Tatsache:

*Zwei beliebige Knotenpunkte jedes irreduziblen Graphen mit chromatischer Zahl* $\geqq 5$, *mit der einzigen Ausnahme des vollständigen* 5*-Graphen, sind immer durch mindestens* 5 *Wege verbunden, von denen je zwei nur ihre Endpunkte, sonst nichts, gemeinsam haben.*

$\Gamma_1(\mathfrak{J}, 1, 3)$, $\Gamma_1(\mathfrak{J}, 2, 4)$ usw. sind die Analoga der Kempeschen Ketten für Landkarten, die von A. B. Kempe entdeckt worden sind [8] und seither von Birkhoff [3] und anderen verwendet wurden.

Die Knotenpunkte und Kanten eines abstrakten Graphen können ganz allgemein als Elemente resp. Relationen aufgefaßt werden, und daraus ergeben sich verschiedene Deutungen für den Reduzierungssatz. Der Satz ist freilich auch für die ebenen Graphen stärker als alles, was schon bekannt ist, denn (2) und die anderen ähnlichen Resultate beziehen sich (in die Terminologie der Graphen übersetzt) auf *triangulierte* Graphen, d. h. Graphen, in welchen durch Einsetzen von Kanten erreicht worden ist, daß die Ebene durch den Graphen so in Gebiete zerteilt wird, daß *jedes* Gebiet durch genau drei Kanten begrenzt ist.

---

[5]) Ein Graph ist $n$-fach zusammenhängend, wenn er mindestens $n+1$ Knotenpunkte hat, und wenn er weder durch das Streichen von irgend $n-1$ seiner Knotenpunkte noch durch das Streichen von irgend $n-1$ seiner Kanten unzusammenhängend wird.

## 6. Ein weiterer Satz über Reduzierung.

Wenn $\Gamma$ ein ebener Graph ist und die minimale trennende Knotenpunktmenge $T$ die Eigenschaft besitzt, daß $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ einen Kreis enthält, so besteht $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ aus einem Kreis, und $\Gamma - T$ hat genau zwei zusammenhängende Komponenten. Denn es sei $K$ ein Kreis, welcher in $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ enthalten ist. Wenn $\Gamma$ ohne Schneiden von Kanten auf der Ebene gezeichnet ist, teilt $K$ die Ebene in zwei Bereiche. Nach Hilfssatz 2 ist jeder Knotenpunkt von $K$ mit mindestens einem Knotenpunkt aus jeder der zusammenhängenden Komponenten von $\Gamma - T$ verbunden. $K$ hat aber mindestens drei Knotenpunkte. Folglich liegt genau eine zusammenhängende Komponente von $\Gamma - T$ außerhalb $K$ und genau eine innerhalb $K$. Daher hat $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ keine Knotenpunkte, welche nicht zu $K$ gehören, denn ein solcher Knotenpunkt müßte nach Hilfssatz 2 mit mindestens einem Knotenpunkt aus jeder der zwei zusammenhängenden Komponenten von $\Gamma - T$ durch eine Kante verbunden sein, und das ist ohne Schneiden von Kanten nicht möglich. Daher hat aber $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ auch keine Kante außer den Kanten von $K$, denn wäre eine solche Kante vorhanden, so enthielte $\Gamma_1 \frown \Gamma_2$ einen Kreis und einen Knotenpunkt, welcher nicht zu diesem Kreis gehört, was nach dem Vorangegangenen nicht möglich ist. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Diese Eigenschaft der ebenen Graphen führt zur folgenden rein kombinatorischen Verallgemeinerung:

**Satz 7.** *Wenn $T$ minimal ist und ein Knotenpunkt $t$ in $T$ existiert, so daß $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ entweder $(k-2)$-chrom ist $(k \geqq 3)$ oder zu einem $(k-2)$-chromen Graphen zusammengezogen werden kann, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem Graphen mit chromatischer Zahl $\geqq k$ zusammenziehen. Wenn $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ entweder einen vollständigen $(k-2)$-Graphen enthält oder einen Graphen, der zu einem vollständigen $(k-2)$-Graphen reduziert werden kann, dann läßt sich $\Gamma$ zu einem vollständigen $k$-Graphen reduzieren.*

*Beweis.* 1. Wenn die chromatische Zahl von $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ kleiner als $k-2$ ist, dann sei $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ zu einem $(k-2)$-chromen Graphen $\Omega$ zusammengezogen; wenn $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ genau $(k-2)$-chrom ist, so sei $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t = \Omega$. In dem dadurch aus $\Gamma$ entstandenen Graphen befinden sich $\Gamma_1'$ und $\Gamma_2'$ als Teilgraphen, und $t$ und jeder Knotenpunkt von $\Omega$ sind nach Hilfssatz 2 mit mindestens einem Knotenpunkt aus jeder zusammenhängenden Komponente von $\Gamma_1'$ und von $\Gamma_2'$ durch eine Kante verbunden. Es sei jetzt eine beliebige zusammenhängende Komponente von $\Gamma_1'$ zu einem einzigen Knotenpunkt $x$ zusammengezogen, und eine beliebige zusammenhängende Komponente von $\Gamma_2'$ sei zu dem einzigen Knotenpunkt $y$ zusammengezogen. $x$ und $y$ sind mit $t$ und mit jedem Knotenpunkt von $\Omega$ durch Kanten verbunden. Endlich sei $(x, t)$ zu einem einzigen Knotenpunkt zusammengezogen. Der dadurch entstandene Graph hat als chromatische Zahl mindestens $k$.

2. Wenn $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ keinen vollständigen $(k-2)$-Graphen enthält, so sei ein geeigneter Teilgraph von $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ zu einem mit $\Lambda$ bezeichneten vollständigen $(k-2)$-Graphen reduziert; wenn ein vollständiger $(k-2)$-Graph in $\Gamma_1 \frown \Gamma_2 - t$ vorhanden ist, so sei er mit $\Lambda$ bezeichnet. Der Graph sei jetzt genau wie im ersten Teil dieses Beweises zusammengezogen. Der so entstandene Graph enthält einen vollständigen $k$-Graphen als Teilgraph.

Aus Satz 7 ergibt sich, daß, *wenn in einem Graphen die Knotenpunkte eines Kreises zusammen mit noch einem oder mehreren Knotenpunkten eine minimale trennende Knotenpunktmenge bilden, sich der Graph zu einem vollständigen 5-Graphen reduzieren läßt.*

Über die chromatische Zahl von $\Gamma$ wird in Satz 7 nichts vorausgesetzt.

## 7. Anwendung auf ebene Graphen.

*Definition.* Ein $k$-chromer Graph $\Gamma$, $k \geqq 2$, heißt *Punkt-kritisch*, wenn für jeden Knotenpunkt $x$ von $\Gamma$ der Graph $\Gamma - x$ $(k-1)$-färbbar ist.

Offenbar ist ein Punkt-kritischer Graph zusammenhängend und hat keinen trennenden Knotenpunkt. Jeder irreduzible $k$-chrome Graph ist Punkt-kritisch.

**Satz 8.** *Jeder zusammenhängende ebene Graph wird durch das Entfernen einer beliebigen minimalen trennenden Knotenpunktmenge von mehr als zwei Knotenpunkten in genau zwei zusammenhängende Komponenten zerteilt. Jeder ebene Punkt-kritische $k$-chrome Graph $(k \geqq 3)$ wird durch das Entfernen einer beliebigen minimalen trennenden Knotenpunktmenge in genau zwei zusammenhängende Komponenten zerteilt.*

*Beweis.* Es sei $\Gamma$ ein zusammenhängender ebener Graph, $T$ eine minimale trennende Knotenpunktmenge von $\Gamma$ mit mehr als zwei Knotenpunkten und $t_1, t_2, t_3$ irgend drei verschiedene Knotenpunkte von $T$. Es sei jede zusammenhängende Komponente von $\Gamma - T$ zu einem einzigen Knotenpunkt zusammengezogen und der auf diese Weise aus $\Gamma$ entstehende ebene Graph sei mit $\tilde{\Gamma}$ bezeichnet. Hätte $\Gamma - T$ mehr als zwei zusammenhängende Komponenten, so gäbe es in $\tilde{\Gamma}$ mindestens drei, von $t_1, t_2, t_3$ verschiedene Knotenpunkte, welche alle mit $t_1, t_2, t_3$ durch Kanten verbunden sind; folglich wäre $\tilde{\Gamma}$ offenbar nicht eben. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

Um auch die zweite Behauptung des Satzes zu beweisen, genügt es, zu zeigen, daß ein Punkt-kritischer $k$-chromer Graph, $k \geqq 3$, durch eine minimale trennende Knotenpunktmenge von zwei Knotenpunkten in genau zwei zusammenhängende Komponenten zerteilt wird. Es sei $\Gamma$ ein Punkt-kritischer $k$-chromer Graph mit einer aus den zwei Knotenpunkten $t_1, t_2$ bestehenden minimalen trennenden Knotenpunktmenge $T$. $\Gamma_1$ und $\Gamma_2$ sind beide $(k-1)$-färbbar, weil $\Gamma$ Punkt-kritisch ist. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß die Bezeichnungen so gewählt werden können, daß in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_1$ die Farbe von $t_1$ gleich der Farbe von $t_2$ und in jeder $(k-1)$-Färbung von $\Gamma_2$ die Farbe von $t_1$ ungleich der Farbe von $t_2$ ist. Daraus folgt sogleich, daß $\Gamma_1'$ und ebenfalls $\Gamma_2'$ zusammenhängend ist. Damit ist Satz 8 bewiesen.

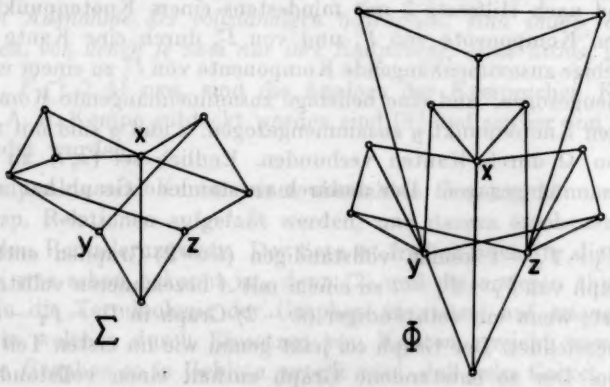


Abbildung 2.

Für nicht ebene Graphen ist die erste Behauptung des Satzes 8 freilich nicht immer gültig. Auch die zweite Behauptung des Satzes ist für nicht ebene Punkt-kritische $k$-chrome Graphen mit $k \geqq 4$ nicht immer gültig (die Punkt-kritischen 3-chromen Graphen kommen hier nicht in Frage, da jeder solche Graph ein Kreis ist); schon ein 4-chromer

Punkt-kritischer Graph kann durch eine minimale trennende Knotenpunktmenge von nur drei Knotenpunkten in bis zu fünf zusammenhängende Komponenten zerlegt werden. Zwei Beispiele sind in Abbildung 2 gezeichnet.

Die in Abbildung 2 gezeichneten Graphen $\Sigma$ und $\Phi$ sind beide 4-chrom und keine zwei der Knotenpunkte $x, y, z$ bilden eine trennende Knotenpunktmenge. Wird irgendeine beliebige Kante aus $\Sigma$ oder aus $\Phi$ entfernt, dann ist der jeweils verbleibende Graph 3-färbbar. $\Sigma - (x + y + z)$ besteht aus drei, $\Phi - (x + y + z)$ aus fünf zusammenhängenden Komponenten. Der Leser kann sich von der Richtigkeit dieser Behauptung unschwer überzeugen.

Zum Abschluß eine Schlußfolgerung aus dem Reduzierungssatz bezüglich der irreduziblen 5-chromen Graphen in der Ebene:

Aus dem Reduzierungssatz folgt, daß jeder irreduzible 5-chrome Graph mit mindestens 6 Knotenpunkten mindestens 5-fach zusammenhängend ist, und daraus folgt wiederum, daß, wenn ein beliebiger Knotenpunkt mitsamt der mit ihm inzidierenden Kanten aus einem irreduziblen 5-chromen Graphen entfernt wird, der zurückbleibende Graph mindestens 4-fach zusammenhängend ist. W. T. Tutte hat bewiesen, daß, wenn ein endlicher ebener Graph 4-fach oder 5-fach zusammenhängend ist, der Graph einen Kreis enthält, auf welchem alle seine Knotenpunkte liegen [9]. Graphen, welche einen solchen Kreis haben, nennt man *Hamiltonisch.* Dadurch ergibt sich aus dem Reduzierungssatz der folgende

**Satz 9.** *Jeder ebene 5-chrome irreduzible Graph ist* ***Hamiltonisch.*** *Entfernt man aus ihm irgendeinen beliebigen Knotenpunkt und alle mit diesem Knotenpunkt inzidierenden Kanten, dann ist der zurückbleibende Graph ebenfalls* ***Hamiltonisch.***

Es wird in Satz 9 nicht vorausgesetzt, daß der Graph die Ebene trianguliert.

## Literatur.


[1] *N. G. de Bruijn-P. Erdös*, A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Proc K. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam, ser. A, **54** (1951), 371.

[2] *P. J. Heawood*, Map colour theorems, Quart. J. Math., **24** (1890), 332.

[3] *G. D. Birkhoff*, The reducibility of maps, Amer. J. Math. **35** (1913), 116.

[4] *D. Hilbert-S. Cohn-Vossen*, Anschauliche Geometrie (Berlin, 1932), 295.

[5] *K. F. Wagner*, Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe, Math. Ann. **114** (1937), 570.

[6] *G. A. Dirac*, A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs, Journal London Math. Soc. **27** (1952), 87.

[7] *G. Ringel*, Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nicht-orientierbaren Flächen, Math. Ann. **127** (1954), 181. Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$, Crelle **193** (1954), 11.

[8] *A. B. Kempe*, On the geographical problem of the four colours, Amer. J. Math., **2** (1879), 193.

[9] *W. T. Tutte*, A theorem on planer graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 99.


Eingegangen 12. Oktober 1959.

# On a universal $n$-dimensional set for metric spaces.

**To Wolfgang Krull on his 60th birthday.**

By *Jun-iti Nagata* in Osaka.

It is well known that every $n$-dimensional separable metric space has dimension $\leqq n$ if and only if it can be topologically imbedded in the set $R^n_{2n+1}$ of points in Euclidean $(2n+1)$-cube at most $n$ of whose coordinates are rational[1]). For this reason we call $R^n_{2n+1}$ a universal $n$-dimensional set for separable metric spaces. On the other hand C. H. Dowker [2] once defined a generalized Hilbert space and showed that every metric space can be topologically imbedded in a generalized Hilbert space.

Although dimension theory for non-separable metric spaces has been greatly developed[2]), it still seems that no universal $n$-dimensional set for non-separable metric spaces is known. Thus it will be of some interest to find a universal $n$-dimensional set for non-separable metric spaces in a generalized Hilbert space. This paper is devoted to this purpose.

To begin with, I notice that every space in this note is metric and dimension means Lebesgue dimension or strong inductive dimension[3]), and besides every covering or collection consists of open sets unless the converse is explicitly mentioned.

**Definition.** Let $f$ be a real valued function on a set $\Omega$ whose values are zero at every point except a finite number of points; then we call $f$ a finite function.

**Definition.** Let $f$ be a finite function on $\Omega$. We denote by *ord* $f$ the number of points $\alpha$ such that $f(\alpha) \neq 0$.

**Definition.** We denote by $F(\Omega)$ the functional space of all finite functions on $\Omega$ with the distance $d(f, g) = \sqrt{\sum_{\alpha \in \Omega} (f(\alpha) - g(\alpha))^2}$ between two points $f$ and $g$.

We define a metric space $H'(\Omega)$ in terms of coordinates. The points $f$ are sequences $(f_1, f_2, \ldots)$ as in Hilbert space, but each coordinate $f_i$ is a finite function on $\Omega$ instead of a number. From now on we mean by $f_i$, $g_i$ etc. coordinates of $f$, $g$ etc. respectively.

**Definition.** We put

$$H'(\Omega) = \{(f_1, f_2, \ldots) \mid f_i \in F(\Omega),\ \sum_{i,\alpha} (f_i(\alpha))^2 < +\infty\}$$

and define the distance $\varrho(f, g)$ between two points $f = (f_1, f_2, \ldots)$ and $g = (g_1, g_2, \ldots)$ of $H'(\Omega)$ by $\varrho(f, g) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (d(f_i, g_i))^2}$.

$H'(\Omega)$ is, in reality, a subspace of Dowker's generalized Hilbert space $H(\Omega)$. It is also a subspace of a Hilbert space if $\Omega$ is a countable set.

---

[1]) See [1].

[2]) See [3], [4].

[3]) The equivalence of these dimensions was proved in [3], [4].

**Definition.** We call the subspace

$$F'(\Omega) = \{f = (f_1, f_2, \ldots) \mid 0 \leqq f_i \leqq \frac{1}{i},\ \text{ord}\, f_i \geqq \text{ord}\, f_{i+1},\ i = 1, 2, \ldots\}$$

of $H'(\Omega)$ the fundamental cube of $H'(\Omega)$.

**Theorem 1.** *A metric space has dimension $\leqq n$ if and only if it can be topologically imbedded in*

$F_n(\Omega) = \{f \mid f \in F'(\Omega)$, *at most $n$ of $f_i(\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha \in \Omega$ are rational and nonvanishing*$\}$ *for some $\Omega$.*

*Proof.* 1. We shall first show $\dim F_n(\Omega) \leqq n$. We consider all monotone decreasing sequences $(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ of non-negative integers, where $\mu_i \geqq \mu_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. We define the order between two of them as follows: $\mu < \nu$ if and only if

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots),\ \nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots),\ \mu_1 = \nu_1, \ldots, \mu_k = \nu_k,\ \mu_{k+1} < \nu_{k+1}$$

for some non-negative integer $k$. Thus we have a well-ordered countable set $\{\mu(\tau) \mid \tau < \tau_0\}$ of sequences, where $\tau$, $\tau_0$ denote ordinal numbers.

If we put

$$G_\tau = \{f \mid f \in F_n,\ (\text{ord}\, f_1, \text{ord}\, f_2, \ldots) = \mu(\tau)\}$$

$$K_\tau = \bigcup_{\tau' \leqq \tau} G_{\tau'},\ \tau < \tau_0$$

then

$$F_n(\Omega) = \bigcup_{\tau < \tau_0} K_\tau.$$

The fact that $K_\tau$ is closed in $F_n(\Omega)$ is shown as follows. Let

$$f = (f_1, f_2, \ldots) \in F_n(\Omega) - K_\tau,$$

then

$$(\text{ord}\, f_1, \text{ord}\, f_2, \ldots) = \mu(\tau') > \mu(\tau) = (\mu_1, \mu_2, \ldots),$$

which proves the existence of a number $i$ satisfying $\text{ord}\, f_i > \mu_i$, $\text{ord}\, f_j = \mu_j$, $j = 1, \ldots, i-1$. Now we take all non-vanishing $f_j(\alpha)$ in the range $j \leqq i$, $\alpha \in \Omega$, and denote them by $f_{j(k)}(\alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$. If $g \in K_\tau$, then $\text{ord}\, g_j < \text{ord}\, f_j$ for some $j \leqq i$, and this implies $g_{j(k)}(\alpha_k) = 0$ for some $k \leqq k_0$. Hence it is obvious that neighborhood $U(f) = \{g \mid g_{j(k)}(\alpha_k) > 0,\ k = 1, \ldots, k_0\}$ of $f$ contains no point of $K_\tau$, i. e. $K_\tau$ is closed. Hence if $\dim K_\tau \leqq n$ is proved for every $\tau < \tau_0$, then $\dim F_n(\Omega) \leqq n$ directly follows from the generalized sum-theorem [4]).

2. Let $K(1) = \{f_1 \mid f \in K_\tau\}$; the topology of this set is defined by the distance $d_1(f_1, g_1) = \sqrt{(d(f_1, g_1))^2}$,

$$K(1, j) = \{f_1 \mid f \in K_\tau,\ \text{ord}\, f_1 = j\},\ j = 0, 1, \ldots, \mu_1,$$

where $\mu_1$ means the first term of $\mu(\tau)$,

$$K(1, j, k) = \{f_1 \mid f_1 \in K(1, j),\ \text{just } k \text{ of } f_1(\alpha),\ \alpha \in \Omega \text{ are rational and non-vanishing}\},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

Then

$$K(1, j) = \bigcup_{k=0}^{n} K(1, j, k), \tag{1}$$

$$K(1) = \bigcup_{j=0}^{\mu_1} K(1, j). \tag{2}$$

---

[4]) loc. cit.

Now let us show dim $K(1, j, k) \leqq 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. We define

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l)$$
$$= \{f_1 \mid f_1(\alpha_i) = a_i,\ i = 1, \ldots, k;\ f_1(\beta_{i'}),\ i' = 1, \ldots, l \text{ are irrational and accordingly non-vanishing, } f_1(\alpha) = 0 \text{ for any other element } \alpha \text{ of } \Omega \text{ than } \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l\}$$

for $\alpha_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, k$, $\beta_{i'} \in \Omega$, $i' = 1, \ldots, l$ with $k + l = j$ and non-vanishing rational numbers $a_1, \ldots, a_k$. Each $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l)$ is 0-dimensional and closed in $K(1, j, k)$. Since the 0-dimensionality is obvious, we shall show only the closeness. Let

$$f_1 \in K(1, j, k) - L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l),$$

then there exists either $\alpha_i$ with $f_1(\alpha_i) \neq a_i$ or $\alpha$ with $f_1(\alpha) \neq 0$, $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$. In either case we have a neighborhood of $f_1$ not intersecting $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l)$.

Furthermore, $\{L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l) \mid \alpha_i, a_i, \beta_{i'}\}$ is a locally countable covering of $K(1, j, k)$. For if $f$ is a point of $K(1, j, k)$ such that $f_1(\gamma_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, j$, $f(\gamma) = 0$ for $\gamma \neq \gamma_i$, $i = 1, \ldots, j$, then $U(f_1) = \{g_1 \mid g_1 \in K(1, j, k), g_1(\gamma_i) > 0, i = 1, \ldots, j\}$ is a neighborhood of $f_1$. It is easily seen that $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l$ and $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ must be identical for every $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l)$ intersecting $U(f_1)$. Hence $U(f_1)$ intersects only countably many of $L(\alpha_1, \ldots, \alpha_k;\ a_1, \ldots, a_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_l)$.

Thus we can conclude the 0-dimensionality of $K(1, j, k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ by the generalized sum-theorem [5]). Therefore we get dim $K(1, j) \leqq n$ from (1) combining with the generalized decomposition theorem [6]).

Now we notice that $\bigcup_{j=0}^{k} K(1, j)$, $k = 0, 1, \ldots, \mu_1$ is closed in $K(1)$. For $f_1 \in K(1) - \bigcup_{j=0}^{k} K(1, j)$ implies $f_1(\alpha_i) > 0$ for some $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, j + 1$, and hence

$$U(f_1) = \{g_1 \mid g_1(\alpha_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, j + 1\}$$

is a neighborhood not containing any point of $\bigcup_{j=0}^{k} K(1, j)$. Hence we get dim $K(1) \leqq n$ by (2) combining with dim $K(1, j) \leqq n$.

We can analogously define

$$K(p) = \{(f_1, \ldots, f_p) \mid f \in K_\tau\}$$

with a topology defined by the distance

$$d_p((f_1, \ldots, f_p),\ (g_1, \ldots, g_p)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} (d(f_i, g_i))^2},$$

further

$$K(p, j) = \{(f_1, \ldots, f_p) \mid f \in K_\tau, \text{ ord } f_1 + \text{ord } f_2 + \cdots + \text{ord } f_p = j\},\ j = 0, 1, \ldots p\mu_1,$$
$$K(p, j, k) = \{(f_1, \ldots, f_p) \mid (f_1, \ldots, f_p) \in K(p, j),\ \text{just } k \text{ of } f_1(\alpha), \ldots, f_p(\alpha),\ \alpha \in \Omega \text{ are rational and non-vanishing}\},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

We can show dim $K(p) \leqq n$. Since the proof is quite similar with that for dim $K(1) \leqq n$, it is omitted.

3. Now there exists, because of dim $K(1) \leqq n$, an open covering $\mathfrak{U}_1$ of $K(1)$ such that mesh $\mathfrak{U}_1 = \sup\{\text{diameter } U \mid U \in \mathfrak{U}_1\} \leqq 1$, order $\mathfrak{U}_1 \leqq n + 1$. Let $\mathfrak{U}_1 = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_1\}$, then $\mathfrak{V}_1 = \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_1\}$, where $V_\gamma = \{(f_1, f_2, \ldots) \mid f_1 \in U_\gamma\} \cap K_\tau$, is an open covering of $K_\tau$.

---

[5]) See [3], [4].

[6]) See [3], [4].

Assume that $\mathfrak{U}_p = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_p\}$ and $\mathfrak{V}_p = \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_p\}$ have been already defined so that $\mathfrak{U}_p$ is an open covering of $K(p)$ with mesh $\mathfrak{U}_p \leqq \frac{1}{p}$, order $\mathfrak{U}_p \leqq n+1$ and so that $V_\gamma = \{(f_1, f_2, \ldots) \mid (f_1, \ldots, f_p) \in U_\gamma\} \cap K_\tau$, $\mathfrak{V}_p^\Delta < \mathfrak{V}_{p-1}$ in $K_\tau$, where $\mathfrak{V}_p^\Delta$ signifies the covering $\{S(x, \mathfrak{V}_p) \mid x \in K_\tau\}$ for $S(x, \mathfrak{V}_p) = \bigcup\{V \mid x \in V \in \mathfrak{V}_p\}$. Then putting

$$W_\gamma = \{(f_1, \ldots, f_{p+1}) \mid (f_1, f_2, \ldots) \in V_\gamma\},$$

we get a covering $\mathfrak{W}_p = \{W_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_p\}$ of $K(p+1)$. Since $\dim K(p+1) \leqq n$, there exists a covering $\mathfrak{U}_{p+1} = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_{p+1}\}$ of $K(p+1)$ with the properties $\mathfrak{U}_{p+1}^\Delta < \mathfrak{W}_p$, order $\mathfrak{U}_{p+1} \leqq n+1$, mesh $\mathfrak{U}_{p+1} \leqq \frac{1}{p+1}$. If we define $\mathfrak{V}_{p+1} = \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_{p+1}\}$ with

$$V_\gamma = \{(f_1, f_2, \ldots) \mid (f_1, \ldots, f_{p+1}) \in U_\gamma\} \cap K_\tau,$$

$\mathfrak{V}_{p+1}$ is a covering of $K_\tau$ satisfying order $\mathfrak{V}_{p+1} \leqq n+1$, $\mathfrak{V}_{p+1}^\Delta < \mathfrak{V}_p$,

$$\text{mesh } \mathfrak{V}_{p+1} \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{p+1}\right)^2 + \mu_1\left(\left(\frac{1}{p+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{p+3}\right)^2 + \cdots\right)}.$$

Thus we have a sequence $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots$ of coverings of $K_\tau$ such that order $\mathfrak{V}_p \leqq n+1$, $\mathfrak{V}_{p+1}^\Delta < \mathfrak{V}_p$, $\lim_{p\to\infty} \text{mesh } \mathfrak{V}_p = 0$. Hence we can conclude $\dim K_\tau \leqq n$ by one of our previous theorems [7]), and hence $\dim F_n(\Omega) \leqq n$.

4. Conversely, we can topologically imbed every metric space $R$ with $\dim R \leqq n$ in $F_n(\Omega)$. First we can define disjoint collections [8]) $\mathfrak{U}_{k,i}$, $i = 1, \ldots, n+1$; $k = 1, 2, \ldots$ such that $\bigcup\{\mathfrak{U}_{k,i} \mid i = 1, \ldots, n+1,\ k = 1, 2, \ldots\}$ is an open basis of $R$ and $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{U}_{k,i}$ is locally finite for every $k$ and such that $\mathfrak{U}_{k+1,i} < \mathfrak{U}_{k,i}$.

For, let $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = R$, $\dim A_i \leqq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$ and let $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ be a locally finite uniform basis. Putting $\mathfrak{S}_1 = \{S_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_1\}$, we have, because of 0-dimensionality of $A_i$, a covering $\{V_{\gamma,i} \mid \gamma \in \Gamma_1\}$ of open closed sets $V_{\gamma,i}$ of $A_i$ satisfying $V_{\gamma,i} < S_\gamma \cap A_i$, $V_{\gamma,i} \cap V_{\gamma',i} = \emptyset$ for $\gamma \neq \gamma'$. We can clearly choose $\varepsilon(x) > 0$ for every point $x \in V_{\gamma,i}$ so that $S_{\varepsilon(x)}(x) \cap A_i < V_{\gamma,i}$, $S_{\varepsilon(x)}(x) < S_\gamma$, where $S_{\varepsilon(x)}(x)$ denotes the set $\{y \mid \varrho(x, y) < \varepsilon(x)\}$. Then $\mathfrak{U}_{1,i} = \{U_{\gamma,i} \mid \gamma \in \Gamma_1\}$ for $U_{\gamma,i} = \bigcup\{S_{\varepsilon(x)/2}(x) \mid x \in V_{\gamma,i}\}$ is a disjoint collection of $R$ and covers $A_i$. Now $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{U}_{1,i}$ is a locally finite refinement of $\mathfrak{S}_1$ because of the local finiteness of $\mathfrak{S}_1$. We can similarly define disjoint collections $\{W_{\gamma,i} \mid \gamma \in \Gamma_2\} = \mathfrak{W}_{2,i}$ such that $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{W}_{2,i}$ is a locally finite refinement of $\mathfrak{S}_2$ and $\mathfrak{W}_{2,i}$ covers $A_i$. It is clear that $\mathfrak{U}_{2,i} = \{U_{\gamma,i} \cap W_{\delta,i} \mid \gamma \in \Gamma_1,\ \delta \in \Gamma_2\}$ satisfies $\mathfrak{U}_{2,i} < \mathfrak{U}_{1,i}$ besides the properties of $\mathfrak{W}_{2,i}$. Repeating this process, we have required sequences $\mathfrak{U}_{1,i} > \mathfrak{U}_{2,i} > \cdots$, $i = 1, \ldots, n+1$.

5. Putting $\mathfrak{U}_{k,i} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Omega_{k,i}\}$, we can define a closed collection $\mathfrak{F}_{k,i} = \{F_\alpha \mid \alpha \in \Omega_{k,i}\}$ such that $F_\alpha < U_\alpha$ and such that $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{F}_{k,i}$ covers $R$. Put $U_{k,i} = \bigcup\{U \mid U \in \mathfrak{U}_{k,i}\}$, $F_{k,i} = \bigcup\{F \mid F \in \mathfrak{F}_{k,i}\}$, then we define open sets $U_{k,i}^r$ for every rational number $r$ with $0 \leqq r < \frac{1}{k\sqrt{2}}$, such that

(1) $F_{k,i} < U_{k,i}^r < \bar{U}_{k,i}^r < U_{k,i}^{r'} < \bar{U}_{k,i}^{r'} < U_{k,i}^0 = U_{k,i}$ for $r > r'$,

(2) $\bar{U}_{k,i}^r = \bigcup\{U_{k,i}^{r'} \mid r' < r\}$, $U_{k,i}^r = \bigcap\{\bar{U}_{k,i}^{r'} \mid r' > r\}$,

[7]) [5] Theorem 2. Also see [6]. Here we can also use the theorem in [7] instead of ours.

[8]) A collection $\mathfrak{U}$ is called disjoint if any two sets of $\mathfrak{U}$ are disjoint.

(3) order $\{B(U^r_{k,i}) \mid i = 1, \ldots, n+1;\ k = 1, 2, \ldots;\ 0 < r < \frac{1}{k\sqrt{2}},\ r \text{ rational}\} \leqq n$
where $B(U)$ means the boundary of $U$.

The way to define $U^r_{k,i}$ is similar to the one in the proof of Lemma 3 in [8].

First we number all rational numbers with $0 \leqq r < \frac{1}{k\sqrt{2}}$ for a fixed $k$ so that

$$0 = r_0 < r_1,\ r_0 < r_2 < r_1 < r_3,\ r_0 < r_4 < r_2 < r_5 < r_1 < r_6 < r_3 < r_7, \ldots.$$

Then we put

$$N_1 = \{r_0, r_1\},\ N_2 = \{r_2, r_3\},\ N_3 = \{r_4, r_5, r_6, r_7\}, \ldots$$

We shall define $U^r_{k,i}$ satisfying (1), (3) and

(2′) if $r_a$ and $r_c$ are consecutive numbers in $\bigcup_{l=1}^{s-1} N_l$ and if $r_a < r_b < r_c$ for $r_b \in N_s$, then

$$U_{r_b} \subset S_{1/s}(\bar{U}_{r_c}) \text{ if } s \text{ is odd,}$$
$$(\bar{U}_{r_b})^c \subset S_{1/s}(U^c_{r_a}) \text{ if } s \text{ is even,}$$

where we denote, for brevity, $U^{r_a}_{k,i}$ by $U_{r_a}$ for fixed $k, i$, and besides

$$S_{1/s}(U) = \left\{x \mid \text{distance } (x, U) < \frac{1}{s}\right\}.$$

Then it will be easily seen that $\{U^r_{k,i}\}$ satisfies (2) besides (1) and (3). In fact, let $U_{r_a}$ satisfy (2′). *If* $x \notin \bar{U}_{r_c}$ for $r_c \in N_{s-1}$, then we take an odd $t$ with $t \geqq \max\left(s, \frac{1}{d(x, \bar{U}_{r_a})}\right)$ and $r_b \in N_t$ which is next before $r_c$ in $\bigcup_{l=1}^{t} N_l$. It follows from (2′) that $U_{r_b} \subset S_{1/t}(\bar{U}_{r_c})$; hence $x \notin U_{r_b}$. Let $x \in U_{r_a}$ for $r_a \in N_{s-1}$ then we take an even $t$ with

$$t \geqq \max\left(s, \frac{1}{d(x, U^c_{r_a})}\right)$$

and $r_b \in N_t$ which is next after $r_a$ in $\bigcup_{l=1}^{t} N_l$. It follows from (2′) that $x \in [S_{1/t}(U^c_{r_a})]^c \subset \bar{U}_{r_b}$ proving (2).

Now we number all pairs $(k, i)$, $i = 1, \ldots, n+1$, $k = 1, 2, \ldots$ and put $U^{r_a}_{k,i} = U_{m,a}$, $U_{k,i} = U^0_{k,i} = U_{m,0}$ for the $m$-th pair $(k, i)$. Let us define, by induction all $U_{m,a}$ but $U_{m,0}$ in such an order that $U_{1,1}, U_{1,2}, U_{2,1}, U_{1,3}, U_{2,2}, U_{3,1}, \ldots$. To begin with we can define an open set $U_{1,1}$ such that

$$F_{k,i} \subset U_{1,1} \subset \bar{U}_{1,1} \subset U^0_{k,i} = U_{1,0}$$

for the first pair $(k, i)$,

$$B(U_{1,1}) \cap A_1 = \emptyset,$$

where we mean by $A_t$ the zero-dimensional subset of section 4. The method is just the same as that in the proof of Lemma 1 in [8], and is omitted here.

Assume that we have defined all $U_{m,a}$ before $U_{p,b}$ and that $r_b \in N_s$, where $N_s$ and $r_b$ denote, of course, those for the $p$-th pair $(k, i)$. Then we define $U_{p,b}$ as follows: We take $r_a, r_c \in \bigcup_{t=1}^{s-1} N_t$ such that $r_a > r_b > r_c$ and such that $r_a$ and $r_c$ are consecutive in $\bigcup_{t=1}^{s-1} N_t$. We can define open $U_{p,b}$ such that

$$\bar{U}_{p,a} \subset U_{p,b} \subset \bar{U}_{p,b} \subset U_{p,c} \cap S_{1/s}(\bar{U}_{p,a}) \quad \text{if } s \text{ is odd,}$$
$$[S_{1/s}(\bar{U}^c_{p,c})]^c \cup U_{p,a} \subset \bar{U}_{p,b} \subset U_{p,b} \subset U_{p,c} \quad \text{if } s \text{ is even,}$$

and such that

$$\text{order}_x\, B(\mathfrak{B}_{p,b}) \leqq j-1 \text{ for each point } x \in A_j,\ j = 1, \ldots, n+1,$$

where $\mathfrak{B}_{p,b} = \{U_{1,1}, U_{1,2}, U_{2,1}, \ldots, U_{p,b}\}$, $B(\mathfrak{B}_{p,b}) = \{B(U) \mid U \in \mathfrak{B}_{p,b}\}$, and $\text{order}_x\, B(\mathfrak{B})$ for a collection $\mathfrak{B}$ means the number of members of $\mathfrak{B}$ which contain $x$. The method of defining $U_{p,b}$ is quite parallel to that of $V_\alpha$ in the proof of Lemma 1, [8], and hence it is omitted here. Thus we get $U^r_{k,i}$ satisfying (1), (2) and (3).

Now we set $\mathfrak{U}_{k,i} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Omega_{k,i}\}$ and for $\alpha \in \Omega_{k,i}$ we define functions

$$\varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \sup\{r \mid x \in U^r_{k,i}\} & \text{if } x \in U_\alpha, \\ 0 & \text{if } x \notin U_\alpha. \end{cases}$$

We can define a mapping $\varphi(x)$ of $R$ into $F_n(\Omega)$ for $\Omega = \bigcup_{k,i} \Omega_{k,i}$ as follows:

$$\varphi(x) = (f_1, f_2, \ldots),\ x \in R,$$

$$f_k(\alpha) = \varphi_\alpha(x) \text{ for } \alpha \in \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_{k,i},$$

$$f_k(\alpha) = 0 \text{ for } \alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_{k,i}.$$

It is easily to be seen that $\varphi$ is a homeomorphic mapping between $R$ and a subset of $F_n(\Omega)$. Since it is obvious that $\varphi_\alpha(U^c_\alpha) = 0$, $\varphi_\alpha(F_\alpha) = \dfrac{1}{k\sqrt{2}}$ if $\alpha \in \Omega_{k,i}$, $\varphi$ is one-to-one and $\varphi^{-1}$ is continuous. Since $\mathfrak{U}_{k+1,i} < \mathfrak{U}_{k,i}$, ord $f_{i+1} \leqq$ ord $f_i$ for $\varphi(x) = (f_1, f_2, \ldots)$. Since $\varphi_\alpha(x)$ is continuous, and $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{U}_{k,i}$ is locally finite, $\varphi(x)$ is clearly continuous.

To show that the value of $\varphi_\alpha(x)$ is irrational or zero at every point

$$x \notin \bigcup \left\{ B(U^r_{k,i}) \mid 0 < r < \frac{1}{k\sqrt{2}} \right\}$$

for $(k, i)$ with $\alpha \in \Omega_{k,i}$, we take any point $x \notin \bigcup_r B(U^r_{k,i})$ and any rational number $r$ with $0 < r < \dfrac{1}{k\sqrt{2}}$. If $x \in U^r_{k,i}$, then there exist $r'$ with $r' > r$ and $x \in U^{r'}_{k,i}$ by (2); hence $\varphi_\alpha(x) \geqq r' > r$. If $x \notin \bar{U}^r_{k,i}$, then there exist $r'$ with $r' < r$ and $x \notin U^{r'}_{k,i}$; hence $\varphi_\alpha(x) \leqq r' < r$. Therefore $\varphi_\alpha(x) \neq r$ in either case. Hence from (3) at most $n$ of $\varphi_\alpha(x)$, $\alpha \in \Omega_{k,i}$ are non-vanishing and rational. Thus we can prove that $\varphi(x)$ is a homeomorphic mapping between $R$ and a subset of $F_n(\Omega)$. Therefore the proof of this theorem is complete.

Reviewing the proof of the only-if-part of this theorem, we remember that order $\bigcup_{i=1}^{n+1} \mathfrak{U}_{k,i} \leqq n+1$; so we can claim the following proposition:

**Corollary.** *A metric space has dimension $\leqq n$ if and only if it can be topologically imbedded in*

$$F'_n(\Omega) = \{f \mid f \in F_n(\Omega),\ \text{ord } f_i \leqq n+1,\ i = 1, 2, \ldots)\}$$

*for some $\Omega$.*

Finally we can prove the following theorem with an analogous method to the one of the proof of Theorem 1.

**Theorem 2.** *A metric space is strongly countable-dimensional, i. e. it can be represented as a countable number of finite-dimensional closed sets if and only if it can be topologically imbedded in $\bigcup_{n=1}^{\infty} F'_n(\Omega)$ for some $\Omega$.*

## Bibliography.

[1] *G. Nöbeling*, Über eine $n$-dimensionale Universalmenge in $R_{2n+1}$, Math. Ann. **104** (1930), 71—80.
[2] *C. H. Dowker*, An imbedding theorem for paracompact metric spaces, Duke Math. Journ. **14** (1947), 639—645.
[3] *M. Katětov*, On the dimension of non-separable spaces I, Czechoslovak Math. Journ. **2** (77) (1952), 333—368.
[4] *K. Morita*, Normal families and dimension theory for metric spaces, Math. Ann. **128** (1954), 350—362.
]5] *J. Nagata*, Note on dimensicn theory, Proc. Jap. Acad. **32** (1956), 568—573.
[6] *J. Nagata*, Note on dimension theory for metric spaces, Fund. Math. **45** (1958), 143—181.
[7] *C. H. Dowker* and *W. Hurewicz*, Dimension of metric spaces, Fund. Math. **43** (1956), 83—88.
[8] *J. Nagata*, On countable dimensional spaces, Proc. Jap. Acad. **34** (1958), 146—149.

---

Eingegangen 2. November 1959.

# Eine Verallgemeinerung der Cauchyschen Charakteristikentheorie auf Integralmannigfaltigkeiten von Differentialformen beliebigen Grades.

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *Manfred Breuer* in Bonn.

## Einleitung.

Sei $\alpha$ eine Differentialform $r$-ten Grades auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $V^N$. Als Zentrum von $\alpha$ im Punkte $p$, in Zeichen: *Zentr* $\alpha_p$, definieren wir einen Unterraum des Vektorraums aller Tangentiale von $V^N$ in $p$ auf folgende Weise: Das Tangential $X_p$ von $V^N$ in $p$ gehört dann und nur dann zu *Zentr* $\alpha_p$, wenn für alle Tangentiale $X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}$ die Gleichung

$$\alpha_p(X_p, X_p^1, \ldots, X_p^{r-1}) = 0 \tag{1}$$

gilt. Wir sagen, $\alpha$ habe den Rang $M$, wenn für alle $p \in V^N$ der Vektorraum *Zentr* $\alpha_p$ die Dimension $N - M$ hat.

Die Abbildung *Zentr* $\alpha$, die jedem $p \in V^N$ den Vektorraum *Zentr* $\alpha_p$ zuordnet, heiße das *charakteristische Vektorraumfeld* von $\alpha$. Ist *Zentr* $\alpha$ integrabel, so heißt die zugehörige geblätterte Struktur die *charakteristische geblätterte Struktur* von $\alpha$. Die Blätter der charakteristischen geblätterten Struktur von $\alpha$ heißen die *Charakteristiken* von $\alpha$.

Um den Hauptsatz des ersten Teils dieser Arbeit zu formulieren, nehmen wir an, *Zentr* $\alpha$ sei integrabel. Ferner nehmen wir an, der mit der Quotiententopologie versehene Raum $\bar{V}$ der Charakteristiken von $\alpha$ könne so zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\bar{V}^M$ gemacht werden, daß die kanonische Abbildung $\pi: V^N \longrightarrow \bar{V}^M$ differenzierbar wird. $\bar{V}^M$ heiße die *charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit* von $\alpha$. $\pi^*$ bezeichne die der Abbildung $\pi$ in natürlicher Weise zugeordnete Abbildung, die jedem kovarianten Tensorfeld $\bar{\alpha}$ auf $\bar{V}^M$ ein kovariantes Tensorfeld $\pi^*\bar{\alpha}$ auf $V^N$ zuordnet. Der Hauptsatz des ersten Teils dieser Arbeit (Satz 3) gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß auf $\bar{V}^M$ eine der Bedingung

$$\alpha = \pi^*\bar{\alpha} \tag{2}$$

genügende Differentialform $\bar{\alpha}$ existiert. Diese Bedingung lautet: Für alle $p \in V^N$ gilt

$$\textit{Zentr}\ \alpha_p \subseteqq \textit{Zentr}\ (d\alpha)_p. \tag{3}$$

Sie ist stärker als die Integrabilitätsbedingung für *Zentr* $\alpha$ und schwächer als die Geschlossenheitsbedingung $d\alpha = 0$.

Existiert eine der Bedingung (2) genügende Differentialform $\bar{\alpha}$ auf $\bar{V}^M$, so folgt aus den Eigenschaften des Zentrums von $\alpha_p$ rein algebraisch, daß das Zentrum von $\bar{\alpha}_{\pi p}$ aus dem Nulltangential allein besteht. Die Analogie zur Methode der Restklassenbildung der Algebra ist evident. Es ist daher einleuchtend, daß man den Hauptsatz, falls die Voraussetzungen erfüllt sind, überall da anwenden kann, wo es sich darum handelt, Probleme für Differentialformen mit nichtverschwindendem Zentrum auf Probleme für Differentialformen mit verschwindendem Zentrum zurückzuführen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird eine derartige Anwendung auf die Theorie der *Integralmannigfaltigkeiten* von $\alpha$ (i. S. von E. Kähler [6]), insbesondere auf ein verallgemeinertes Cauchysches *Anfangswertproblem* ausführlicher behandelt. Zwischen den Integralmannigfaltigkeiten von $\alpha$ und denen von $\bar{\alpha}$ bestehen einige einfache Beziehungen: Man kann zeigen, daß unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen das Bild einer Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ vermöge $\pi$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\bar{\alpha}$ ist (Satz 9). Ferner ist das Urbild einer Integralmannigfaltigkeit von $\bar{\alpha}$ vermöge $\pi$ stets eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ (Satz 8). — Diese beiden Sätze liefern eine Lösung des sog. Anfangswertproblems: Ist $A$ eine gewissen Transversalitätsbedingungen genügende Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$, die sog. „Anfangsmannigfaltigkeit", so ist die Absättigung $\tilde{A} = \overset{-1}{\pi}(\pi(A))$ wieder eine Integralmannigfaltigkeit, die $A$ enthält. $\tilde{A}$ ist eine globale Lösung des Anfangswertproblems mit der Anfangsmannigfaltigkeit $A$. Anschaulich bedeutet das Absättigen von $A$ vermöge $\pi$ einfach das Anhängen der $A$ schneidenden Charakteristiken von $\alpha$ an $A$. Es handelt sich bei der Konstruktion der Lösungsmannigfaltigkeit $\tilde{A}$ also um dieselbe Konstruktion, die Cauchy zur Lösung des Anfangswertproblems für Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung benutzte. — In einem Schlußparagraphen wird die Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung in diese Theorie eingeordnet.

## § 1. Vorbemerkungen zur Terminologie und Definitionen.

Mit $V^N$ bezeichnen wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $N$. Differenzierbar bedeute stets von der Klasse $C^\infty$. $T_p(V)$ sei der $N$-dimensionale Vektorraum aller Tangentiale (kontravariante Vektoren) von $V^N$ mit dem Fußpunkte $p \in V^N$. $T_p^*(V)$ sei der zu $T_p(V)$ duale Vektorraum aller Differentiale (kovariante Vektoren) von $V^N$. — Mit $T(V)$ bzw. $T^*(V)$ bezeichne ich den Totalraum des Vektorraumbündels aller Tangentiale bzw. Differentiale von $V^N$.

Schnitte von $V^N$ in $T(V)$, d. h. Tangentialfelder oder kontravariante Vektorfelder auf $V^N$, werden mit $X, Y, \ldots$ bezeichnet. Sind $X$, $Y$ zwei differenzierbare Tangentialfelder auf $V^N$, so ist ihr Liesches Klammerprodukt $[X, Y]$ das durch folgende Festsetzung definierte Tangentialfeld: Für alle differenzierbaren Funktionen $f: V^N \longrightarrow \mathbf{R}$[0]) gilt

$$(1, 1) \qquad [X, Y] = X(Yf) - Y(Xf).$$

Ein Vektorraumfeld[1]) $\Gamma$ auf $V^N$ ist eine Abbildung, die jedem $p \in V^N$ einen Unterraum $\Gamma_p$ von $T_p(V)$ zuordnet. Ist $\Gamma$ ein Vektorraumfeld auf $V^N$, so sagen wir, das Tangentialfeld $X$ auf $V^N$ sei ein Schnitt von $V^N$ in $\Gamma$, wenn für alle $p \in V^N$ gilt $X_p \in \Gamma_p$. Wir sagen, $\Gamma$ habe die Dimension $M$, wenn für alle $p \in V^N$ $\operatorname{Dim} \Gamma_p = M$ ist.

[0]) Mit $\mathbf{R}$ bezeichnen wir stets den Körper der reellen Zahlen.

[1]) Bei C. Chevallay [5] wird ein Vektorraumfeld „distribution" genannt.

Die Integrabilitätstheorie der differenzierbaren Vektorraumfelder, d. i. die Theorie der linearen partiellen bzw. totalen Differentialgleichungssysteme, werde als bekannt vorausgesetzt[2]). Das *Integrabilitätskriterium für differenzierbare Vektorraumfelder* lautet:

Das $M$-dimensionale differenzierbare Vektorraumfeld $\Gamma$ ist dann und nur dann integrabel, wenn folgendes gilt: Sind $X, Y$ zwei differenzierbare Schnitte von $V^N$ in $\Gamma$, so ist $[X, Y]$ ebenfalls ein Schnitt von $V^N$ in $\Gamma$.

Ein $r$-fach kovarianter Tensor von $V^N$ im Punkte $p \in V^N$ ist eine $r$-lineare Abbildung von $(T_p(V))^r$ in $\mathbf{R}$. Ein $r$-fach kovariantes Tensorfeld $\alpha$ auf $V^N$ ist eine Abbildung, die jedem $p \in V^N$ einen $r$-fach kovarianten Tensor $\alpha_p$ zuordnet.

Ist $\alpha$ ein $r$-fach kovariantes Tensorfeld auf $V^N$, und ist $(X_1, \ldots, X_r)$ ein $r$-Tupel von Schnitten von $V^N$ in $T(V)$, so ist die Funktion $\alpha(X_1, \ldots, X_r): V^N \longrightarrow \mathbf{R}$ durch folgende Festsetzung definiert: Für alle $p \in V^N$ gilt

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r)_p = \alpha_p(X_{1p}, \ldots, X_{rp}). \tag{1, 2}$$

Das Tensorfeld $\alpha$ heißt differenzierbar, wenn $\alpha(X_1, \ldots, X_r)$ für alle differenzierbaren $r$-Tupel $(X_1, \ldots, X_r)$ differenzierbar ist. Das differenzierbare Tensorfeld $\alpha$ ist schon eindeutig bestimmt, wenn für alle differenzierbaren $r$-Tupel $(X_1, \ldots, X_r)$ die Funktionen der Gestalt $\alpha(X_1, \ldots, X_r)$ bekannt sind. Dies führt zu folgender in dieser Arbeit gelegentlich benutzten bequemen *Methode der Definition eines Tensorfeldes*: Ist $\tilde{\alpha}$ eine Abbildung, die jedem $r$-Tupel $(X_1, \ldots, X_r)$ von differenzierbaren Schnitten von $V^N$ in $T(V)$ eine differenzierbare Funktion $\tilde{\alpha}(X_1, \ldots, X_r)$ von $V^N$ in $\mathbf{R}$ zuordnet, so gibt es dann und nur dann ein differenzierbares $r$-fach kovariantes Tensorfeld $\alpha$ auf $V^N$, das der Bedingung

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r) = \tilde{\alpha}(X_1, \ldots, X_r) \tag{1, 3}$$

für alle $r$-Tupel $(X_1, \ldots, X_r)$ genügt, wenn $\tilde{\alpha}$ multilinear über dem Ring der auf $V^N$ differenzierbaren Funktionen ist.

Eine *Differentialform r-ten Grades* auf $V^N$ ist ein schiefsymmetrisches $r$-fach kovariantes Tensorfeld auf $V^N$. Ist $\alpha$ ein $r$-fach kovariantes Tensorfeld auf $V^N$, $\sigma$ eine Permutation von $\{1, \ldots, r\}$ und $\varepsilon_\sigma$ das Signum von $\sigma$, so ist $\alpha$ dann und nur dann eine Differentialform auf $V^N$, wenn für alle Tangentialfelder $X_1, \ldots, X_r$ auf $V^N$ die Gleichung

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r) = \varepsilon_\sigma \alpha(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma r}) \tag{1, 4}$$

gilt.

Sei $E$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbf{R}$ und $r \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Der Modul $\mathfrak{L}_r(E^r, \mathbf{R})$ aller $r$-linearen Abbildungen von $E^r$ in $\mathbf{R}$ kann in kanonischer Weise isomorph auf den Modul $\mathfrak{L}_{r-1}(E^{r-1}, E^*)$ aller $(r-1)$-linearen Abbildungen von $E^{r-1}$ in das Dual $E^*$ von $E$ abgebildet werden. Dieser Isomorphismus, der mit $\varkappa$ bezeichnet werde, ist wie folgt definiert: Ist $\gamma \in \mathfrak{L}_r(E^r, \mathbf{R})$, und sind $f_1, \ldots, f_{r-1} \in E$, so ist für alle $f_r \in E$

$$(\varkappa\gamma(f_1, \ldots, f_{r-1}))f_r = \gamma(f_1, \ldots, f_r) \tag{1, 5}$$

Das *Zentrum* eines Elementes $\gamma \in \mathfrak{L}_r(E^r, \mathbf{R})$, in Zeichen: *Zentr* $\gamma$, ist wie folgt definiert:

$$\textit{Zentr}\ \gamma = \textit{Annullator}\ (\textit{Bild}\ \varkappa\gamma)^{3)}. \tag{1, 6}$$

Unter dem Rang von $\gamma$ verstehen wir die Dimension des Bildes von $\varkappa\gamma$. Es ist also:

$$\textit{Rang}\ \gamma = \textit{DimBild}\ \varkappa\gamma = \textit{DimE} - \textit{DimZentr}\ \gamma. \tag{1, 7}$$

---

[2]) Für $r = 1$ ist *Zentr* $\gamma$ = *Kern* $\gamma$, für $r = 2$ ist *Zentr* $\gamma$ = *Kern* $\varkappa\gamma$.

[3]) Für den analytischen Fall ist diese Theorie bei C. Chevallay [5] entwickelt. Die Übertragung auf den differenzierbaren Fall macht keine Schwierigkeiten.

Da die Abbildung $\varkappa: \mathfrak{L}_r(E^r, \mathbf{R}) \to \mathfrak{L}_{r-1}(E^{r-1}, E^*)$ für jeden endlichdimensionalen Vektorraum $E$ definiert ist, ist insbesondere auch $\varkappa\alpha_p: T_p(V)^{r-1} \to T_p^*(V)$ definiert, wenn $\alpha_p$ ein $r$-fach kovarianter Tensor von $V^N$ in $p$ ist. — Ist $\alpha$ ein $r$-fach kovariantes Tensorfeld auf $V^N$, und sind $X_1, \ldots, X_{r-1}$ Tangentialfelder auf $V^N$, so ist die Differentialform 1. Grades $\varkappa\alpha(X_1, \ldots, X_{r-1})$ definiert durch:

$$\varkappa\alpha(X_1, \ldots, X_{r-1})_p = \varkappa\alpha_p(X_{1p}, \ldots, X_{r-1p}). \tag{1.8}$$

Es ist also für alle $r$-Tupel $(X_1, \ldots, X_r)$

$$\varkappa\alpha(X_1, \ldots, X_{r-1})\,(X_r) = \alpha(X_1, \ldots, X_r). \tag{1,9}$$

Die Abbildung *Zentr* $\alpha$, die jedem $p$ den Vektorraum *Zentr* $\alpha_p$ zuordnet, ist ein Vektorraumfeld. *Zentr* $\alpha$ heiße das *charakteristische Vektorraumfeld* von $\alpha$. Wir sagen, $\alpha$ habe den Rang $M$, wenn das Vektorraumfeld *Zentr* $\alpha$ $(N - M)$-dimensional ist. Es werde noch bemerkt, daß aus der Differenzierbarkeit von $\alpha$ die Differenzierbarkeit von *Zentr* $\alpha$ folgt.

Im folgenden sei $\varphi: V^N \longrightarrow W^M$ eine differenzierbare Abbildung der Mannigfaltigkeit $V^N$ in die Mannigfaltigkeit $W^M$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_*: T(V) \longrightarrow T(W)\,^{4)} \tag{1,10}$$

in bekannter Weise definiert. $\varphi_{*p}$ sei die Einschränkung von $\varphi_*$ auf $T_p(V)$. Ist $\bar{\alpha}_{\varphi p}$ ein $r$-fach kovarianter Tensor von $W^M$ im Punkte $\varphi p \in W^M$, so ist der $r$-fach kovariante Tensor

$$\varphi_p^* \bar{\alpha}_{\varphi p} = \alpha_p \tag{1,11}$$

von $V^N$ im Punkte $p \in V^N$ durch folgende Festsetzung definiert:

Für alle $X_p^1, \ldots, X_p^r \in T_p(V)$ gilt

$$\alpha_p(X_p^1, \ldots, X_p^r) = \bar{\alpha}_{\varphi p}(\varphi_* X_p^1, \ldots, \varphi_* X_p^r). \tag{1,12}$$

Ist $\bar{\alpha}$ ein $r$-fach kovariantes Tensorfeld auf $W^M$, so ist das $r$-fach kovariante Tensorfeld

$$\varphi^* \bar{\alpha} = \alpha \tag{1,13}$$

definiert durch

$$\alpha_p = \varphi_p^* \bar{\alpha}_{\varphi p}. \tag{1,14}$$

Durch diese Festsetzung wird $\varphi^*$ zu einer Abbildung, die jedem kovarianten Tensorfeld auf $W^M$ ein kovariantes Tensorfeld gleicher Stufe auf $V^N$ zuordnet. Sind $\varphi: V^N \longrightarrow W^M$ und $\psi: W^M \longrightarrow Q^L$ zwei differenzierbare Abbildungen, so gelten die Gleichungen

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \tag{1,15}$$

und

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*. \tag{1,16}$$

Die Gleichung (1, 15) ist bei C. Chevalley [5] bewiesen. Die Gleichung (1, 16) ist eine einfache Folge aus (1, 15) und der Definition von $\varphi^*$.

## § 2. Integrabilitätsbedingung für das charakteristische Vektorraumfeld einer Differentialform.

Ist $\alpha$ eine Differentialform $r$-ten Grades auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $V^N$, so kann man nach dem Differentialformenkalkül von E. Cartan die *äußere Ableitung* $d\alpha$ von $\alpha$ bilden. Die invariante Definition von $d\alpha$ lautet folgendermaßen:

---

[4]) Bei C. Chevallay [5] ist $\varphi_* = d\varphi$ und $\varphi^* = \delta\varphi$ gesetzt.

Sind $X_0, \ldots, X_r$ differenzierbare Tangentialfelder auf $V^N$, so ist

$$(2,1)\quad d\alpha(X_0, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}\Big[\sum_{i=0}^{r}(-1)^i d(\alpha(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_r))\, X_i - \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_r)\Big]^{5)}.$$

Mit Hilfe der in § 1 angegebenen Methode der Definition von Tensorfeldern beweist man leicht, daß $d\alpha$ ein $(r+1)$-fach kovariantes Tensorfeld ist. Ferner ist leicht einzusehen, daß $d\alpha$ schiefsymmetrisch ist. $d\alpha$ ist also eine Differentialform $(r+1)$-ten Grades.

Sei $\varrho \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Dann sagen wir, die Differentialform $r$-ten Grades $\alpha$ habe im Punkte $p \in V^N$ die Eigenschaft $E_{\varrho p}(\alpha)$, wenn folgendes gilt: Sind $X_p^0, \ldots, X_p^r$ Tangentiale im Punkte $p \in V^N$, und liegen die $\varrho$ ersten[6]) von diesen in *Zentr* $\alpha_p$, so ist

$$(d\alpha)_p(X_p^0, \ldots, X_p^r) = 0.$$

Wir sagen, $\alpha$ habe die Eigenschaft $E_\varrho$, in Zeichen: $E_\varrho(\alpha)$, wenn für alle $p \in V^N$ die Eigenschaft $E_{\varrho p}(\alpha)$ gilt. Die Aussage $E_\varrho(\alpha)$ ist äquivalent mit der folgenden: Sind die $\varrho$ ersten von den Tangentialfeldern $X^0, \ldots, X^r$ auf $V^N$ Schnitte von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$, so ist

$$d\alpha(X^0, \ldots, X^r) = 0.$$

Es gelten folgende trivial beweisbaren Implikationen:

$$(2,2)\qquad E_0(\alpha) \Rightarrow E_1(\alpha) \Rightarrow \cdots \Rightarrow E_{r+1}(\alpha).$$

$E_0(\alpha)$ besagt, daß $\alpha$ geschlossen ist (d. h. $E_0(\alpha)$ ist äquivalent mit $d\alpha = 0$).
$E_1(\alpha)$ ist äquivalent mit Zentr $\alpha_p \subseteqq$ Zentr $(d\alpha)_p$ für alle $p$.
$E_\varrho(\alpha)$ ist trivialerweise für $\varrho \geqq 3$ stets erfüllt.

**Satz 1.** *Das charakteristische Vektorraumfeld Zentr $\alpha$ einer Differentialform $\alpha$ $r$-ten Grades $(r \geqq 1)$ von konstantem Range ist dann und nur dann integrabel, wenn $E_2(\alpha)$ gilt.*

*Beweis*: Seien $X, Y$ Schnitte von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$. Dann gilt für alle Schnitte $X_2, \ldots, X_r: V^N \longrightarrow T(V)$ die Gleichung

$$d\alpha(X, Y, X_2, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}\,\alpha([X, Y], X_2, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}(-1)^{r-1}\varkappa\alpha(X_2, \ldots, X_r)([X, Y]).$$

$E_2(\alpha)$ ist also dann und nur dann erfüllt, wenn $[X, Y]$ wieder ein Schnitt von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$ ist.

Aus (2, 2) und Satz 1 folgt das

**Corollar.** *Ist $d\alpha = 0$, so ist Zentr $\alpha$ integrabel.*

Ist das charakteristische Vektorraumfeld von $\alpha$ integrabel, so heißt die zugehörige geblätterte Struktur die *charakteristische geblätterte Struktur* von $\alpha$. Die Blätter der charakteristischen geblätterten Struktur von $\alpha$ werden die *Charakteristiken* von $\alpha$ genannt.

## § 3. Der Hauptsatz über die charakteristische geblätterte Struktur.

Sei $\mathfrak{B}$ eine *differenzierbare geblätterte Struktur* (i. S. von G. Reeb [7]) auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $V^N$. Mit $\pi p$ bezeichnen wir das durch den Punkt $p \in V^N$ gehende Blatt. Die Dimension der Blätter von $\mathfrak{B}$ sei $N - M$. Zwei Punkte $p$ und $q$ von

---

[5]) $\hat{X}_i$ bedeutet, daß $X_i$ ausgelassen wird.

[6]) Fordert man statt dessen, daß die $\varrho$ letzten oder auch nur $\varrho$ von den betreffenden Tangentialen in Zentr $\alpha_p$ liegen, so erhält man wegen der Schiefsymmetrie von $d\alpha$ eine zu $E_{\varrho p}(\alpha)$ äquivalente Aussage.

$V^N$ heißen äquivalent, wenn sie auf demselben Blatt liegen. $\bar{V}$ bezeichne den mit der Quotiententopologie versehenen Raum aller Äquivalenzklassen (Blätter), und $\pi : V \longrightarrow \bar{V}$ sei die kanonische Abbildung. In manchen Fällen ist es möglich, $\bar{V}$ so zu einer differenzierbaren $M$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\bar{V}^M$ zu machen, daß die Abbildung $\pi$ differenzierbar wird. In diesem Falle nennen wir die Differenzierbarkeitsstruktur von $\bar{V}^M$, die durch die Forderung der Differenzierbarkeit von $\pi$ eindeutig bestimmt ist, die *Quotientenmannigfaltigkeit* der geblätterten Struktur $\mathfrak{B}$. — Existiert die Quotientenmannigfaltigkeit $\bar{V}^M$ von $\mathfrak{B}$, so gelten folgende einfachen Hilfssätze:

**Hilfssatz 1.** *Ist $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M\}$ ein Koordinatensystem einer Umgebung von $\bar{p} = \pi p$, so gibt es ein Koordinatensystem $\{x_1, \ldots, x_N\}$ einer Umgebung $U$ von $p$ mit*

$$x_\mu = (\bar{x}_\mu \circ \pi), \quad \mu = 1, \ldots, M. \tag{3, 1}$$

Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge aus der Definition der geblätterten Struktur.

**Hilfssatz 2.** *Die Abbildung $\pi_* : T(V) \longrightarrow T(\bar{V})$ ist eine Surjektion.*

Dieser Hilfssatz wird durch den folgenden mitbewiesen:

**Hilfssatz 3.** *Ist $\bar{X}$ ein Tangentialfeld auf $\bar{V}^M$, so gibt es zu jedem $p \in V^N$ eine Umgebung $U$ von $p$ und ein Tangentialfeld $X$ auf $U$, so daß für alle $q \in U$ gilt*

$$\pi_* X_q = \bar{X}_{\pi q}. \tag{3, 2}$$

*Beweis*: Sei $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M\}$ ein Koordinatensystem einer Umgebung des Punktes $\pi p$ von $\bar{V}^M$, dann gibt es nach Hilfssatz 1 ein Koordinatensystem $\{x_1, \ldots, x_N\}$ einer Umgebung von $p$, so daß dort die Gleichungen (3, 1) gelten. Ist nun $d\bar{x}_\mu(\bar{X}) = \bar{c}_\mu$, $\mu = 1, \ldots, M$, so wählen wir ein Tangentialfeld $X$ in einer Umgebung von $p$ mit $dx_\mu(X) = \bar{c}_\mu \circ \pi$, $\mu = 1, \ldots, M$, $dx_{\mu'}(X) = 0$, $\mu' = M + 1, \ldots, N$. Dann ist $d\bar{x}_{\mu\pi q}(\pi_* X_q) = d(\bar{x}_\mu \circ \pi)_q(X_q) = dx_{\mu q}(X_q) = (\bar{c}_\mu \circ \pi)_q = d\bar{x}_{\mu\pi q}(X_{\pi q})$, $\mu = 1, \ldots, M$. Hieraus folgt (3, 2).

Sei jetzt $\alpha$ eine Differentialform auf $V^N$ vom Grade $r$ und vom Range $M$. Das charakteristische Vektorraumfeld *Zentr* $\alpha$ von $\alpha$ sei integrabel. Im folgenden werde stets vorausgesetzt, daß die Quotientenmannigfaltigkeit $\bar{V}^M$ der charakteristischen geblätterten Struktur von $\alpha$ existiere. $\bar{V}^M$ heiße die *charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit* von $\alpha$. Ist $\pi$ wieder die kanonische Abbildung von $V^N$ auf $\bar{V}^M$, so gilt folgender

**Hilfssatz 4.** *Es ist für alle $p \in V^N$*

$$\textit{Kern}\ \pi_{*p} = \textit{Zentr}\ \alpha_p, \tag{3, 3}$$

*d. h. $\pi_*$ bildet das Tangential $X_p$ dann und nur dann auf das Nulltangential ab, wenn $X_p$ ein Tangential an die durch $p$ gehende Charakteristk ist.*

*Beweis*: Sei $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_M\}$ ein Koordinatensystem einer Umgebung von $\pi p$. Dann ist $\pi_{*p} X_p = 0$ mit $d\bar{x}_\mu(\pi_{*p} X_p) = 0$, $\mu = 1, \ldots, M$ äquivalent, und $X_p \in \textit{Kern}\ \alpha_p$ ist mit $d(\bar{x}_\mu \circ \pi) X_p = 0$, $\mu = 1, \ldots, M$ äquivalent. Aus $d\bar{x}_\mu(\pi_{*p} X_p) = d(\bar{x}_\mu \circ \pi) X_p$, $\mu = 1, \ldots, M$ folgt die Behauptung (3, 3).

**Satz 3.** (*Hauptsatz über die charakteristische geblätterte Struktur einer r-Form $\alpha$.*) *Auf der charakteristischen Quotientenmannigfaltigkeit $\bar{V}^M$ der Differentialform $\alpha$ gibt es dann und nur dann eine Differentialform $\bar{\alpha}$ mit*

$$\alpha = \pi^* \bar{\alpha}, \tag{3, 4}$$

*wenn $E_1(\alpha)$ gilt.*

*Beweis*: $E_1(\alpha)$ ist äquivalent mit $E_{1p}(\alpha)$ für alle $p \in V^N$. Da zu jedem $X_p^0 \in T_p(V)$ ein Tangentialfeld $X$ einer Umgebung von $p$ mit der Eigenschaft existiert, daß aus $\pi q_1 = \pi q_2$ stets $\pi_* X_{q_1} = \pi_* X_{q_2}$ folgt und daß $X_p = X_p^0$ gilt, ist $E_1(\alpha)$ auch äquivalent mit folgender Bedingung:

$\bar{E}_1(\alpha)$: Für alle Umgebungen $U$ aus $V^N$ und für alle Tangentialfelder $X_\varrho$, $\varrho = 0, \ldots, r$ auf $U$, für die aus $\pi q_1 = \pi q_2$ folgt $\pi_* X_{q_1} = \pi_* X_q$, gilt:

Ist $X_r$ ein Schnitt von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$, so ist $d\alpha(X_0, \ldots, X_r) = 0$.

Seien nun $\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r$ Tangentialfelder auf $\bar{V}^M$, und sei $p \in V^N$. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}$ aller Funktionen der Gestalt $\alpha(X_1, \ldots, X_r): U \longrightarrow \mathbf{R}$, wobei $U$ eine Umgebung aus $V^N$ ist, $X_1, \ldots, X_r$ auf $U$ definierte Tangentialfelder sind und für alle $q \in U$ die Gleichungen

$$\pi_* X_{\varrho q} = \bar{X}_{\varrho \pi q}, \quad \varrho = 1, \ldots, r \tag{3, 5}$$

gelten. Nach Hilfssatz 3 gibt es zu jedem $p \in V^N$ eine Umgebung $U$ von $p$ und eine Funktion auf $U$, die zu $\mathfrak{M}$ gehört. Seien nun $\alpha(X_1, \ldots, X_r)$, $\alpha(X_1', \ldots, X_r')$ aus $\mathfrak{M}$, und $U$ bzw. $U'$ ihre Definitionsbereiche. Hat man dann schon bewiesen, daß

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r) - \alpha(X_1', \ldots, X_r') = \alpha(X_1', \ldots, X_\varrho', X_{\varrho+1}, \ldots, X_r) - \alpha(X_1', \ldots, X_r')$$

gilt, so folgt aus der Linearität von $\alpha$ an der $(\varrho + 1)$-ten Stelle, der Schiefsymmetrie von $\alpha$ und der Tatsache, daß $X_{\varrho+1} - X_{\varrho+1}'$ ein Schnitt von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$ ist, die Gleichung

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r) - \alpha(X_1', \ldots, X_r') = \alpha(X_1', \ldots, X_{\varrho+1}', X_{\varrho+2}, \ldots, X_r) - \alpha(X_1', \ldots, X_r').$$

Man erhält also für $\varrho = r$ die Gleichung

$$\alpha(X_1, \ldots, X_r)_{U \cap U'} = \alpha(X_1', \ldots, X_r')_{U \cap U'}. \tag{3, 6}$$

Die Funktionen der Menge $\mathfrak{M}$ definieren daher eine einzige Funktion auf $V^N$, die wir mit $\tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ bezeichnen.

Jetzt ist zu untersuchen, unter welcher Bedingung $\tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ längs den Charakteristiken von $\alpha$ konstant ist. Dies ist wegen des Zusammenhangs der Charakteristiken genau dann der Fall, wenn alle Funktionen aus $\mathfrak{M}$ längs den Charakteristiken lokalkonstant sind. Sei also $\alpha(X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{M}$, und $X_0$ ein Schnitt von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$. Dann ist festzustellen, unter welcher Bedingung $d(\alpha(X_1, \ldots, X_r))\, X_0 = 0$ gilt.

Hierzu beachten wir zunächst folgendes: Sind $Y, Z$ bzw. $\bar{Y}, \bar{Z}$ zwei Tangentialfelder auf $V^N$ bzw. $\bar{V}^M$, und gilt für alle $p \in V^N$

$$\pi_* Y_p = \bar{Y}_{\pi p}, \quad \pi_* Z_p = \bar{Z}_{\pi p},$$

so gilt auch für alle $p$

$$\pi_* [Y, Z]_p = [\bar{Y}, \bar{Z}]_{\pi p}$$

(C. Chevalley [5], Seite 85). Aus dieser Behauptung folgt mit Hilfe von (3, 3), daß $[X_0, X_\varrho]$, $\varrho = 1, \ldots, r$ Schnitte von $V^N$ in *Zentr* $\alpha$ sind. Aus (2, 1) folgt weiter die Gleichung

$$d\alpha(X_0, \ldots, X_r) = \frac{1}{r+1}\, d(\alpha(X_1, \ldots, X_r))\, X_0. \tag{3, 7}$$

Diese Gleichung besagt, daß $\tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ dann und nur dann längs den Charakteristiken von $\alpha$ konstant ist, wenn $\bar{E}_1(\alpha)$ gilt.

Sei nun $\tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ längs den Charakteristiken von $\alpha$ konstant! Dann gibt es eine Funktion $\bar{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)$ auf $\bar{V}^M$, die der Gleichung

$$\tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) = \bar{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) \circ \pi \tag{3, 8}$$

genügt. Es ist leicht, zu zeigen, daß $\bar{\alpha}$ eine Differentialform auf $\bar{V}^M$ ist: Für differenzierbares $\bar{f}$: $\bar{V}^M \longrightarrow \mathbf{R}$ gilt

$$\bar{\alpha}(\bar{f}\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r) \circ \pi = \tilde{\alpha}(\bar{f}\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r) = \alpha((\bar{f} \circ \pi) X_1, \ldots, X_r)$$
$$= \alpha(X_1, \ldots, X_r)(\bar{f} \circ \pi) = \tilde{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)(\bar{f} \circ \pi) = (\bar{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)\bar{f}) \circ \pi,$$

woraus

$$\bar{\alpha}(\bar{f}\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r) = \bar{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r)\bar{f}$$

folgt. Die Gleichung

$$\bar{\alpha}(\bar{X}_1 + \bar{Y}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r) = \bar{\alpha}(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_r) + \bar{\alpha}(\bar{Y}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_r)$$

wird entsprechend bewiesen. Ebenso die Schiefsymmetrie von $\bar{\alpha}$. Aus der Schiefsymmetrie und der Linearität von $\bar{\alpha}$ an der ersten Stelle folgt die Multilinearität von $\bar{\alpha}$. Die Gleichung (3, 4) folgt endlich aus (3, 8) und der Definition von $\tilde{\alpha}$. Wir haben damit gezeigt: Ist $\bar{E}_1(\alpha)$ erfüllt, so gibt es ein $\bar{\alpha}$, das der Bedingung (3, 4) genügt.

Gibt es umgekehrt ein solches $\bar{\alpha}$, so sind die Funktionen der Menge $\mathfrak{M}$ längs den Charakteristiken von $\alpha$ konstant. Aus dem weiter oben bewiesenen folgt dann, daß $\bar{E}_1(\alpha)$ erfüllt ist.

**Zusatz 1.** *Die Differentialform $\bar{\alpha}$ auf $\bar{V}^M$ hat den Rang $M$.*

*Beweis*: Sei $\bar{X}_{\bar{p}} \in Kern\, \bar{\alpha}_{\bar{p}}$ und $\pi_* X_p = \bar{X}_{\bar{p}}$. Dann gilt für alle $X_p^2, \ldots, X_p^r \in T_p(V)$ $\alpha(X_p, X_p^2, \ldots, X_p^r) = \bar{\alpha}(\bar{X}_{\bar{p}}, \pi_* X_p^2, \ldots, \pi_* X_p^r) = 0$, also ist $X_p \in Zentr\, \alpha_p$. Aus (3, 3) folgt $\bar{X}_{\bar{p}} = \pi_* X_p = 0$.

**Zusatz 2.** *Die Differentialform $\bar{\alpha}$ auf $\bar{V}^M$ ist durch die Bedingung* (3, 4) *eindeutig bestimmt.*

*Beweis*: Triviale Folge aus Hilfssatz 2!

## § 4. Theorie der Integralmannigfaltigkeiten und Anfangswertproblem.

Sei $\alpha$ eine Differentialform $r$-ten Grades auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit $V^N$. Eine Untermannigfaltigkeit $\iota$: $W \longrightarrow V$ heißt Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ (i. S. von E. Kähler [6]), wenn $\iota^* \alpha = 0$ ist. Aus der Definition von $\iota^*$ folgt sofort, daß $W$ dann und nur dann Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ ist, wenn für alle $X_p^1, \ldots, X_p^r \in T_p(W)$ gilt $\alpha(\iota_* X_p^1, \ldots, \iota_* X_p^r) = 0$. Hieraus und aus der Schiefsymmetrie von $\alpha$ folgt sofort, daß jede Untermannigfaltigkeit von $V^N$, deren Dimension kleiner als der Grad von $\alpha$ ist, eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ ist.

**Satz 4.** *Ist $W^L$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$, und ist $M = \operatorname{Max}_{p \in W} (Rang\, \alpha_p)$, so ist*

$$\binom{L}{r-1} + L \leqq \binom{N}{r-1} + N - M. \tag{4, 1}$$

Dieser Satz ist rein algebraischer Natur. Zum Beweise benötigt man folgenden

**Hilfssatz 5.** *Sei $E$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\beta : E^{r-1} \longrightarrow E^*$ sei eine $(r-1)$-lineare und schiefsymmetrische Abbildung. Ist dann $F$ ein Unterraum von $E$, so daß für alle $f_1, \ldots, f_r \in F$ gilt*

$$\beta(f_1, \ldots, f_{r-1})\, f_r = 0, \tag{4, 2}$$

*so ist*

$$\binom{Dim\, F}{r-1} + Dim\, F \leqq \binom{Dim\, E}{r-1} + Dim\, E - Rang\, \beta. \tag{4, 3}$$

*Beweis*: Seien $\overset{r-1}{\wedge} E$ und $\overset{r-1}{\wedge} F$ die $(r-1)$-ten äußeren Potenzen von $E$ und $F$. Nach Bourbaki [2] gibt es eine multilineare Abbildung $\mu : E^{r-1} \longrightarrow \overset{r-1}{\wedge} E$ und eine lineare Abbildung $\lambda : \overset{r-1}{\wedge} E \longrightarrow E^*$ mit $\beta = \lambda \circ \mu$ und $\mu(g_1, \ldots, g_{r-1}) = g_1 \wedge \cdots \wedge g_{r-1}$ für alle $(g_1, \ldots, g_{r-1}) \in E^{r-1}$. Hieraus und aus $Dim \overset{r-1}{\wedge} E = \binom{Dim\, E}{r-1}$ folgt

$$Rang\, \beta = \binom{Dim\, E}{r-1} - Dim Kern\, \lambda. \tag{4, 4}$$

Da $F$ und $E$ Basen besitzen, kann $\overset{r-1}{\wedge} F$ in $\overset{r-1}{\wedge} E$ nach Bourbaki [2] in kanonischer Weise eingebettet werden. Daraus folgt leicht $\beta(F^{r-1}) = \lambda(\overset{r-1}{\wedge} F)$. Beachtet man, daß (4, 2) mit $F \leqq Annullator\, \beta(F^{r-1}) = Annullator\, \lambda(\overset{r-1}{\wedge} F)$ äquivalent ist, so folgt aus $Dim \overset{r-1}{\wedge} F = \binom{Dim\, F}{r-1}$, (4, 4) und bekannten Gleichungen der linearen Algebra leicht:

$$\begin{aligned} Dim\, F &\leqq Dim Annullator\, \lambda \overset{r-1}{\wedge} F = Dim\, E - (Dim \overset{r-1}{\wedge} F - Dim\, (\overset{r-1}{\wedge} F \cap Kern\, \lambda)) \\ &\leqq Dim\, E - Dim\, (\overset{r-1}{\wedge} F) - Dim Kern\, \lambda = Dim\, E - \binom{Dim\, F}{r-1} + \binom{Dim\, E}{r-1} - Rang\, \beta. \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

*Beweis von Satz* 4: Ist $p \in W^L$, so setzen wir $F = \iota_* T_p(W)$, $E = T_p(V)$ und $\beta = \varkappa(\alpha_p)$, wobei $\varkappa$ die durch (1, 5) definierte Abbildung ist. Da $W^L$ Integralmannigfaltigkeit ist, gilt (4, 2). Aus (4, 3) folgt sofort $L + \binom{L}{r-1} \leqq N + \binom{N}{r-1} - Rang\, \alpha_p$ für alle $p \in W^L$. Daraus folgt (4, 1).

Wir nehmen jetzt an, $\alpha$ habe den Rang $M$, und das charakteristische Vektorraumfeld *Zentr* $\alpha$ sei integrabel. Dann gilt der

**Satz 5.** *Die Charakteristiken von $\alpha$ sind Integralmannigfaltigkeiten von $\alpha$.*

*Beweis*: Sei $\iota : W \to V$ eine Charakteristik von $\alpha$ und $p \in W$. Für alle $X_p \in T_p(W)$ gilt $\iota_* X_p \in Zentr\, \alpha_p$. Sind also $X_p^1, \ldots, X_p^{N-M} \in T_p(W)$, so gilt stets

$$\alpha(\iota_* X_p^1, \ldots, \iota_* X_p^{N-M}) = \varkappa\alpha(\iota_* X_p^1, \ldots, \iota_* X_p^{N-M-1})\, \iota_* X_p^{N-M} = 0,$$

woraus der Satz folgt.

**Satz 6.** *Ist $L$ die größte ganze Zahl, die der Bedingung (4, 1) genügt, und ist $B^L$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$, so gibt es eine geblätterte Struktur auf $B^L$, deren Blätter offene Teilmannigfaltigkeiten der Charakteristiken von $\alpha$ sind.*

*Beweis*: Sei $\iota : B^L \longrightarrow V^N$ die Injektion. Aus den Eigenschaften des Zentrums von $\alpha_p$ und aus der Tatsache, daß $B^L$ Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ ist, folgt: Ist $E_p$ der kleinste Unterraum von $T_p(V)$, der *Zentr* $\alpha_p$ und $\iota_* T_p(B)$ umfaßt, so gilt für alle $X_p^1, \ldots, X_p^r \in E_p$

$$\alpha_p(X_p^1, \ldots, X_p^r) = 0.$$

Da $L$ die größte der Bedingung (4, 1) genügende ganze Zahl ist, ist $Dim\, E_p \leqq L$ und folglich $Zentr\, \alpha_p \leqq \iota_* T_p(B)$. Es gibt also ein Vektorraumfeld $\Gamma$ auf $B^L$ mit $\iota_* \Gamma_p = Zentr\, \alpha_p$ für alle $p$. Aus der Integrabilität von $Zentr\, \alpha$ folgt die Integrabilität von $\Gamma$ und die Behauptung des Satzes.

Eine triviale Folge aus Satz 6 ist der

**Satz 7.** *Haben zwei maximaldimensionale Integralmannigfaltigkeiten von $\alpha$ einen Punkt gemeinsam, so enthält ihr Durchschnitt eine offene Teilmannigfaltigkeit der durch diesen Punkt gehenden Charakteristik von $\alpha$.*

Im folgenden werde stets vorausgesetzt, daß die charakteristische Quotientenmannigfaltigkeit $\overline{V}^M$ von $\alpha$ existiert. $\pi: V^N \longrightarrow \overline{V}^M$ sei die kanonische Abbildung. Ferner werde vorausgesetzt, daß $E_1(\alpha)$ erfüllt ist. Dann sei $\overline{\alpha}$ die nach Satz 3 existierende Differentialform auf $\overline{V}^M$, die der Bedingung (3, 4) genügt.

**Satz 8.** *Das Urbild einer $L$-dimensionalen Integralmannigfaltigkeit $\overline{A}^L$ von $\alpha$ vermöge $\pi$ ist eine $(L + (N - M))$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$.*

*Beweis*: Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1. Ist $\overline{A}^L$ eine Untermannigfaltigkeit von $\overline{V}^M$, so ist das Urbild

$$\overset{-1}{\pi}(\overline{A}^L) = \{p \mid \pi p \in \overline{A}^L\}$$

eine $(L + (N - M))$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $V^N$. — Zum Beweis dieser Behauptung verweise ich auf M. Breuer [3], S. 59.

2. Ist $\overline{A}^L$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\overline{\alpha}$, so ist zu zeigen, daß die Untermannigfaltigkeit $\widetilde{A}^{L+(N-M)} = \overset{-1}{\pi}(\overline{A}^L)$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ ist. Hierzu seien $\iota: \widetilde{A} \to V$, $\overline{\iota}: \overline{A} \to \overline{V}$ die Injektionen, und $\overline{\pi}: \widetilde{A} \to \overline{A}$ sei die von $\pi$ induzierte Abbildung. Aus $\pi \circ \iota = \overline{\iota} \circ \overline{\pi}$ und (1, 16) folgt

$$\overline{\pi}^* \circ \overline{\iota}^* = \iota^* \circ \pi^*. \tag{4, 5}$$

Aus (4, 5) und (3, 4) folgt mit Hilfe von $\overline{\iota}^* \overline{\alpha} = 0$

$$\iota^* \alpha = (\iota^* \circ \pi^*)\, \overline{\alpha} = (\overline{\pi}^* \circ \overline{\iota}^*)\, \overline{\alpha} = \overline{\pi}^*(0) = 0.$$

**Satz 9.** *Sei $A$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$, die folgenden Bedingungen genügt:*

i) *$\pi(A) = \overline{A}$ ist Untermannigfaltigkeit von $\overline{V}^M$.*

ii) *Ist $\overline{\pi}$ die von $\pi$ induzierte Abbildung von $A$ auf $\overline{A}$, so ist $\pi_*: T(A) \to T(\overline{A})$ eine Surjektion.*

*Dann ist $A$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\overline{\alpha}$.*

*Beweis*: Seien $\iota$, $\overline{\iota}$ die Injektionen von $A$ bzw. $\overline{A}$ in $V$ bzw. $\overline{V}$. Wegen (4, 5) gilt dann $\overline{\pi}^*(\overline{\iota}^* \overline{\alpha}) = 0$. Sind nun $\overline{X}^1_{\overline{p}}, \ldots, \overline{X}^r_{\overline{p}} \in T_{\overline{p}}(\overline{A})$ und $p \in A$, $X^1_p, \ldots, X^r_p \in T_p(A)$ so bestimmt, daß $\overline{p} = \pi p$ und $\overline{X}^\varrho_{\overline{p}} = \pi_* X^\varrho_p$, $\varrho = 1, \ldots, r$ gilt, so ist

$$0 = (\overline{\pi}^*(\overline{\iota}^* \overline{\alpha}))(X^1_p, \ldots, X^r_p) = \overline{\iota}^* \overline{\alpha}(\overline{X}^1_{\overline{p}}, \ldots, \overline{X}^r_{\overline{p}}),$$

woraus $\overline{\iota}^* \overline{\alpha} = 0$ folgt.

**Satz 10.** *Sei $A^{L-(N-M)}$ eine Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) *$\pi(A) = \overline{A}$ ist Untermannigfaltigkeit von $\overline{V}^M$.*

ii) *$A^{L-(N-M)}$ verläuft transversal zur charakteristischen geblätterten Struktur von $\alpha$, d. h. ist $\iota: A^{L-(N-M)} \longrightarrow V^N$ die Injektion, so ist für alle $p \in A$*

$$Kern\, \pi_{*p} \cap Bild\, \iota_{*p} = \{0\}. \tag{4, 6}$$

*Dann ist* $\tilde{A} = \bar{\pi}^{\downarrow}(\pi A)$ *eine L-dimensionale Integralmannigfaltigkeit von* $\alpha$.

*Beweis*: Sei $\bar{\iota}: \bar{A} \to \bar{V}$ die Injektion und $\bar{\pi}: A \to \bar{A}$ die Beschränkung von $\pi$ auf $A$. Dann gilt

$$\pi_* \circ \iota_* = \bar{\iota}_* \circ \bar{\pi}_*. \tag{4, 7}$$

Hierbei sind $\iota_*, \bar{\iota}_*$ Injektionen, und $\pi_*$ ist eine Surjektion. Aus $\operatorname{Dim} T_p(A) \geqq \operatorname{Dim} T_p(\bar{A})$ folgt leicht, daß $\bar{\pi}_*$ wieder eine Surjektion ist und $\operatorname{Dim} A = \operatorname{Dim} \bar{A}$ ist. Nach Satz 9 ist $\bar{A}^{L-(N-M)}$ Integralmannigfaltigkeit von $\bar{\alpha}$; nach Satz 8 ist $\bar{\pi}^{\downarrow}(\bar{A}) = \tilde{A}^L$ Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$.

Sei jetzt $L$ die größte ganze Zahl, die der Bedingung (4, 1) genügt. Dann lautet das Cauchysche *Anfangswertproblem* für die Differentialform $\alpha$ vom Range $M$ folgendermaßen: Gegeben ist eine $(L-(N-M))$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $A$ von $\alpha$, die sogenannte *Anfangsmannigfaltigkeit*; gesucht ist eine $L$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\tilde{A}$ von $\alpha$, welche $A$ enthält.

Satz 10 gibt die Bedingungen für die Lösbarkeit dieses Problems. Die in Satz 10 angegebene Mannigfaltigkeit $\tilde{A}$ ist eine Lösung. Die Sätze 6 und 7 können als *lokale Eindeutigkeitssätze* für die Lösung des Anfangswertproblems angesehen werden.

## § 5. Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir untersuchen jetzt, welche Beziehungen zwischen den *Differentialformen zweiten Grades* bzw. deren *Integralmannigfaltigkeiten* und den *partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung* bzw. deren *Lösungen i. S. von* S. Lie bestehen.

Hierzu sei $\mathbf{R}^{2n}$ der $2n$-dimensionale Raum aller $2n$-Tupel $\langle a_1, \ldots, a_{2n}\rangle$. Ferner sei $x_i: \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}$ die $i$-te Projektion, d. h. für alle $\langle a_1, \ldots, a_{2n}\rangle \in \mathbf{R}^{2n}$ gilt

$$x_i \langle a_1, \ldots, a_{2n}\rangle = a_i. \tag{5, 1}$$

Wir machen den $\mathbf{R}^{2n}$ zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, indem wir $\langle x_1, \ldots, x_{2n}\rangle$ zu einem Koordinatensystem erklären. Die Differentialform $\tilde{\alpha}$ auf $\mathbf{R}^{2n}$ sei durch

$$\tilde{\alpha} = dx_{n+1} \wedge dx_1 + \cdots + dx_{2n} \wedge dx_n \tag{5, 2}$$

definiert.

Die *Grundaufgabe der Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme* 1. *Ordnung i. S. von S. Lie* kann man wie folgt definieren:

Seien $F_\mu = F_\mu^*(x_1, \ldots, x_{2n})$, $\mu = 1, \ldots, m$ auf dem $\mathbf{R}^{2n}$ definierte reellwertige Funktionen. Dann sind differenzierbare Untermannigfaltigkeiten $\iota_W: W^l \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ mit folgenden Eigenschaften gesucht: Ist

$$x_i \circ \iota_W = \xi_i(s_1, \ldots, s_l), \quad i = 1, \ldots, 2n \tag{5, 3}$$

eine (lokale) Parameterdarstellung von $W^l$, so gilt:

i) Die Differentialform

$$\xi_{n+1} d\xi_1 + \cdots + \xi_{2n} d\xi_n \tag{5, 4}$$

ist geschlossen.

ii) Es gelten die Gleichungen

$$F_\mu^*(\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m. \tag{5, 5}$$

Erfüllt $W^l$ die Bedingungen i) und ii), so heißt $W^l$ eine Lösungsmannigfaltigkeit des partiellen Differentialgleichungssystems (5, 5) i. S. von S. Lie.

Die Bedingung i) ist äquivalent mit der folgenden:

i') $W^l$ ist Integralmannigfaltigkeit von $\tilde{\alpha}$.

*Beweis*: Es ist

$$d(\xi_{n+1}d\xi_1 + \cdots + \xi_{2n}d\xi_n) = d((x_{n+1} \circ \iota_W)\, d(x_1 \circ \iota_W) + \cdots + (x_{2n} \circ \iota_W)\, d(x_n \circ \iota_W))$$
$$= d(\iota_W^*(x_{n+1}dx_1 + \cdots + x_{2n}dx_n)) = \iota_W^*(d(x_{n+1}dx_1 + \cdots + x_{2n}dx_n)) = \iota_W^*\tilde{\alpha}\ ^{7)}.$$

Also ist die Differentialform (5, 4) dann und nur dann geschlossen, wenn $\iota_W^*\tilde{\alpha} = 0$ ist.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Punktmenge

$$\{q \mid F_\mu q = 0,\ \mu = 1, \ldots, m\} \tag{5, 6}$$

zu einer differenzierbaren $(2n - m)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $V^{2n-m}$ von $\mathbf{R}^{2n}$ gemacht werden kann. Dann ist die Bedingung ii) äquivalent mit der folgenden:

ii') $W^l$ ist Untermannigfaltigkeit von $V^{2n-m}$.

Die Bedingungen i' und ii' lassen sich mühelos zu einer einzigen zusammenfassen. Hierzu seien $\iota_V : V^{2n-m} \longrightarrow \mathbf{R}^{2n}$ und $\iota : W^l \longrightarrow V^{2n-m}$ die Injektionen. Dann ist

$$\iota_W = \iota_V \circ \iota. \tag{5, 7}$$

Ist daher die Differentialform $\alpha$ auf $V^{2n-m}$ durch

$$\alpha = \iota_V^*\tilde{\alpha} \tag{5. 8}$$

definiert, so folgt aus (5, 7) und (1, 16) sofort

$$\iota_W^*\tilde{\alpha} = \iota^*\alpha. \tag{5, 9}$$

Es gilt also folgender

**Satz 11.** *Unter der Voraussetzung, daß die Punktmenge* (5, 6) *zu einer differenzierbaren Untermannigfaltigkeit $V^{2n-m}$ von $\mathbf{R}^{2n}$ gemacht werden kann, ist $W^l$ dann und nur dann eine Lösungsmannigfaltigkeit des partiellen Differentialgleichungssystems* (5, 5) *i. S. von S. Lie, wenn $W^l$ Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ ist.*

Von besonderem Interesse sind in der Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme die $n$-dimensionalen Lösungsmannigfaltigkeiten, zu denen u. a. auch die Lösungsfunktionen Anlaß geben. Damit solche existieren, sind gewisse Bedingungen notwendig.

**Satz 12.** *Geht durch jeden Punkt von $V^{2n-m}$ eine $n$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$, so hat $\alpha$ überall den Rang $2(n - m)$* [8].

*Beweis*: 1) Aus Satz 4 folgt für den Fall $r = 2$ sofort für alle $p \in V$

$$Rang\ \alpha_p \leqq \binom{2n-m}{1} + 2n - m - \binom{n}{1} - n = 2(n - m).$$

2) Es bleibt noch zu zeigen, daß für alle $p \in V$

$$Rang\ \alpha_p \geqq 2(n - m) \tag{5, 10}$$

---

[7]) Ist $\varphi : W \to V$ eine differenzierbare Abbildung und $d$ der Operator der äußeren Ableitung, so ist $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$ (C. Chevalley [5], S. 152).

[8]) Die Bedingung dieses Satzes ist äquivalent mit der aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung bekannten Bedingung, daß die Poissonschen Klammerprodukte

$$(F_\mu, F_\nu) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_{i+n}} - \frac{\partial F_\mu}{\partial x_{i+n}} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_i} \right)$$

längs $W^l$ verschwinden (C. Caratheodory [4], S. 66).

gilt. Dabei ist natürlich auszunutzen, daß $\alpha = \iota_V^* \tilde{\alpha}$ und $Rang\ \tilde{\alpha} = 2n$ gilt. Zunächst ist (5, 10) äquivalent mit

$$(5, 11) \qquad DimZentr\ \alpha_p \leqq m.$$

Ist nun $X_p \in Zentr\ \alpha_p$, so ist für alle $Y_p \in T_p(V)$

$$0 = \alpha_p(X_p, Y_p) = \tilde{\alpha}_p(\iota_{V*} X_p, \iota_{V*} Y_p) = ((\varkappa \tilde{\alpha}_p \circ \iota_{V*})\ X_p)(\iota_{V*} Y_p).$$

Daraus folgt

$$(5, 12) \qquad (\varkappa \tilde{\alpha}_p \circ \iota_{V*})\ Zentr\ \alpha_p \leqq Annullator\ \iota_{V*} T_p(V).$$

Da $\varkappa \tilde{\alpha}_p$ den Rang $2n$ hat und $\iota_{V*}$ injektiv ist, ist

$$(5, 13) \qquad DimZentr\ \alpha_p = Dim\ (\varkappa \tilde{\alpha}_p \circ \iota_{V*})\ Zentr\ \alpha_p.$$

Aus (5. 12) und (5, 13) folgt (5, 11) durch folgende leichte Abschätzung:

$$\begin{aligned} DimZentr\ \alpha_p &\leqq DimAnnullator\ \iota_{V*} T_p(V) = 2n - Dim\ \iota_{V*} T_p(V) \\ &= 2n - Dim\ T_p(V) = 2n - (2n - m) = m. \end{aligned}$$

Satz 12 besagt insbesondere, daß der Rang von $\alpha$ konstant sein muß, falls durch jeden Punkt von $V^{2n-m}$ wenigstens eine $n$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit von $\alpha$ geht. *Die Grundaufgabe der Theorie der partiellen Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung i. S. von S. Lie ist damit im wesentlichen auf die Bestimmung der Integralmannigfaltigkeiten von Differentialformen 2. Grades von konstantem Rang zurückgeführt.* Diese Aufgabe wurde schon im vorigen Paragraphen für Differentialformen beliebigen Grades von konstantem Rang behandelt. Das Cauchysche *Anfangswertproblem* für partielle Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung lautet:

Gegeben ist eine Untermannigfaltigkeit $V^{2n-m}$ von $\mathbf{R}^{2n}$. Ferner ist eine Integralmannigfaltigkeit $A^{n-m}$ von $\tilde{\alpha}$ gegeben, welche in $V^{2n-m}$ enthalten ist. Dann ist eine $n$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $A^n$ gesucht mit

$$A^{n-m} \subseteqq \tilde{A}^n \subseteqq V^{2n-m}.$$

Nach Satz 12 kann man dieses Problem sofort in folgendes Problem übersetzen: Gegeben ist eine Integralmannigfaltigkeit $A^{n-m}$ von $\alpha$; gesucht ist eine $n$-dimensionale Integralmannigfaltigkeit $\tilde{A}^n$ von $\alpha$, die $A^{n-m}$ enthält.

Damit ist das Cauchysche Anfangswertproblem für partielle Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung auf das im vorigen Paragraphen behandelte Anfangswertproblem reduziert.

## Literatur.


[1] *N. Bourbaki*, Algèbre linéaire, Paris 1955.

[2] *N. Bourbaki*, Algèbre multilinéaire, Paris 1958.

[3] *M. Breuer*, Jacobische Differentialgeometrie und Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung, Bonn 1958.

[4] *C. Caratheodory*, Variationsrechnung, Berlin und Leipzig 1935.

[5] *C. Chevalley*, Theorie of Lie Groups, Princeton (N. J.) 1946.

[6] *E. Kähler*, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin 1934.

[7] *G. Reeb*, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, Paris 1952.


Eingegangen 13. November 1959.

# Über Fundamentalpolynome.

## Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.

Von *Otto Endler* in Bonn.

### Einleitung.

Zu gegebenem Körper $K$ und gegebener endlicher Gruppe $\mathfrak{G}$ betrachten wir *Fundamentalpolynome*, d. h. Polynome $F^*$ über einem geeigneten Oberring $I^*$ von $K$ derart, daß zu jeder galoisschen Erweiterung $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Galoisgruppe ein $K$-Homomorphismus $\lambda$ von $I^*$ auf $K$ existiert, der $F^*$ in ein Galoispolynom für $N \mid K$ überführt.

Zum Beispiel ist das *allgemeine Binom* $X^n - s$ ($s$ transzendent über $K$) ein zur zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_n$ der Ordnung $n$ gehöriges Fundamentalpolynom, sofern $K$ gewissen Voraussetzungen über Charakteristik und $n$-te Einheitswurzeln genügt. Im Falle eines Körpers $K$ der Charakteristik $p \neq 0$ ist das von Artin und Schreier gefundene *allgemeine Trinom* $X^p - X - s$ ein Fundamentalpolynom für die Gruppe $\mathfrak{Z}_p$. Schließlich hat F. Klein mit Hilfe der Ikosaedergruppe ein zur alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}^{(5)}$ gehöriges Fundamentalpolynom $F(X; s)$ konstruiert, das allerdings die obengenannten Forderungen nicht ausnahmslos erfüllt: es existieren (bei geeigneter Wahl des Körpers $K$) galoissche Erweiterungen $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{A}^{(5)}$ isomorpher Galoisgruppe, für die es kein Galoispolynom von der Form $F(X; a)$ $(a \in K)$ gibt. Immerhin läßt sich dieser Mangel stets durch die Adjunktion einer geeigneten quadratischen „akzessorischen Irrationalität" beheben: es gibt stets ein $a \in K$ derart, daß $F(X; \sqrt{a})$ ein Galoispolynom für $N(\sqrt{a}) \mid K(\sqrt{a})$ wird.

Herr Krull hat gezeigt, wie man zu einer beliebigen endlichen linearen oder projektiven Gruppe Fundamentalpolynome konstruieren kann. Die vorliegende Arbeit verallgemeinert dieses Verfahren auf endliche Gruppen $\mathfrak{Y}$ von *Cremona-Operatoren* (d. h. „umkehrbaren" $k$-Tupeln $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ von über $K$ algebraisch-unabhängigen rationalen Funktionen $y_1, \ldots, y_k \in K(X_1, \ldots, X_k)$). Sind $b_1, \ldots, b_k \in K$ so gewählt, daß die Summen $\Sigma_{1 \leq i \leq k} b_i \cdot y_i$ $(\mathbf{y} \in \mathfrak{Y})$ paarweise verschieden sind[1]), so ist das Polynom

$$F_{\mathfrak{b}}^* = \Pi_{\mathbf{y} \in \mathfrak{Y}} (X - \Sigma_{1 \leq i \leq k} y_i(t_1, \ldots, t_k) \cdot b_i)$$

ein zu $K$ und $\mathfrak{Y}$ gehöriges Fundamentalpolynom in dem folgenden Sinne. Es sei $\boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ die Menge derjenigen über $K$ galoisschen Oberkörper $N$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe $G$, für die ein *primitiver Galoisvektor* existiert, d. h. ein $k$-Tupel $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ über $N$ derart, daß $N = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ ist und

$$(\sigma\gamma_1, \ldots, \sigma\gamma_k) = (y_1(\gamma_1, \ldots, \gamma_k), \ldots, y_k(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)) \qquad (\sigma \in G)$$

für einen Antiisomorphismus $\Psi : \sigma \to \mathbf{y}$ $(\sigma \in G)$ von $G$ auf $\mathfrak{Y}$ gilt; $\boldsymbol{\gamma}$ wird dann genauer als $\Psi$-*Vektor* bezeichnet. Ferner sei $K^*$ der Invariantenkörper der durch $\mathfrak{Y}$ definierten

[1]) Wenn $K$ unendlich ist, gibt es stets ein (sogar unendlich viele) $k$-Tupel $\mathfrak{b}$ der gewünschten Art.

$K$-Automorphismengruppe $G^*$ von $N^* = K(t_1, \ldots, t_k)$, $J^*$ die ganz-abgeschlossene Hülle des Ringes $\tilde{J} = K[\sigma^* t_i \mid \sigma^* \in G^*, 1 \leqq i \leqq k]$ in $N^*$, und $I^* = J^* \frown K^*$. Dann ist $F_{\mathfrak{b}}^* \in I^*[X]$ ein Galoispolynom für $N^* \mid K^*$, und zu jedem $N \in \boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ existiert ein $K$-Homomorphismus $\lambda$ von $I^*$ auf $K$ derart, daß $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ (für geeignetes $\mathfrak{b}$) ein Galoispolynom für $N \mid K$ wird. Die genannten Homomorphismen $\lambda$ können zur Kennzeichnung der Körper $N \in \boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ verwendet werden; in der Tat, die (von der Wahl des Fortsetzungshomomorphismus $\lambda'$ unabhängige) Zuordnung $\lambda \to \lambda' J^*$ bildet die (in § 3 genauer definierte) Homomorphismenmenge $\boldsymbol{H}(K, \mathfrak{Y})$ *auf* $\boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ ab. Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich schließlich zeigen, daß diese Mengen nicht leer sind[2]).

Daß $\boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ im allgemeinen nicht alle über $K$ galoisschen Oberkörper $N$ von $K$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe enthält, hat Krull schon für den Fall projektiver Gruppen gezeigt; immerhin läßt sich in diesem Falle die Existenz eines primitiven Galoisvektors stets durch eine geeignete Grundkörpererweiterung (Adjunktion der charakteristischen Wurzeln einer „Kleinschen Matrix") erzwingen. Die Frage, ob dies auch im Falle beliebiger Gruppen von Cremona-Operatoren möglich ist, müssen wir offenlassen; jedenfalls sehen wir keinen Weg, die Klein-Krullschen Ergebnisse zu verallgemeinern.

Die Arbeit gliedert sich in sechs Paragraphen. In § 1 werden, ausgehend von einer endlichen Gruppe $G^*$ von $K$-Automorphismen von $N^*$, die Unterringe $\tilde{J}$, $J^*$ von $N^*$ und die Unterringe $\tilde{I}$, $I^*$ von $K^*$ diskutiert. § 2 enthält elementare Aussagen über Cremona-Operatoren und deren Anwendung auf Vektoren aus beliebigen Oberkörpern $L$ von $K$. Nach diesen vorbereitenden Ausführungen bringt § 3 die Hauptresultate über die Beziehung zwischen den Körpern $N \in \boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ und den $K$-Homomorphismen $\lambda \in \boldsymbol{H}(K, \mathfrak{Y})$, die schließlich im Kennzeichnungssatz zusammengefaßt werden. Das Existenzproblem wird unter der Voraussetzung gelöst, daß $K^* \mid K$ rein-transzendent ist und über $K$ der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt.

In §§ 4—5 werden der Vollständigkeit halber die Krullschen Ergebnisse über lineare und projektive Gruppen (ohne Beweis) wiedergegeben und insbesondere die Vereinfachungen angemerkt, die sich gegenüber dem in § 3 behandelten Allgemeinfall ergeben.

Schließlich zeigt § 6 am Beispiel der *Wittschen Gruppe* $\mathfrak{W}$, daß es interessante Gruppen von Cremona-Operatoren gibt, die weder linear noch projektiv sind. Hierbei ist $\mathfrak{W}$, über einem beliebigen Körper der Charakteristik $p \neq 0$, als die durch den Operator

$$\mathbf{w} = (X_1, \ldots, X_k) \hat{+} (1, 0, \ldots, 0)$$

erzeugte Gruppe der Ordnung $p^k$ definiert, wobei $\hat{+}$ die Addition der Wittschen Vektoren bezeichnet. Auf Grund eines von Witt bewiesenen Satzes lassen sich hier der Ring $I^*$ und die Mengen $\boldsymbol{E}(K, \mathfrak{W})$ und $\boldsymbol{H}(K, \mathfrak{W})$ explizit bestimmen.

## § 1. Fundamentalerweiterung und Fundamentalpolynome.

Es sei $K$ ein beliebiger Körper und $N^* = K(t_1, \ldots, t_k)$ mit über $K$ algebraisch-unabhängigen $t_1, \ldots, t_k$; ferner sei $G^*$ eine Gruppe von $K$-Automorphismen von $N^*$,

[2]) Man beachte, daß die Fundamentalpolynome $F_{\mathfrak{b}}^*$, ebenso wie die Ringe $I^*$, $J^*$, $K^*$ und die Mengen $\boldsymbol{E}(K, \mathfrak{Y})$ und $\boldsymbol{H}(K, \mathfrak{Y})$, von der konkreten Gruppe $\mathfrak{Y}$ und nicht nur vom Gruppentyp (d. h. der Isomorphieklasse) von $\mathfrak{Y}$ abhängen. Eine abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ kann natürlich auf verschiedene Weisen „konkretisiert", d. h. durch eine Gruppe $\mathfrak{Y}$ von Cremona-Operatoren dargestellt werden. Z. B. kann man stets eine zu $\mathfrak{Y}$ isomorphe lineare Gruppe finden; man wird jedoch oft die Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch eine allgemeinere Gruppe $\mathfrak{Y}$ von kleinerem Grad $k$ vorziehen.

$n$ die Ordnung von $G^*$ und $K^*$ der Invariantenkörper von $G^*$. Dann ist bekanntlich $N^* \mid K^*$ galoissch mit der Galoisgruppe $G^*$; im Hinblick auf ihre Bedeutung in § 3 wollen wir diese Erweiterung als die *zu $G^*$ gehörige Fundamentalerweiterung* bezeichnen.

Bei fester Transzendenzbasis $t_1, \ldots, t_k$ sind die folgenden Unterringe von $N^*$ und $K^*$ ausgezeichnet. Zunächst ist $\tilde{J} = K[\sigma^* t_i \mid \sigma^* \in G,\ 1 \leqq i \leqq k]$ der kleinste den Polynomring $K[t_1, \ldots, t_k]$ enthaltende unter $G^*$ invariante Unterring von $N^*$. Er hat, ebenso wie seine ganz-abgeschlossene Hülle $J^*$ in $N^*$, den Körper $N^*$ zum Quotientenkörper. Der Durchschnittsring $I^* = J^* \cap K^*$ ist ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper $K^*$. Einen weiteren wichtigen Unterring von $K^*$ erhalten wir durch die folgenden Betrachtungen.

Zunächst vereinbaren wir die folgenden Bezeichnungen: $V(K)$ bezeichne die Menge aller „Vektoren", d. h. $k$-Tupel $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ mit Elementen $a_i \in K$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ bezeichne das skalare Produkt $\Sigma_{1 \leqq i \leqq k}\, a_i \cdot b_i \in K$; ferner übertragen wir alle in $K$ definierten Abbildungen $\mu$ komponentenweise auf $V(K)$, schreiben also $\mu\mathbf{a} = (\mu a_1, \ldots, \mu a_k)$. — Wir betrachten nun das mit Unbestimmten $u_1, \ldots, u_k$ gebildete Polynom

$$F^*_{\mathbf{u}} = \Pi_{\sigma^* \in G^*}(X - (\sigma^* \mathbf{t}) \cdot \mathbf{u});$$

dieses ist ersichtlich ein Galoispolynom für $N^*(u_1, \ldots, u_k) \mid K^*(u_1, \ldots, u_k)$ und soll das *zu $G^*$ gehörige allgemeine Fundamentalpolynom* heißen. Das mit einem Vektor $\mathbf{b} \in V(K)$ an Stelle von $\mathbf{u}$ gebildete Polynom $F^*_{\mathbf{b}}$ soll ein *zu $G^*$ gehöriges (spezielles) Fundamentalpolynom* heißen, wenn $\mathbf{b}$ eine der folgenden ersichtlich gleichwertigen Bedingungen erfüllt:

a) $F^*_{\mathbf{b}}$ ist separabel (d. h., hat nur einfache Nullstellen);

b) $F^*_{\mathbf{b}}$ ist irreduzibel in $K^*[X]$;

c) $F^*_{\mathbf{b}}$ ist ein Galoispolynom für $N^* \mid K^*$.

In diesem Falle wollen wir den Vektor $\mathbf{b} \in V(K)$ *$G^*$-zulässig* nennen.

Es bezeichne $V_m$ die Menge aller Monome in $u_1, \ldots, u_k$ vom Grad $m$; dann läßt sich das allgemeine Fundamentalpolynom in der Form

$$F^*_{\mathbf{u}} = \Sigma_{0 \leqq m \leqq n} X^{n-m} \cdot (\Sigma_{v \in V_m} f_v \cdot v)$$

schreiben, wobei die $f_v$ eindeutig bestimmte Elemente aus $\tilde{J}$ sind. Über den durch die $f_v$ erzeugten Ring $\tilde{I} = K[f_v \mid v \in \bigcup_{0 \leqq m \leqq n} V_m]$ beweisen wir nun:

(1. 1) a) *$I^*$ bzw. $J^*$ ist die ganz-abgeschlossene Hülle von $\tilde{I}$ in $K^*$ bzw. $N^*$.*

b) *$I^*$ und $J^*$ sind endliche $\tilde{I}$-Moduln.*

c) *$K^*$ ist der Quotientenkörper von $\tilde{I}$, falls $K$ unendlich ist.*

*Beweis.* a) Ersichtlich ist $\tilde{I} \leqq \tilde{J} \cap K^* \leqq I^*$. — Jedes $\sigma^* t_i$ ist Nullstelle von $F^*_{\mathbf{d}_{(i)}} \in \tilde{I}[X]$ (wobei $\mathbf{d}_{(i)} = (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,k})$; $1 \leqq i \leqq k$, $\sigma^* \in G$), also ist $\tilde{J}$, und damit auch $J^*$ und $I^*$, von $\tilde{I}$ ganz-abhängig. Da $I^*$ und $J^*$ ganz-abgeschlossen in ihren Quotientenkörpern sind, folgt daraus die Behauptung. —

b) folgt aus der Tatsache, daß $\tilde{I}$ über $K$ endlich erzeugt ist und $N^*$ und $K^*$ endliche Erweiterungen des Quotientenkörpers $\tilde{K}$ von $\tilde{I}$ sind. —

c) Wenn $K$ unendlich ist, gibt es $k$ linear-unabhängige $G^*$-zulässige Vektoren $\mathbf{b}_{(1)}, \ldots, \mathbf{b}_{(k)}$. Ersichtlich ist $N^* = K(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_{(1)}, \ldots, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_{(k)})$, und da alle $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_{(i)}$ über $\tilde{K}$ separabel sind, ist auch $N^* \mid \tilde{K}$ separabel, also $N^* = \tilde{K}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{d})$, wobei $\mathbf{d} = \Sigma_{1 \leqq i \leqq k}\, a_i \cdot \mathbf{b}_i$ für geeignete $a_1, \ldots, a_k \in K$ gilt. Da $\mathbf{t} \cdot \mathbf{d}$ eine Nullstelle des Polynoms $F^*_{\mathbf{d}}$ ist, gilt $[N^* : \tilde{K}] \leqq n = [N^* : K^*]$, also $\tilde{K} = K^*$.

## § 2. Endliche Gruppen von Cremona-Operatoren.

Die $K$-Automorphismen des Körpers $N^* = K(t_1, \ldots, t_k)$ können durch Cremona-Operatoren beschrieben werden, wie im folgenden ausgeführt werden soll.

Wir bezeichnen mit $\mathbf{e}$ das $k$-Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ von (für die folgenden Betrachtungen fest gewählten) Unbestimmten $X_1, \ldots, X_k$, und betrachten die Menge aller über $K$ algebraisch-unabhängigen $k$-Tupel $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in V(K(X_1, \ldots, X_k))$. Diese Menge bildet ein Monoid, mit dem Einselement $\mathbf{e}$, in bezug auf die durch

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = (y_1(\mathbf{z}), \ldots, y_k(\mathbf{z}))$$

definierte Multiplikation. Die Einheiten dieses Monoids bilden eine Gruppe $C(K)$ und heißen *Cremona-Operatoren über $K$ (vom Grad $k$)*.

Die Cremona-Operatoren $\mathbf{y} \in C(K)$ entsprechen, bei gegebener Transzendenzbasis $t_1, \ldots, t_k$, eineindeutig den $K$-Automorphismen $\sigma^*$ von $N^*$ vermittels der Beziehung

$$\sigma^* t_i = y_i(t_1, \ldots, t_k) \qquad (1 \leqq i \leqq k),$$

und zwar definiert diese Relation einen Antiisomorphismus $\eta_t$ von der Gruppe aller $K$-Automorphismen von $N^*$ auf die Gruppe $C(K)$. Da wir die Transzendenzbasis nicht wechseln, können wir die durch $\eta_t$ definierte Zuordnung einfach durch $\sigma^* \longleftrightarrow \mathbf{y}$ andeuten, und für einander entsprechende Gruppen $G^* \longleftrightarrow \mathfrak{Y}$ schreiben. Ferner können wir dann in den Definitionen von § 1 die Worte „zu $G^*$ gehörig" durch „zu $\mathfrak{Y}$ gehörig" ersetzen und von „$\mathfrak{Y}$-zulässigen" statt von „$G^*$-zulässigen" Vektoren sprechen. Schließlich können wir den in § 1 definierten Ring $\tilde{J}$ in der Form $\tilde{J} = K[y_i(t_1, \ldots, t_k) \mid 1 \leqq i \leqq k,\ \mathbf{y} \in \mathfrak{Y}]$ schreiben; er ist ersichtlich in dem Quotientenring $J_{\mathfrak{Y}} = K[t_1, \ldots, t_k]_{S_{\mathfrak{Y}}}$ enthalten, wobei $S_{\mathfrak{Y}}$ das durch die „Nenner" aller $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y}$ erzeugte multiplikative System bedeute. Hierbei bezeichnen wir als *Nenner von* $\mathbf{y}$ das (bis auf einen Faktor aus $K^*$ eindeutig bestimmte) Polynom $Y_0$ derart, daß $y_i = Y_i \cdot Y_0^{-1}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ ist und die Polynome $Y_0, \ldots, Y_k$ keinen gemeinsamen Teiler in $K[X_1, \ldots, X_k]$ besitzen.

Da $J^*$ ganz-abhängig von $\tilde{J}$ und $J_{\mathfrak{Y}}$ ganz-abgeschlossen ist, gilt sogar $J^* \subseteqq J_{\mathfrak{Y}}$.

Gegenüber den $K$-Automorphismen $\sigma^*$ von $N$ haben die ihnen entsprechenden Cremona-Operatoren $\mathbf{y}$ den Vorteil, daß sie sich auch auf Vektoren über beliebigen Oberkörpern $L$ von $K$ anwenden lassen, genauer gesagt, auf diejenigen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in V(L)$, die den Nenner von $\mathbf{y}$ nicht annullieren; die übrigen Vektoren über $L$ müssen als „singulär" von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Bei gegebener endlicher Untergruppe $\mathfrak{Y}$ von $C(K)$ wollen wir sogar nur diejenigen $\alpha \in V(L)$ betrachten, deren sämtliche mit $\mathfrak{Y}$ Transformierte den Nenner keines Operators $\mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$ annullieren, d. h. also die Menge

$$V_{\mathfrak{Y}}(L) = \{\alpha \in V(L) \mid Z_0(\mathbf{y}(\alpha)) \neq 0 \ (\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{Y})\}^{3)},$$

die auch als das Komplement der durch das Polynom

$$\Pi_{\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{Y}} (Y_0(\mathbf{e}))^m \cdot Z_0(y_1(\mathbf{e}), \ldots, y_k(\mathbf{e})) \qquad (\text{für genügend großes } m \geqq 0)$$

im $k$-dimensionalen affinen Raum definierten Hyperfläche beschrieben werden kann. Wir haben damit eine Untermenge von $V(L)$ abgegrenzt, auf der die Operatoren aus $\mathfrak{Y}$ in der gewünschten, im folgenden Lemma beschriebenen Weise operieren.

---

[3]) Implizite Definition! Damit $\mathbf{y}(\alpha)$ definiert ist, muß schon $Y_0(\alpha) \neq 0$ gelten, d. h. die angegebene Bedingung für $\mathbf{y}$, $\mathbf{e}$ an Stelle von $\mathbf{z}$, $\mathbf{y}$ erfüllt sein.

(2. 1) **Lemma.** *Es sei $\mathfrak{Y}$ eine endliche Untergruppe von $C(K)$. Dann gilt:*

a) $\mathbf{z}(\alpha) \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$ *für alle* $\mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$ *und alle* $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$;

b) $\mathbf{y}(\mathbf{z}(\alpha)) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})(\alpha)$ *für alle* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$ *und alle* $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$.

Den Beweis führen wir im Anschluß an ein weiteres, für die späteren Betrachtungen ebenfalls wichtiges Lemma:

(2. 2) **Lemma.** *Es sei $\mathfrak{Y}$ wie in (2. 1) und $G^* \leftrightarrow \mathfrak{Y}$. Dann gilt:*

a) *Wenn $\beta \in V(L)$ den Nenner keines Operators $\mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$ annulliert (z. B. wenn $\beta \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$ ist), dann existiert genau ein K-Homomorphismus $\lambda_\beta$ von $J^*$ in $L$ derart, daß $\lambda_\beta \mathbf{t} = \beta$ gilt.*

b) *Es sei $\mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$, $\tau^* \leftrightarrow \mathbf{z}$; dann gilt $\lambda_{\mathbf{z}(\alpha)} = \lambda_\alpha \circ \tau^*_{J^*}$ für alle $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$ (wobei $\tau^*_{J^*}$ die Beschränkung von $\tau^*$ auf $J^*$ bezeichne).*

*Beweise.* (2. 2a): Ist $\mathfrak{p}$ der Kern des durch $\lambda \mathbf{t} = \beta$ eindeutig bestimmten $K$-Homomorphismus $\lambda$ von $K[t_1, \ldots, t_k]$ in $L$, so gilt ersichtlich $S_{\mathfrak{Y}} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$, also ist $J^*$, als Unterring von $J_{\mathfrak{Y}}$, im Quotientenring $K[t_1, \ldots, t_k]_{\mathfrak{p}}$ enthalten. Der $K$-Homomorphismus $\lambda_\beta$ ergibt sich dann als die Beschränkung der eindeutig bestimmten Fortsetzung von $\lambda$ auf den Ring $K[t_1, \ldots, t_k]_{\mathfrak{p}}$. —

(2. 2b): Die in a) gemachte Voraussetzung gilt für $\alpha$ und $\mathbf{z}(\alpha)$, falls $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$ und $\mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$. Da $(\lambda_\alpha \circ \tau^*_{J^*})\,\mathbf{t} = \lambda_\alpha(\mathbf{z}(\mathbf{t})) = \mathbf{z}(\alpha)$ ist, muß also der $K$-Homomorphismus $\lambda_{\mathfrak{Y}} \circ \tau^*_{J^*}$ mit $\lambda_{\mathbf{z}(\alpha)}$ übereinstimmen. —

(2. 1b): Ist $\sigma^* \leftrightarrow \mathbf{y}$ und $\tau^* \leftrightarrow \mathbf{z}$, so gilt

$$\mathbf{y}(\mathbf{z}(\alpha)) = \lambda_{\mathbf{z}(\alpha)}(\mathbf{y}(\mathbf{t})) = (\lambda_\alpha \circ \tau^*_{J^*})(\mathbf{y}(\mathbf{t})) = (\lambda_\alpha \circ \tau^* \circ \sigma^*)\,\mathbf{t} = \lambda_\alpha((\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{t})) = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})(\alpha)$$

für alle $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$.

(2. 1a): Ist $\alpha \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$, so gilt für alle $\mathbf{y}' \in \mathfrak{Y}$: $\mathbf{y}'(\mathbf{z}(\alpha)) = (\mathbf{y}' \cdot \mathbf{z})(\alpha)$, also $Y_0(\mathbf{y}'(\mathbf{z}(\alpha))) = Y_0((\mathbf{y}' \cdot \mathbf{z})(\alpha)) \neq 0$ für alle $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y}$ (weil $\mathbf{y}' \cdot \mathbf{z} \in \mathfrak{Y}$); also ist $\mathbf{z}(\alpha) \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$.

## § 3. Kennzeichnung und Existenz von galoisschen Erweiterungen.

Es sei $K$ ein unendlicher Körper, $\mathfrak{Y}$ eine Gruppe von Cremona-Operatoren über $K$ vom Grad $k$, und $G^* \leftrightarrow \mathfrak{Y}$. Wir wollen zeigen, daß zu jeder (noch einer gewissen Nebenbedingung genügenden) galoisschen Erweiterung $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe ein $K$-Homomorphismus $\lambda$ von $I^*$ auf $K$ existiert, der das zu $K$ und $\mathfrak{Y}$ gehörige, mit geeignetem $\mathbf{b} \in V(K)$ gebildete Fundamentalpolynom $F^*_{\mathbf{b}}$ in ein Galoispolynom für $N \mid K$ überführt. Diese Homomorphismen werden wir anschließend für eine Kennzeichnung der genannten galoisschen Erweiterungen verwenden.

Es sei $N \mid K$ eine galoissche Erweiterung mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(N \mid K)$, und es sei $\Psi$ ein Antiisomorphismus von $G$ auf $\mathfrak{Y}$; wir wollen jedes $\Psi$ dieser Art als eine *Darstellung von G durch* $\mathfrak{Y}$ bezeichnen. Jeder dem Gleichungssystem

$$\sigma\gamma = (\Psi\sigma)(\gamma) \qquad (\sigma \in G)$$

genügende Vektor $\gamma \in V_{\mathfrak{Y}}(K)$ soll ein $\Psi$-*Vektor* heißen, insbesondere ein *primitiver* bzw. $\mathbf{b}$-*primitiver* $\Psi$-Vektor, falls $N = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ bzw. $N = K(\gamma \cdot \mathbf{b})$ ist. Man zeigt leicht, daß jeder primitive $\Psi$-Vektor $\mathbf{b}$-primitiv für ein geeignetes $\mathbf{b} \in V(K)$ ist (das Umgekehrte ist trivial), und daß in diesem Falle $\mathbf{b}$ notwendigerweise $\mathfrak{Y}$-zulässig ist.

Wir beschränken nun unsere Betrachtungen auf die Menge $E(K, \mathfrak{Y})$ derjenigen (in einem festen algebraisch-abgeschlossenen Oberkörper $\Omega$ von $K$ enthaltenen) Oberkörper $N$, zu denen, für eine geeignete Darstellung $\Psi$ von $\mathrm{Gal}(N \mid K)$ durch $\mathfrak{Y}$, ein primitiver

$\Psi$-Vektor existiert. Die Frage, ob $E(K, \mathfrak{Y})$ gleich der Menge *aller* galoisschen Erweiterungen $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe oder in dieser echt enthalten ist, lassen wir hier offen; wir werden sie später für Gruppen linearer bzw. projektiver Operatoren (§ 4 bzw. § 5) sowie für die in § 6 untersuchte Wittsche Gruppe beantworten.

Als erstes zeigen wir, daß jedes $N \in E(K, \mathfrak{Y})$ das homomorphe Bild von $J^*$ ist, vermittelt durch einen $K$-Homomorphismus, der $I^*$ auf $K$ abbildet und $F_{\mathfrak{b}}^*$ (für geeignetes $\mathfrak{b}$) in ein Galoispolynom für $N \mid K$ überführt.

(3. 1) **Satz.** *Es sei $N \in E(K, \mathfrak{Y})$, $\Psi$ eine Darstellung von $G = \mathrm{Gal}(N \mid K)$ durch $\mathfrak{Y}$, $\gamma \in V_{\mathfrak{Y}}(N)$ ein primitiver $\Psi$-Vektor, und es sei $\lambda_\gamma$ der durch $\lambda_\gamma \mathfrak{t} = \gamma$ bestimmte $K$-Homomorphismus von $J^*$ in $N$ ((2. 2a)!). Dann gilt:*

a) $\sigma \circ \lambda_\gamma = \lambda_\gamma \circ \sigma_{J^*}^*$ *falls* $\sigma^* \leftrightarrow \Psi\sigma$ $(\sigma \in G)$;

b) $\lambda_\gamma F_{\mathfrak{b}}^*$ *ist ein Galoispolynom für $N \mid K$ genau dann, wenn $\gamma$ $\mathfrak{b}$-primitiv ist;*

c) $\lambda_\gamma J^* = N$ *und* $\lambda_\gamma I^* = K$.

*Beweis.* a) Es sei $\beta = (\Psi\sigma)(\gamma)$; dann ist $\lambda_\beta$ einerseits gleich $\lambda_\gamma \circ \sigma_{J^*}^*$ ((2. 2b)!), andererseits gleich $\sigma \circ \lambda_\gamma$, weil $(\sigma \circ \lambda_\gamma)\mathfrak{t} = \sigma\gamma = (\Psi\sigma)(\gamma)$ ist ((2. 2a)!). — b) Wegen a) ist $\lambda_\gamma F_{\mathfrak{b}}^* = \Pi_{\sigma^* \in G^*}(X - (\lambda_\gamma \circ \sigma^*)(\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{b})) = \Pi_{\sigma \in G}(X - \sigma(\gamma \cdot \mathfrak{b}))$. Dies ist ein Galoispolynom für $N \mid K$ genau dann, wenn aus $\sigma \neq \tau$ stets $\sigma(\gamma \cdot \mathfrak{b}) \neq \tau(\gamma \cdot \mathfrak{b})$ folgt $(\sigma, \tau \in G)$, also genau dann, wenn $\gamma$ $\mathfrak{b}$-primitiv ist. — c) Es gibt ein $\mathfrak{b} \in V(K)$ derart, daß $\gamma$ $\mathfrak{b}$-primitiv ist; also ist $N = K[\gamma \cdot \mathfrak{b}]$; andererseits ist $K[\gamma \cdot \mathfrak{b}] \leqq \lambda_\gamma J^* \leqq N$, also $\lambda_\gamma J^* = N$. Für jedes $a^* \in I^*$ gilt $\sigma(\lambda_\gamma a^*) = \lambda_\gamma(\sigma^* a^*) = \lambda_\gamma a^*$ wegen a), also ist $\lambda_\gamma I^* \leqq K$. Schließlich ist

$$K \leqq \lambda_\gamma K \leqq \lambda_\gamma I^*.$$

Insbesondere folgt aus (3. 1), daß zu jedem $N \in E(K, \mathfrak{Y})$ ein $K$-Homomorphismus $\lambda$ von $I^*$ in $K$ existiert, der $F_{\mathfrak{b}}^*$ (für geeignetes $\mathfrak{b}$) in ein in $K[X]$ irreduzibles und separables Polynom überführt. Wir werden sehen, daß andererseits jedes $\lambda$ dieser Art eindeutig eine galoissche Erweiterung $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe bestimmt. Für den Beweis dieser Behauptung benötigen wir den folgenden Isomorphiesatz (vgl. [Kr] § 22 „Erster Homomorphiesatz" und [E] (1. 9)):

(3. 2) *Es sei $\tilde{K}$ der Quotientenkörper eines ganz-abgeschlossenen Ringes $\tilde{I}$, $\lambda$ ein Homomorphismus von $\tilde{I}$ in den Körper $K$ mit dem Kern $\mathfrak{p}$. Ferner sei $\tilde{F}$ ein Galoispolynom für die galoissche Erweiterung $\tilde{N} \mid \tilde{K}$. Vorausgesetzt, daß $\lambda\tilde{F}$ in $K[X]$ irreduzibel und separabel ist, gilt:*

a) *$\lambda\tilde{F}$ ist ein Galoispolynom für eine galoissche Erweiterung $N \mid K$ mit*

$$\mathrm{Gal}(N \mid K) \cong \mathrm{Gal}(\tilde{N} \mid \tilde{K}).$$

b) *Zu gegebenen Nullstellen $\tilde{\gamma}$ von $\tilde{F}$ und $\gamma$ von $\lambda\tilde{F}$ gibt es genau einen Homomorphismus $\lambda'$ von $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}[\tilde{\gamma}]$ in $N$, der $\lambda$ fortsetzt und $\gamma$ auf $\gamma$ abbildet.*

c) *Es existiert genau ein Isomorphismus $\varkappa$ von $\mathrm{Gal}(N \mid K)$ auf $\mathrm{Gal}(\tilde{N} \mid \tilde{K})$ derart, daß für alle $\tau \in \mathrm{Gal}(N \mid K)$ die Beschränkung des Homomorphismus $\lambda' \circ \varkappa\tau$ auf den Ring $\tilde{I}_{\mathfrak{p}}[\tilde{\gamma}]$ mit $\tau \circ \lambda'$ übereinstimmt.*

Wenden wir diesen Isomorphiesatz auf die Fundamentalerweiterung $N^* \mid K^*$ und ein geeignetes Fundamentalpolynom an, so erhalten wir den folgenden Satz:

(3. 3) **Satz.** *Es sei $\lambda$ ein $K$-Homomorphismus von $I^*$ in $K$ derart, daß (für geeignetes $\mathfrak{b} \in V(K)$) das Polynom $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ in $K[X]$ irreduzibel und separabel ist.*

*Dann ist $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ ein Galoispolynom einer galoisschen Erweiterung $N \mid K$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe.*

*Die Homomorphismen $\lambda'$ von $J^*$, die $\lambda$ fortsetzen, entsprechen eineindeutig den Nullstellen $\gamma$ von $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ durch die Beziehung $\lambda'(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}) = \gamma$; sie sind über $K$ konjugiert und bilden alle den Ring $J^*$ auf $N$ ab.*

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus (3. 2a). — Da $N^* = K^*[\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}]$ und $\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}$ ganz-abhängig von $I^*$ ist, gilt $J^* \leqq d^{*-1}\cdot\Sigma_{0\leq j\leq n} I^*\cdot(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b})^j$, wobei $d^*$ die Diskriminante des Polynoms $F_{\mathfrak{b}}^*$ bezeichne. Wir bezeichnen mit $I_\lambda^*$ bzw. $J_\lambda^*$ den Quotientenring von $I^*$ bzw. $J^*$ nach dem multiplikativen System $\{a^* \in I^* \mid \lambda a^* \neq 0\}$. Da $\lambda d^*$ als Diskriminante des separablen Polynoms $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ von Null verschieden ist, folgern wir $J_\lambda^* \leqq I_\lambda^*[\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}]$, und es gilt sogar das Gleichheitszeichen, weil $\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b} \in J_\lambda^*$ ist. Jeder Nullstelle $\gamma$ von $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ entspricht daher nach (3. 2b) genau ein Fortsetzungshomomorphismus $\lambda^+$ von $J_\lambda^*$ in $N$ derart, daß $\lambda^+(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}) = \gamma$ ist, und ersichtlich gilt $N = K[\gamma] \leqq \lambda^+ J^* \leqq \lambda^+ J_\lambda^* \leqq N$. Der Nullstelle $\sigma\gamma$ entspricht in gleicher Weise der Homomorphismus $\sigma\circ\lambda^+$ $(\sigma \in \mathrm{Gal}(N \mid K))$. — Wir brauchen nun nur noch zu zeigen, daß, außer den Beschränkungen $\lambda'$ der obengenannten Homomorphismen auf $J^*$, kein anderer Homomorphismus von $J^*$ existiert, der $\lambda$ fortsetzt. In der Tat, ein solcher Homomorphismus $\mu$ (etwa mit dem Kern $\mathfrak{q}$) ließe sich, da $J_\lambda^* \leqq J_{\mathfrak{q}}^*$ gilt, auf $J_\lambda^*$ fortsetzen und bildete $\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b}$ notwendigerweise auf eine Nullstelle von $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ ab.

Auf Grund dieses Satzes wissen wir jedoch noch nicht, ob der durch $\lambda$ eindeutig bestimmte Körper $N = \lambda' J^*$ der Menge $E(K, \mathfrak{P})$ angehört, insbesondere ob analog zu (3. 1) $\lambda'\mathfrak{t}$ ein primitiver $\Psi$-Vektor (für eine passende Darstellung $\Psi$) ist. Für das letztere ist notwendig, daß $\lambda'\mathfrak{t}$ zu $V_{\mathfrak{P}}(N)$ gehört; der folgende Zusatz zeigt, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

(3. 4) **Zusatz.** *Unter den Voraussetzungen von* (3. 3) *sei $\lambda'$ ein Homomorphismus von $J^*$ in $N$, der $\lambda$ fortsetzt und der Bedingung $\lambda'\mathfrak{t} \in V_{\mathfrak{P}}(\Omega)$ genügt.*

*Dann ist $\lambda'\mathfrak{t}$ ein $\mathfrak{b}$-primitiver $\Psi$-Vektor für die Darstellung $\Psi = \eta_{\mathfrak{t}}\circ\varkappa$ von $G = \mathrm{Gal}(N \mid K)$ auf $\mathfrak{P}$, wobei $\varkappa$ den nach* (3. 2) *bestimmten Isomorphismus von $G$ auf $G^*$ bezeichne.*

*Die Voraussetzung $\lambda'\mathfrak{t} \in V_{\mathfrak{P}}(\Omega)$ ist unabhängig von der Wahl des Fortsetzungshomomorphismus $\lambda'$.*

*Beweis.* Für alle $\tau \in G$ gilt $(\tau\circ\lambda')\,\mathfrak{t} = (\lambda'\circ\varkappa\tau)\,\mathfrak{t} = \lambda'\big((\Psi\tau)\,\mathfrak{t}\big)$. Da $\lambda'\mathfrak{t} \in V_{\mathfrak{P}}(N)$ ist, gilt $\mathfrak{z}(\lambda'\mathfrak{t}) = \lambda'(\mathfrak{z}(\mathfrak{t}))$ $(\mathfrak{z} \in \mathfrak{P})$, also $\tau(\lambda'\mathfrak{t}) = (\Psi\tau)\,(\lambda'\mathfrak{t})$ $(\tau \in G)$, also ist $\lambda'\mathfrak{t}$ ein $\Psi$-Vektor; $\lambda'\mathfrak{t}$ ist sogar $\mathfrak{b}$-primitiv, weil $(\lambda'\mathfrak{t})\cdot\mathfrak{b} = \lambda'(\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{b})$ eine Nullstelle des Galoispolynoms $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ ist. — Nach (2. 1a) ist auch $(\sigma\circ\lambda')\,\mathfrak{t} = (\Psi\sigma)\,(\lambda'\mathfrak{t})$ in $V_{\mathfrak{P}}(N)$ enthalten $(\sigma \in G)$, also genügt jeder Fortsetzungshomomorphismus $\lambda''$ von $\lambda$ der Bedingung $\lambda''\mathfrak{t} \in V_{\mathfrak{P}}(\Omega)$.

Wir benutzen nun die obenstehenden Sätze, um die zu $E(K, \mathfrak{P})$ gehörigen Körper $N$ durch gewisse Homomorphismen $\lambda$ von $I^*$ zu kennzeichnen. Hierzu betrachten wir für jedes $\mathfrak{b} \in V(K)$[4]) die Menge $H(K, \mathfrak{P}, \mathfrak{b})$ aller derjenigen $K$-Homomorphismen $\lambda$ von $I^*$ in $K$, für die $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ in $K[X]$ irreduzibel und separabel ist und $\lambda'\mathfrak{t}$ zu $V_{\mathfrak{P}}(\Omega)$ gehört (letztere Bedingung ist nach (3. 4) von der Wahl des Fortsetzungshomomorphismus $\lambda'$ unabhängig). Schließlich bezeichnen wir mit $H(K, \mathfrak{P})$ die Vereinigungsmenge $\bigcup_{\mathfrak{b}\in V(K)} H(K, \mathfrak{P}, \mathfrak{b})$. Dann folgt unmittelbar aus (3. 1), (3. 3), (3. 4) der folgende Satz:

(3. 5) **Kennzeichnungssatz.** *Die (von der Wahl der Fortsetzung $\lambda'$ des Homomorphismus $\lambda$ unabhängige) Zuordnung*

$$\mathfrak{Z}: \lambda \longrightarrow \lambda' J^* \qquad (\lambda \in H(K, \mathfrak{P}))$$

*bildet die Menge $H(K, \mathfrak{P})$ auf die Menge $E(K, \mathfrak{P})$ ab.*

---

[4]) Man kann sich hierbei auf die $\mathfrak{P}$-zulässigen $\mathfrak{b} \in V(K)$ beschränken, denn für die anderen ist $H(K, \mathfrak{P}, \mathfrak{b})$ sicher leer.

*Hierbei ist $\lambda F_{\mathfrak{b}}^*$ ein Galoispolynom für $\mathfrak{Z}\lambda \mid K$ genau dann, wenn $\lambda \in H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b})$ ist.*

Natürlich gilt $\mathfrak{Z}\lambda_1 = \mathfrak{Z}\lambda_2$ dann und nur dann, wenn $\lambda_1 F_{\mathfrak{b}_{(1)}}^*$ und $\lambda_2 F_{\mathfrak{b}_{(2)}}^*$ Galoispolynome für dieselbe Erweiterung $N \mid K$ sind ($\lambda_m \in H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b}_{(m)})$; $m = 1, 2$).

Aus dem Kennzeichnungssatz folgt unmittelbar:

(3. 6) **Existenzsatz.** *Es gilt $E(K, \mathfrak{Y}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $H(K, \mathfrak{Y}) \neq \emptyset$ ist.*

Durch diese beiden Sätze wird das Problem der Bestimmung der zu $E(K, \mathfrak{Y})$ gehörigen Körper auf eine Diskussion der $K$-Homomorphismen des Ringes $I^*$ auf den Körper $K$ zurückgeführt. Die Menge $H(K)$ *aller* solcher Homomorphismen läßt sich (mit Hilfe von (1. 1) und von bekannten Sätzen über ganz-abgeschlossene Ringe) leicht bestimmen: ordnet man jedem $\lambda$ seinen Kern zu, so erhält man eine eineindeutige Abbildung von $H(K)$ auf die Menge derjenigen maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von $I^*$, für die $K$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $I^*$ mod $\mathfrak{m}$ bildet. Viel schwieriger ist aber das Problem der Bestimmung der für die obige Kennzeichnung wichtigen Untermenge $H(K, \mathfrak{Y})$; selbst die Frage, ob diese Menge nicht leer ist, ist bis heute noch nicht einmal für Gruppen $\mathfrak{Y}$ linearer Operatoren gelöst worden. Sie läßt sich aber jedenfalls dann positiv entscheiden, wenn $K^*$ über $K$ rein-transzendent ist und über $K$ der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz gilt; letzteres trifft z. B. immer zu, wenn $K$ ein über seinem Primkörper endlich-erzeugbarer unendlicher Körper ist (vgl. [PS]).

(3. 7) **Satz.** *Es gelte über $K$ der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz und es sei $\mathfrak{Y}$ so beschaffen, daß $K^* \mid K$ rein-transzendent ist.*

*Dann ist $H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ für jedes $\mathfrak{Y}$-zulässige $\mathfrak{b} \in V(K)$.*

*Beweis.* Es sei $K^*$ der Quotientenkörper des Polynomringes $I_0 = K[v_1, \ldots, v_k]$, und es sei $w \in I_0$ so gewählt, daß alle $w \cdot (\sigma^* t_i)$ von $I_0$ ganz abhängen ($\sigma^* \in G^*$, $1 \leqq i \leqq k$). Ferner sei $I_w$ der Quotientenring von $I_0$ nach dem von $w$ erzeugten multiplikativen System; da $I_w$ ganz-abgeschlossen ist und $I^*$ von $I_w$ ganz abhängt, gilt $I^* \subseteqq I_w$. Jedem $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Y}$ ordnen wir das Produkt $z^* = \Pi_{\sigma^* \in G^*} \sigma^*(Z_0(\mathfrak{t})) = \Pi_{\mathfrak{y} \in \mathfrak{Y}} Z_0(\mathfrak{y}(\mathfrak{t}))$ zu; dieses ist ersichtlich ein von Null verschiedenes Element aus $I^*$, und dasselbe gilt für die Diskriminante $d^*$ des Polynoms $F_{\mathfrak{b}}^*$, wenn $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{Y}$-zulässig ist. Für genügend großes $r \geqq 0$ ist dann $w^r \cdot d^* \in I_0$, $w^r \cdot z^* \in I_0$ ($\mathfrak{z} \in \mathfrak{Y}$) und $w^r \cdot F_{\mathfrak{b}}^* \in I_0[X]$, also ist $w \cdot (w^r \cdot d^*) \cdot (\Pi_{\mathfrak{z} \in \mathfrak{Y}} w^r \cdot z^*) \cdot (w^r \cdot F_{\mathfrak{b}}^*)$ ein (über $K^*$ irreduzibles) Polynom $P(\mathfrak{v}; X) \in I_0[X]$. Nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz gibt es ein $\mathfrak{a} \in V(K)$ derart, daß $P(\mathfrak{a}; X)$ in $K[X]$ irreduzibel ist. Der durch $\lambda_0 v_i = a_i$ ($1 \leqq i \leqq k$) definierte $K$-Homomorphismus $\lambda_0$ von $I_0$ setzt sich, wegen $\lambda_0 w \neq 0$, eindeutig zu einem Homomorphismus $\lambda_w$ von $I_w$ in $K$ fort. Ersichtlich ist $\lambda_w d^* \neq 0$, $\lambda_w z^* \neq 0$ ($\mathfrak{z} \in \mathfrak{Y}$), und $\lambda_w F_{\mathfrak{b}}^*$ ist irreduzibel in $K[X]$ und sogar separabel, weil seine Diskriminante $\lambda_w d^*$ von Null verschieden ist. Es sei $\lambda$ die Beschränkung von $\lambda_w$ auf den Ring $I^*$; dann existiert nach (3. 3) ein Fortsetzungshomomorphismus $\lambda'$ von $\lambda$ auf $J^*$; dieser genügt, wegen $\Pi_{\mathfrak{y} \in \mathfrak{Y}} Z_0(\lambda'(\mathfrak{y}(\mathfrak{t}))) = \lambda' z^* = \lambda_w z^* \neq 0$, der Ungleichung $Z_0(\lambda' \mathfrak{t}) \neq 0$ ($\mathfrak{z} \in \mathfrak{Y}$), und sogar den Ungleichungen $Z_0(\lambda'(\mathfrak{y}(\mathfrak{t}))) = Z_0(\mathfrak{y}(\lambda' \mathfrak{t})) \neq 0$ ($\mathfrak{y} \in \mathfrak{Y}$). Also ist $\lambda \in H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b})$.

Die Voraussetzung, daß $K^* \mid K$ rein-transzendent ist, ist sicher dann erfüllt, wenn $k = 1$ ist (Lürothscher Satz). Ob sie für jede Gruppe $\mathfrak{Y}$ (mit $k \geqq 1$) gilt, ist (auch für Gruppen $\mathfrak{Y}$ linearer Operatoren) ein noch ungelöstes Problem.

## § 4. Endliche Gruppen linearer Operatoren[5]).

Wir bezeichnen mit $M(K)$ die Gruppe aller $k$-reihigen regulären Matrizen $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ über $K$. Dann ist die Abbildung

$$A \longrightarrow (\Sigma_{1 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,1}, \ldots, \Sigma_{1 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,k}) \qquad (A \in M(K))$$

ersichtlich ein Antiisomorphismus von $M(K)$ in die Gruppe $C(K)$, nämlich *auf* die Gruppe $L(K)$ aller *linearen Operatoren über $K$ (vom Grad $k$)*.

Für endliche Untergruppen $\mathfrak{Y}$ von $L(K)$ gilt natürlich $V_{\mathfrak{Y}}(L) = V(L)$, so daß in der Definition von $H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b})$ (§ 3) die Bedingung „$\lambda' \mathfrak{t} \in V_{\mathfrak{Y}}(\Omega)$" weggelassen werden kann. Außerdem ist ersichtlich $J^* = \tilde{J} = K[t_1, \ldots, t_k]$, und die Koeffizienten $f_v$ $(v \in V_m)$ des allgemeinen zu $\mathfrak{Y}$ gehörigen Fundamentalpolynoms $F^*_{\mathfrak{Y}}$ sind Formen (über $K$) vom Grad $m$ in $t_1, \ldots, t_k$ $(0 \leq m \leq n)$.

Besonders wichtig ist die Tatsache, daß im linearen Fall stets primitive Galoisvektoren existieren, wie Krull mit Hilfe einer Theorie von „Galoismatrizen" und „Galoisräumen" gezeigt hat (vgl. [Kr] § 24):

(4. 1) **Satz.** *Es sei $K$ ein unendlicher Körper, $\mathfrak{Y}$ eine endliche Untergruppe von $L(K)$, und $N \mid K$ eine galoissche Erweiterung mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe $G$.*

*Dann gibt es zu jeder Darstellung $\Psi$ von $G$ durch $\mathfrak{Y}$ und zu jedem $\mathfrak{Y}$-zulässigen $\mathfrak{b} \in V(K)$ einen $\mathfrak{b}$-primitiven $\Psi$-Vektor.*

Und aus diesem Satz folgt unmittelbar:

(4. 2) **Korollar.** *Es seien $K$ und $\mathfrak{Y}$ wie in* (4. 1). *Dann ist $E(K, \mathfrak{Y})$ die Menge aller über $K$ galoisschen Oberkörper mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe.*

Außerdem lassen sich auf Grund von (4. 1) der Kennzeichnungssatz (3. 5) und der Existenzsatz (3. 6) wie folgt verschärfen:

(4. 3) **Korollar.** *Es seien $K$ und $\mathfrak{Y}$ wie in* (4. 1) *und es sei $\mathfrak{b} \in V(K)$ $\mathfrak{Y}$-zulässig. Dann bildet die in* (3. 5) *definierte Zuordnung $\mathfrak{Z}$ die Menge $H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b})$ auf $E(K, \mathfrak{Y})$ ab.*

*Insbesondere ist $E(K, \mathfrak{Y}) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $H(K, \mathfrak{Y}, \mathfrak{b}) \neq \emptyset$ ist.*

Es genügt also im linearen Falle, ein einziges, mit Hilfe eines beliebigen $\mathfrak{Y}$-zulässigen $\mathfrak{b} \in V(K)$ gebildetes Fundamentalpolynom $F^*_{\mathfrak{b}}$ zu betrachten.

## § 5. Endliche Gruppen projektiver Operatoren[5]).

Wir bezeichnen hier mit $M(K)$ die Gruppe aller $(k+1)$-reihigen regulären Matrizen $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k}$ über $K$. Dann ist die Abbildung

$$A \longrightarrow \left(\frac{\Sigma_{0 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,1}}{\Sigma_{0 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,0}}, \ldots, \frac{\Sigma_{0 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,k}}{\Sigma_{0 \leq i \leq k} X_i \cdot a_{i,0}}\right) \qquad (\text{mit } X_0 = 1;\ A \in M(K))$$

ersichtlich ein Anti*homo*morphismus von $M(K)$ in die Gruppe $C(K)$, nämlich *auf* die Gruppe $P(K)$ aller *projektiven Operatoren über $K$ (vom Grad $k$)*. Dieser Antihomomorphismus hat den Kern $S(K) = \{(a \cdot \delta_{i,j})_{0 \leq i,j \leq k} \mid a \in K^{\cdot}\}$ (Skalarmatrizengruppe!) und induziert daher einen Antiisomorphismus von $\overline{M}(K) = M(K)/S(K)$ auf die Gruppe $P(K)$. Wir schreiben $\mathfrak{y} \longleftrightarrow \bar{A}$ bzw. $\mathfrak{Y} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{M}}$, wenn unter diesem Antiisomorphismus die Matrizenklasse $\bar{A} \in \overline{M}(K)$ dem Operator $\mathfrak{y} \in P(K)$ bzw. die Untergruppe $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{M}(K)$ der Untergruppe $\mathfrak{Y}$ von $P(K)$ entspricht.

---

[5]) Eine ausführliche Darstellung der hier ohne Beweise angegebenen Krullschen Resultate, eingeordnet in unsere allgemeine Theorie der Fundamentalpolynome, findet man in [E] § 4 bzw. §§ 6—8.

Für endliche Untergruppen $\mathfrak{Y}$ von $P(K)$ ist die Menge $V_{\mathfrak{Y}}(L)$ im allgemeinen von $V(L)$ verschieden; sie läßt sich aber in einfacherer Weise als im Allgemeinfall bestimmen, nämlich durch die Gleichung

$$V_{\mathfrak{Y}}(L) = \{\alpha \in V(L) \mid Y_0(\alpha) \neq 0 \ (\mathbf{y} \in \mathfrak{Y})\},$$

wie eine einfache Rechnung zeigt. Und hieraus folgt, daß auch im projektiven Fall in der Definition von $H(K, \mathfrak{Y}, \mathbf{b})$ (§ 3) die Bedingung „$\lambda' \mathbf{t} \in V_{\mathfrak{Y}}(\Omega)$" weggelassen werden kann; in der Tat gilt:

(5. 1) **Lemma.** *Es sei $\mathfrak{Y}$ eine endliche Untergruppe von $P(K)$, $G^* \longleftrightarrow \mathfrak{Y}$, und es sei $\lambda'$ ein K-Homomorphismus von $J^*$ in $L$. Dann ist $\lambda' \mathbf{t} \in V_{\mathfrak{Y}}(L)$.*

*Beweis.* Wenn ein $\mathbf{y} \in \mathfrak{Y}$ derart existiert, daß $Y_0(\lambda' \mathbf{t}) = 0$ ist, so gilt auch $Y_i(\lambda' \mathbf{t}) = \lambda'(y_i(\mathbf{t})) \cdot Y_0(\lambda' \mathbf{t}) = 0$ $(1 \leqq i \leqq k)$, also ist $(1, \lambda' t_1, \ldots, \lambda' t_k)$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $\Sigma_{0 \leqq i \leqq k} X_i \cdot a_{i,j} = 0$ $(0 \leqq j \leqq k)$, wobei $\mathbf{y} \longleftrightarrow \bar{A}$. Dies aber widerspricht der Regularität von $\bar{A}$.

Im Gegensatz zum linearen Fall enthält die mit einer Gruppe $\mathfrak{Y}$ projektiver Operatoren gebildete Menge $E(K, \mathfrak{Y})$ im allgemeinen nicht alle über $K$ galoisschen Erweiterungen $N$ mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe, wie die folgenden Betrachtungen zeigen.

Wir nennen eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{M}}$ von $\overline{M}(K)$ *zerlegbar*[6]) *über* $K$, falls $S(K)$ ein direkter Faktor ihrer *Originalgruppe* $\{A \in M(K) \mid A \cdot S(K) \in \overline{\mathfrak{M}}\}$ ist. Für jeden Oberkörper $L (\leqq \Omega)$ von $K$ soll $\overline{\mathfrak{M}}$ mit der ihr kanonisch entsprechenden isomorphen Untergruppe von $M(L) / S(L)$ identifiziert werden. Ist $\overline{\mathfrak{M}}$ über $K$ zerlegbar, dann auch über $L$, aber nicht notwendig umgekehrt. Wir nennen nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}$ *absolut unzerlegbar*, wenn sie über jedem Definitionskörper $L$ (d. h. über jedem Körper $L$ derart, daß alle $\bar{A} \in \overline{\mathfrak{M}}$ einen Repräsentanten $A \in M(L)$ besitzen) unzerlegbar ist. Wir wollen hier nur erwähnen, daß man zur Entscheidung, ob die endliche Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}$ absolut unzerlegbar ist, nur die ebenfalls endliche *m-modulare* Gruppe

$$\{A \in M(\Omega) \mid A \cdot S(\Omega) \in \overline{\mathfrak{M}}, \ (\det A)^m = 1\}$$

zu betrachten braucht, wobei $m$ ein Vielfaches der Ordnungen der Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}$ bezeichne. — In leichter Verallgemeinerung der Krullschen Betrachtungen ([Kr] § 28) läßt sich dann zeigen:

(5. 2) **Satz.** *Es sei $\overline{\mathfrak{M}}$ eine absolut unzerlegbare Untergruppe von $\overline{M}(K)$, und es sei $\mathfrak{Y} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{M}}$.*

*Dann existieren über $K$ endlich-erzeugbare Oberkörper $K_1$, $N_1$ derart, daß $N_1 \mid K_1$ galoissch mit zu $\mathfrak{Y}$ isomorpher Galoisgruppe ist, aber $N_1 \notin E(K_1, \mathbf{z}^{-1} \cdot \mathfrak{Y} \cdot \mathbf{z})$ für alle $\mathbf{z} \in P(K)$ gilt.*

Mit anderen Worten, für die in (5. 2) betrachtete Erweiterung $N_1 \mid K_1$ gibt es keine Darstellung $\Psi$ durch $\mathfrak{Y}$ oder durch eine zu $\mathfrak{Y}$ in $P(K)$ konjugierte Gruppe derart, daß ein primitiver $\Psi$-Vektor existiert. — Das bekannteste Beispiel einer absolut unzerlegbaren Gruppe ist die von F. Klein untersuchte Ikosaedergruppe.

Immerhin läßt sich für nicht-abelsche einfache Gruppen projektiver Operatoren die Existenz von primitiven Galoisvektoren stets durch eine Grundkörpererweiterung

[6]) „uneigentlich" im Sinne von [Kr] § 27.

(„Adjunktion von akzessorischen Irrationalitäten") erzwingen, wie F. Klein im Falle der Ikosaedergruppe und Krull, mit Hilfe einer Theorie „projektiver Galoismatrizen" und „Kleinscher Matrizen", allgemein gezeigt hat. In der Tat, ist $\mathfrak{G} \longleftrightarrow \overline{\mathfrak{M}}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}^\pi$ die der Matrizenklassengruppe $\overline{\mathsf{M}}_\pi^{-1} \cdot \overline{\mathfrak{M}} \cdot \overline{\mathsf{M}}_\pi$ zugeordnete Untergruppe von $\overline{M}(K)$, wobei $\pi$ eine beliebige Permutation von $\{0, 1, \ldots, k\}$ und $\overline{\mathsf{M}}_\pi$ die durch die Matrix $(\delta_{i,\pi j})_{0 \leq i, j \leq k}$ erzeugte Matrizenklasse bezeichne; dann gilt, in leichter Verallgemeinerung der Krullschen Ergebnisse ([Kr] §§ 27—28):

(5. 3) **Satz.** *Es sei $\mathfrak{G}$ eine nicht-abelsche einfache endliche Untergruppe von $\mathbf{P}(K)$ und $N \mid K$ eine galoissche Erweiterung mit zu $\mathfrak{G}$ isomorpher Galoisgruppe.*

*Dann existiert ein Polynom $H$ über $K$ vom Grad $k+1$ und eine Permutation $\pi$ von $\{0, 1, \ldots, k\}$ derart, daß $N' \in \mathbf{E}(K', \mathfrak{G}^\pi)$ gilt, wobei $K'$ bzw. $N'$ den Wurzelkörper für $H$ über $K$ bzw. über $N$ bezeichne.*

## § 6. Die Wittsche Gruppe.

Daß es interessante endliche Gruppen von Cremona-Operatoren gibt, die weder linear noch projektiv sind, zeigt das im folgenden diskutierte Beispiel.

Es sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, und es möge $\hat{+}$ bzw. $\hat{-}$ die in $\mathbf{V}(K)$ definierte *Wittsche Addition* bzw. *Subtraktion*

$$\mathbf{a} \hat{\pm} \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2 + R_2^{\pm}(a_1; b_1), \ldots, a_k \pm b_k + R_k^{\pm}(a_1, \ldots, a_{k-1}; b_1, \ldots, b_{k-1}))$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}(K))$$

bezeichnen, wobei $R_2^+, \ldots, R_k^+$ und $R_2^-, \ldots, R_k^-$ gewisse eindeutig bestimmte Polynome über dem Primkörper $P$ von $K$ sind [7]). Statt $\mathbf{a} \hat{+} \cdots \hat{+} \mathbf{a}$ ($n$-mal) schreiben wir kurz $n \hat{\cdot} \mathbf{a}$ und beachten, daß $p \hat{\cdot} \mathbf{a} = (0, a_1^p, \ldots, a_{k-1}^p)$ ist $(\mathbf{a} \in \mathbf{V}(K))$.

In bezug auf diese Operationen bildet $\mathbf{V}(K)$ eine additive Gruppe, die wir mit $\hat{\mathbf{V}}(K)$ bezeichnen wollen; insbesondere ist $\hat{\mathbf{V}}(P)$ eine zyklische Untergruppe von $\hat{\mathbf{V}}(K)$ von der Ordnung $p^k$, die von dem Vektor $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0)$ erzeugt wird.

Wir betrachten nun die durch den Operator

$$\mathbf{w} = \mathbf{e} \hat{+} \mathbf{1} = (X_1 + 1,\ X_2 + R_2^+(X_1; 1), \ldots, X_k + R_k^+(X_1, \ldots, X_{k-1}; 1, 0, \ldots, 0))$$

erzeugte Gruppe $\mathfrak{W}$ von Cremona-Operatoren, die wir als *Wittsche Gruppe über $K$ (vom Grad $k$)* bezeichnen wollen. Ersichtlich ist $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{e} \hat{+} \mathbf{1}) \hat{+} \mathbf{1} = \mathbf{e} \hat{+} 2 \hat{\cdot} \mathbf{1}$ [8]), allgemein $\mathbf{w}^n = \mathbf{e} \hat{+} n \hat{\cdot} \mathbf{1}$; insbesondere ist $\mathbf{w}^n = \mathbf{e}$, genau wenn $n$ ein Vielfaches von $p^k$ ist. Also ist $\mathfrak{W}$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^k$.

Auf diese Gruppe $\mathfrak{W}$ wenden wir nun die Betrachtungen von §§ 1—3 an. Ersichtlich ist $\mathbf{V}_{\mathfrak{W}}(L) = \mathbf{V}(L)$, und wir können deshalb wieder in der Definition von $\mathbf{H}(K, \mathfrak{W}, \mathbf{b})$ die Bedingung „$\lambda' \mathbf{t} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{W}}(\Omega)$" weglassen. Ferner ist offenbar $J^* = \tilde{J} = K[t_1, \ldots, t_k]$. — Für die Berechnung des Körpers $K^*$, des Ringes $I^*$ und der Mengen $\mathbf{H}(K, \mathfrak{W})$ und $\mathbf{E}(K, \mathfrak{W})$ bedienen wir uns des folgenden von Witt bewiesenen Satzes.

Wie in [W] sei mit $\wp$ die durch

$$\wp(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (\alpha_1^p, \ldots, \alpha_k^p) \hat{-} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (\alpha_i \in \Omega)$$

---

[7]) Zum Beweis dieser und der folgenden Behauptungen vgl. [W].

[8]) Hierbei bezeichnet $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ natürlich die Operatormultiplikation $\mathbf{w}(\mathbf{w})$, nicht etwa die in $\mathbf{V}(K(X_1, \ldots, X_k))$ ebenfalls definierbare Wittsche Multiplikation.

definierte Abbildung von $V(\Omega)$ in sich bezeichnet; sie induziert für jeden Unterkörper $L$ von $\Omega$ einen Endomorphismus der Gruppe $\hat{V}(L)$ mit dem Kern $\hat{V}(P)$. Für jedes $\mathbf{a} \in V(K)$ bezeichnen wir mit $\wp^{-1}\mathbf{a}$ die Menge $\{\alpha \in V(\Omega) \mid \wp\alpha = \mathbf{a}\}$; ist $\alpha \in \wp^{-1}\mathbf{a}$, so ist ersichtlich $\wp^{-1}\mathbf{a} = \{\alpha \hat{+} \mathbf{d} \mid \mathbf{d} \in V(P)\}$. Schließlich sei $\wp K = \{a^p - a \mid a \in K\}$ und $V_\wp(K) = \{\mathbf{c} \in V(K) \mid c_1 \notin \wp K\}$. Dann gilt (vgl. [W] Satz 13):

(6. 1) **Wittscher Satz.** *Die (von der Wahl des Vektors $\gamma \in \wp^{-1}\mathbf{c}$ unabhängige) Zuordnung*

$$\mathbf{c} \longrightarrow K(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \qquad (\mathbf{c} \in V_\wp(K))$$

*bildet die Menge $V_\wp(K)$ auf die Menge aller über $K$ vom Grad $p^k$ zyklischen Oberkörper ab.*

*Hierbei definiert die Gleichung $\varrho\gamma = \gamma \hat{+} \mathbf{1}$ einen die Galoisgruppe von $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \mid K$ erzeugenden $K$-Automorphismus $\varrho$.*

Auf Grund von (6. 1) können wir zunächst $I^*$ und $K^*$ bestimmen:

(6. 2) **Satz.** *Es sei $G^* \longleftrightarrow \mathfrak{W}$ und $\mathbf{s} = \wp\mathbf{t}$. — Dann ist*

$$K^* = K(s_1, \ldots, s_k) \text{ und } I^* = K[s_1, \ldots, s_k].$$

*Beweis.* Für $\varrho^* \longleftrightarrow \mathbf{w}$ gilt $\varrho^*\mathbf{s} = \wp(\varrho^*\mathbf{t}) = \wp(\mathbf{t} \hat{+} \mathbf{1}) = \mathbf{s}$, also $\mathbf{s} \in V(K^*)$, also $K(s_1, \ldots, s_k) \subseteq K^*$. Andererseits ist nach (6. 1) $[N^* : K(s_1, \ldots, s_k)] = p^k$ (weil $s_1 \notin \wp K(s_1, \ldots, s_k)$), also $K(s_1, \ldots, s_k) = K^*$. — Ersichtlich ist $K[s_1, \ldots, s_k] \subseteq K^* \cap J^* = I^*$. Andererseits ist wegen $\wp\mathbf{t} = \mathbf{s}$ das Element $t_i$ von $K[s_1, \ldots, s_i, t_1, \ldots, t_{i-1}]$ ganz-abhängig $(1 \leqq i \leqq k)$, also hängt $J^*$, und damit auch $I^*$, von $K[s_1, \ldots, s_k]$ ganz ab. Da $K[s_1, \ldots, s_k]$ in $K^*$ ganz-abgeschlossen ist, gilt $I^* \subseteq K[s_1, \ldots, s_k]$.

Weiter folgt aus (6. 1), daß jeder über $K$ vom Grad $p^k$ zyklische Oberkörper $N$ einen primitiven $\Psi$-Vektor (für eine geeignete Darstellung $\Psi$ von $\mathrm{Gal}(N \mid K)$ durch $\mathfrak{W}$) besitzt; in der Tat gilt:

(6. 3) **Lemma.** *Es sei $N \mid K$ zyklisch vom Grad $p^k$, $\gamma \in V(N)$, und es gelte, für einen die Galoisgruppe von $N \mid K$ erzeugenden $K$-Automorphismus $\varrho$ von $N$, die Gleichung $\varrho\gamma = \gamma \hat{+} \mathbf{1}$.*

*Dann ist $\gamma$ ein $\Psi$-Vektor in bezug auf die Darstellung $\Psi : \varrho^m \to \mathbf{w}^m$ $(0 \leqq m < p^k)$.*

*Beweis.* Ersichtlich ist $\Psi$ eine Darstellung von $\mathrm{Gal}(N \mid K)$ durch $\mathfrak{W}$, und es gilt $\varrho^m\gamma = \gamma \hat{+} m \hat{\cdot} \mathbf{1} = \mathbf{w}^m(\gamma)$ $(0 \leqq m < p^k)$.

Aus (6. 1) folgt damit unmittelbar:

(6. 4) **Satz.** *$E(K, \mathfrak{W})$ besteht aus allen über $K$ vom Grad $p^k$ zyklischen Oberkörpern.*

Wir wollen nun noch die Menge $H(K, \mathfrak{W})$ explizit bestimmen. Zunächst erhalten wir durch das folgende Lemma einen Überblick über die Menge $H(K)$ *aller* $K$-Homomorphismen von $I^*$ in $K$ und über deren Fortsetzungen auf den Ring $J^*$.

(6. 5) **Lemma.** a) *Es bezeichne $\lambda_{(\mathbf{a})}$ den durch $\lambda_{(\mathbf{a})}\mathbf{s} = \mathbf{a}$ bestimmten $K$-Homomorphismus von $I^*$ in $K$. Dann ist die Zuordnung $\mathbf{a} \to \lambda_{(\mathbf{a})}$ $(\mathbf{a} \in V(K))$ eine eineindeutige Abbildung von $V(K)$ auf die Menge $H(K)$ aller $K$-Homomorphismen von $I^*$ in $K$.*

b) *$\{\lambda_\alpha \mid \alpha \in \wp^{-1}\mathbf{a}\}$*[9]) *ist die Menge aller Homomorphismen von $J^*$ in $\Omega$, die den Homomorphismus $\lambda_{(\mathbf{a})}$ fortsetzen; sie alle bilden den Ring $J^*$ auf denselben Körper $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ ab.*

*Beweis.* a) ist wegen $I^* = K[s_1, \ldots, s_k]$ trivial. — b) Es gilt $\lambda_\alpha\mathbf{s} = \wp(\lambda_\alpha\mathbf{t}) = \wp\alpha = \mathbf{a}$, also ist $\lambda_\alpha$ eine Fortsetzung von $\lambda_{(\mathbf{a})}$. Ist andererseits $\lambda'$ ein Homomorphismus von $J^*$, der $\lambda_{(\mathbf{a})}$ fortsetzt, so gilt $\wp(\lambda'\mathbf{t}) = \lambda'\mathbf{s} = \mathbf{a}$, also $\lambda'\mathbf{t} \in \wp^{-1}\mathbf{a}$.

---

[9]) Definition von $\lambda_\alpha$ in (2. 2a).

Mit Hilfe des Wittschen Satzes zeigen wir nun:

(6. 6) **Satz.** *Ist $K$ unendlich, so gilt* $H(K, \mathfrak{W}) = \{\lambda_{(\mathbf{a})} \mid \mathbf{a} \in V_{\wp}(K)\}$.

*Beweis.* Es sei $\lambda_{(\mathbf{a})} \in H(K, \mathfrak{W})$, $\alpha \in \wp^{-1}\mathbf{a}$. Dann ist nach (3. 3) und (6. 5b) $\lambda_\alpha J^* = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ ein zyklischer Oberkörper von $K$ vom Grad $p^k$. Wäre $a_1 \in \wp K$, so gälte $\alpha_1^p - \alpha_1 = a_1 = b^p - b$ für ein $b \in K$, also $\alpha_1 = b + d$ für ein $d \in P$. Dann wäre aber $K(\alpha_1) = K$ und wegen $[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})] \leqq p$ $(2 \leqq i \leqq k)$ sicher $[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) : K] < p^k$, was unmöglich ist. — Andererseits sei $\mathbf{a} \in V_{\wp}(K)$. Dann ist nach (6. 1) und (6. 3) jedes $\alpha \in \wp^{-1}\mathbf{a}$ ein primitiver $\Psi$-Vektor (für eine geeignete Darstellung $\Psi$). Da $K$ unendlich ist, existiert ein $\mathbf{b} \in V(K)$ derart, daß $\alpha$ $\mathbf{b}$-primitiv ist, also ist $\lambda_{(\mathbf{a})} F_{\mathbf{b}}^* = \lambda_\alpha F_{\mathbf{b}}^*$ irreduzibel in $K[X]$ und separabel ((3. 1b)!).

Wir bemerken noch, daß der erste Teil des Kennzeichnungssatzes (3. 5), zusammen mit den Aussagen (6. 4) bis (6. 6), dem ersten Teil des Wittschen Satzes genau äquivalent ist.

Auf eine Ausrechnung des zu $\mathfrak{W}$ gehörigen allgemeinen Fundamentalpolynoms

$$F_{\mathbf{u}}^* = \Pi_{0 \leqq m < p^k} \left(X - (\mathbf{t} \hat{+} m \hat{\cdot} \mathbf{1}) \cdot \mathbf{u}\right) \in K[s, \ldots, s_k, u_1, \ldots, u_k; X]$$

sowie auf eine Diskussion der Frage, welche Vektoren $\mathbf{b} \in V(K)$ $\mathfrak{W}$-zulässig sind, wollen wir verzichten.

## Literaturverzeichnis.


[AS] *E. Artin* und *O. Schreier*, Über eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. Abh. Math. Sem. Hamburg **5** (1927), 225—231.

[E] *O. Endler*, Sôbre a resolução de equações algébricas e o problema inverso da teoria de Galois. Erscheint demnächst in den Notas de Matemática, Rio de Janeiro (mimiogr.).

[Kl] *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade. Leipzig, 1884.

[Kr] *W. Krull*, Elementare und Klassische Algebra. II. Band. Sammlung Göschen, Berlin 1959.

[PS] *G. Preuss* und *F. K. Schmidt*, Über den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz. Mathematische Nachrichten **4** (1950), 348—365.

[W] *E. Witt*, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik $p$ vom Grad $p^n$. Struktur diskret bewerteter perfekter Körper mit vollkommenem Restklassenkörper der Charakteristik $p$. J. reine angew. Math. **176** (1937), 126—140.


Eingegangen 13. November 1959.

# Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen.

Von *Ernst Kunz* in Heidelberg.

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

---

Der Dedekindsche Differentensatz der algebraischen Zahlentheorie besagt bekanntlich: In der (Dedekindschen) Differente der Hauptordnung $R$ eines endlichen algebraischen Zahlkörpers $K$ über der Hauptordnung $P$ eines Unterkörpers $k$ treten genau die bezüglich $P$ verzweigten Primideale von $R$ als Teiler auf, und zwar mit dem Exponenten $e-1$, wenn der Verzweigungsexponent $e$ nicht durch die Charakteristik des Restklassenkörpers teilbar ist, sonst mit einem Exponenten, der größer als $e-1$ ist. Ein Primideal $\mathfrak{P}$ aus $R$ heißt dabei bezüglich $P$ verzweigt, wenn $\mathfrak{P}$ in der Zerlegung von $(\mathfrak{P} \frown P)\,R$ in ein Potenzprodukt von Primidealen mit einem Exponenten $e > 1$ auftritt. $e$ heißt Verzweigungsexponent.

Von diesem Satz sind mehrere Verallgemeinerungen bekannt. Zunächst brauchen $k$ und $K$ nicht Zahlkörper zu sein, sondern es genügt, daß $k$ der Quotientenkörper eines Dedekindrings (d. h. eines Integritätsbereichs, in dem jedes Ideal eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist), $K$ eine endliche separable algebraische Erweiterung von $k$ und $R$ die Menge aller bezüglich $P$ ganzen Elemente von $K$ ist. Außer den verzweigten Primidealen gehen dann auch noch die Primideale mit inseparablem Restklassenkörper in der Differente auf, und zwar stets mit einem Exponenten, der größer als $e-1$ ist.

In dem zuletzt genannten Fall kann man die Voraussetzung, daß $P$ ein Dedekindring sein soll, auch abschwächen zu der Voraussetzung: In $P$ gilt die van der Waerden-Artinsche Idealtheorie (d. h. jedes Ideal ist quasigleich einem Potenzprodukt von Primidealen). Dann gilt der entsprechende Differentensatz, wenn nur an Stelle der Gleichheit die Quasigleichheit zugrunde gelegt wird.

Schließlich haben E. Noether und H. Grell ein Analogon zum Differentensatz auch für den Fall bewiesen (vgl. [2], S. 647), daß $P$ zwar ein Dedekindring ist, der Ring $R$ aber nur eine Ordnung über $P$, d. h. ein endlicher $P$-Modul. Jedes Ideal aus $R$ läßt sich dann eindeutig als Produkt teilerfremder Primärideale schreiben. Ein Primideal $\mathfrak{P}$ heißt verzweigt, wenn das zu $\mathfrak{P}$ gehörige Primärideal in der Zerlegung von $(\mathfrak{P} \frown P)R$ von $\mathfrak{P}$ verschieden ist. Der unter der Voraussetzung, daß keine inseparablen Restklassenkörper auftreten, bewiesene Satz sagt aus: Die zu den Primäridealen der Zerlegung der Differente gehörigen Primideale sind gerade die verzweigten Primideale von $R$ über $P$.

In der folgenden Arbeit soll gezeigt werden, daß alle diese Sätze, wenn man von der jeweiligen Exponentenaussage absieht und nur auf die Primidealteiler achtet, als Spezialfälle in einem viel allgemeineren Satz enthalten sind.

In diesem allgemeineren Satz wird allerdings die mit Hilfe des Komplementärmoduls definierte Dedekindsche Differente durch die aus dem Differentialmodul gewonnene 0-te Kählersche Differente ersetzt. Der zu beweisende Satz besagt, daß die 0-te Kählersche Differente eines beliebigen Ringes $R$ über einem beliebigen Ring $P$, wenn

sie existiert, immer genau von den Primidealen von $R$ geteilt wird, die nicht träge bezüglich $P$ sind. Dabei wird der Begriff der Trägheit eines Ideals von $R$ über $P$ so für beliebige Ringe $R$, $P$ definiert, daß er in den oben aufgezählten Fällen mit dem gewöhnlichen Trägheitsbegriff zusammenfällt. Dort heißt ein Primideal träge, wenn es weder verzweigt ist, noch einen inseparablen Restklassenkörper besitzt.

Die Kählersche Differente existiert in viel allgemeineren Ringen als sie in den obigen Beispielen auftreten. In den betrachteten Ringen stimmt die 0-te Kählersche Differente mit der Dedekindschen Differente überein oder hat, wie in § 5 gezeigt werden wird, wenigstens dieselben Primidealteiler wie die Dedekindsche Differente. Aus diesem Grunde sind die erwähnten Sätze, von der Exponentenaussage abgesehen, Spezialfälle des allgemeineren Satzes.

Der allgemeine Satz besitzt seine hauptsächliche Bedeutung, wenn in $R$ die Teilerkettenbedingung für Ideale erfüllt ist, weil sich dann der verallgemeinerte Trägheitsbegriff sehr eng an den klassischen anlehnt, was bei noch allgemeineren Ringen nicht mehr der Fall zu sein braucht.

Neben den Primidealteilern der 0-ten Kählerschen Differente werden auch die aller höheren Kählerschen Differenten arithmetisch charakterisiert werden. Die Beweise werden zunächst lokal geführt; der globale Fall ergibt sich dann leicht. Der entscheidende Teil des lokalen Beweises besteht darin, den Rang des Differentialmoduls eines Stellenrings $R$ über einem beliebigen Grundring $P$ zu bestimmen. Die genaue Bestimmung des Ranges wird dadurch möglich, daß man nach einer Idee von F. K. Schmidt den Zwischenring $P[R^p]$ einführt, wobei $p$ die Charakteristik des Restklassenkörpers von $R$ ist. Der Rangsatz verschärft die Abschätzungen von Roquette (vgl. [7], VII, 5) und Kähler ([4], 290). Er wurde im Fall diskreter Bewertungsringe von F. K. Schmidt in einem Vortrag auf dem internationalen österreichischen Mathematikerkongreß 1956 entwickelt. Zum Beweis des Rangsatzes wird wie bei Roquette die Tatsache ausgenutzt, daß es genügt, den Rang des Differentialmoduls eines geeigneten Restklassenrings von $R$ zu bestimmen.

Als eine unmittelbare Folgerung aus den Differentensätzen ergibt sich der in der algebraischen Geometrie als Kriterium von Zariski bekannte Satz (vgl. [9], S. 74) in folgender Form: In der ersten von 0 verschiedenen Kählerschen Differente einer affinen $k$-Algebra $R$ ($k$ beliebiger Körper) über $P = k^p$ ($p = \text{Char. } k$, $k^0 = k$) gehen genau die Primideale von $R$ auf, für die der zugehörige Stellenring nicht regulär ist. Für den Fall separabler Restklassenkörper über $k$ findet sich das Kriterium in ähnlicher Formulierung auch schon bei Kähler ([4], 304).

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der von E. Noether eingeführten Differente (vgl. [5]). Sie kann für einen beliebigen kommutativen unitären Ring $R$ über einem beliebigen Unterring $P$ mit demselben Einselement definiert werden und wird ähnlich wie die Kählerschen Differenten durch einen gewissen Differentiationsprozeß gewonnen. E. Noether hat gezeigt, daß ihre Differente in Spezialfällen mit der Dedekindschen Differente übereinstimmt. Ein späteres Beispiel wird zeigen, daß es auch Fälle gibt, in denen keine Übereinstimmung vorliegt. Die Frage, ob Noethersche und Kählersche Differente immer übereinstimmen, soweit sie beide definiert sind, wird ebenfalls verneint. Es kann aber für eine sehr weite Klasse von Ringen (allen, die aus ihrem Grundring $P$ durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente und anschließende Nenneraufnahme hervorgehen) bewiesen werden, daß die Noethersche und die 0-te Kählersche Differente dieselben Primidealteiler besitzen. In diesen Ringen gilt dann der Differentensatz auch für die Noethersche Differente und, wo sie gleich (oder quasigleich) der Dedekindschen Differente ist, auch für diese.

## § 1. Grundlagen über den Differentialmodul und die Kählerschen Differenten.

In diesem Paragraphen werden einige Grundtatsachen über den Differentialmodul und die Kählerschen Differenten zusammengestellt, soweit sie in der Arbeit benötigt werden. Während der ganzen Arbeit sollen $R$ und $P$ zwei kommutative unitäre Ringe sein, wobei $P$ in $R$ enthalten ist und $P$ und $R$ dasselbe Einselement besitzen. Wir bezeichnen $P$ als den *Grundring*, $R$ als *Erweiterungsring*.

Unter einer Derivation von $R$ über $P$ versteht man eine Abbildung $D$ von $R$ in einen $R$-Modul $M$ mit folgenden Eigenschaften:

$\alpha$) Sind $a, b$ beliebige Elemente aus $R$, so ist

$$D(a+b) = D(a) + D(b),$$
$$D(a \cdot b) = aD(b) + bD(a).$$

$\beta$) Ist $\varrho$ ein beliebiges Element aus $P$, so ist

$$D(\varrho) = 0.$$

Bekanntlich gibt es zu jedem Paar $(R, P)$ eine universelle Derivation $d\colon R \to M$ von $R$ über $P$, so daß also

a) $M$ von den Elementen $d(r)$ mit $r \in R$ erzeugt wird,

b) wenn $D\colon R \to N$ eine beliebige Derivation von $R$ über $P$ in einen $R$-Modul $N$ ist, $D$ in der Form $D = h \circ d$ gewonnen werden kann, wobei $h\colon M \to N$ eine $R$-lineare Abbildung ist. $d$ heißt *Differentiation* von $R$ über $P$, die Elemente $d(r) = dr$ *Differentiale*, der zugehörige Modul $M$ *Differentialmodul von $R$ über $P$*. Er ist bis auf $R$-Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir werden den Differentialmodul eines Ringes $R$ über einem Grundring $P$ mit $M\left(\frac{R}{P}\right)$ bezeichnen, — wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, auch kurz mit $M$.

Im Verlauf dieser Arbeit werden isomorphe Ringe und Moduln fast immer identifiziert werden dürfen. Wir schreiben daher für die Isomorphie das Gleichheitszeichen.

Die Berechnung von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ ist auf folgende Weise möglich: Man hat $R$ darzustellen als Restklassenring eines Polynomrings über $P$ in einem System von Unbestimmten $X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$:

$$R = P[X_\lambda]/\mathfrak{n}.$$

Aus dem Kern $\mathfrak{n}$ hat man ein Erzeugendensystem $F_\nu(X_\lambda)$ herauszugreifen $(\nu \in N)$. Bildet man den freien $R$-Modul mit der Basis $\{dX_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, also $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda$, und in ihm den Untermodul $M_0$, der von allen Elementen der Form $\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\lambda} dX_\lambda$ $(\nu \in N)$ erzeugt wird, so ist

$$M\left(\frac{R}{P}\right) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} RdX_\lambda / M_0.$$

$\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\lambda}$ bedeutet dabei: Man hat $F_\nu$ formal partiell nach $X_\lambda$ abzuleiten und dann zur Restklasse mod $\mathfrak{n}$ überzugehen, d. h. überall $X_\lambda$ durch $x_\lambda = X_\lambda + \mathfrak{n}$ zu ersetzen. Für die Differentiation $d$ gilt: $dx_\lambda = dX_\lambda + M_0$.

Wir interessieren uns jetzt dafür, wie sich der Differentialmodul verhält, wenn man die Ringe $R$, $P$ epimorph abbildet, wenn man den Grundring $P$ erweitert oder wenn man zu Quotientenringen übergeht.

1. *Epimorphe Abbildung*: Es sei $\dot{R} = R/\mathfrak{n}$, $\dot{P} = P/\mathfrak{n} \cap P$, wobei $\mathfrak{n}$ der Kern des Epimorphismus ist. Dann ist

$$M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) = M\left(\frac{R}{P}\right)/\langle Rd\mathfrak{n}\rangle,$$

wobei mit $\langle Rd\mathfrak{n}\rangle$ der von allen Elementen $rdn$ mit $r \in R$, $n \in \mathfrak{n}$ erzeugte Untermodul von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ bezeichnet ist. Für die Differentiation $\dot{d}$ von $\dot{R}$ über $\dot{P}$ gilt: $\dot{d}\dot{r} = dr + \langle Rd\mathfrak{n}\rangle$ (vgl. [3], S. 125). Wegen $ndr = d(rn) - rdn$ ist $\mathfrak{n}M\left(\frac{R}{P}\right) \leqq \langle Rd\mathfrak{n}\rangle$. Für manche Überlegungen ist es zweckmäßig, zuerst zu $M\left(\frac{R}{P}\right)/\mathfrak{n}M\left(\frac{R}{P}\right)$ überzugehen und dann erst zu $M\left(\frac{R}{P}\right)/\langle Rd\mathfrak{n}\rangle$, weshalb man häufig auch

$$M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) = M\left(\frac{R}{P}\right)/\langle \mathfrak{n}M\left(\frac{R}{P}\right), Rd\mathfrak{n}\rangle$$

schreibt.

2. *Erweiterung des Grundrings*: Es sei $P^*$ ein Zwischenring $P \leqq P^* \leqq R$. Dann ist

$$M\left(\frac{R}{P^*}\right) = M\left(\frac{R}{P}\right)/\langle RdP^*\rangle,$$

wobei $\langle RdP^*\rangle$ der von allen Elementen $rd\varrho^*$ mit $r \in R$, $\varrho^* \in P^*$ erzeugte Untermodul von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ ist. Für die Differentiation $d^*$ von $R$ über $P^*$ gilt $d^*r = dr + \langle RdP^*\rangle$ (vgl. [3], S. 104).

3. *Quotientenringbildung*: Es sei $S$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $R$, welche die Null nicht enthält. Unter dem (verallgemeinerten) Quotientenring $R_S$ von $R$ mit der Nennermenge $S$ versteht man die Menge aller Paare $\frac{r}{s}$ mit $r \in R$, $s \in S$, für die die Gleichheit wie folgt definiert ist: Es soll $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ genau dann sein, wenn es ein $s'' \in S$ derart gibt, daß $s''s'r = s''sr'$ ist, während Addition und Multiplikation nach den üblichen Regeln der Bruchrechnung erklärt sind.

Die Abbildung $r \to \frac{rs}{s}$ definiert einen Homomorphismus von $R$ in $R_S$, dessen Kern $\mathfrak{n}$ aus allen Elementen $r \in R$ besteht, für die es ein $s \in S$ mit $sr = 0$ gibt. Wir schreiben für das Element $\frac{rs}{s} \in R_S$ auch einfach $r$ und beachten, daß in $R_S$ genau dann $r = r'$ ist, wenn $r \equiv r' \bmod \mathfrak{n}$ in $R$ gilt. Da somit für die Elemente aus $R_S$ eine Multiplikation mit den Elementen von $R$ definiert ist, wird $R_S$ zur $R$-Algebra.

$P_S$ sei der Unterring von $R_S$, der aus allen Elementen $\frac{\varrho}{\sigma}$ mit $\varrho \in P$, $\sigma \in S \cap P$ besteht. Dann gilt:

$$M\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right).$$

Ist $\varphi\colon M \to R_S \otimes_R M$ die durch $\varphi(m) = 1 \otimes m$ erklärte universelle $R_S$-Einbettung von $M$, so gilt für die Differentiation $D$ von $R_S$ über $P_S$: $D\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s}\,\varphi d(r) - \frac{r}{s^2}\,\varphi d(s)$.

*Beweis*: Daß $D$ eine Derivation von $R_S$ über $P_S$ in den $R_S$-Modul $R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right)$ ist, kann man leicht nachrechnen. Ist $D'\colon R_S \to N$ eine beliebige Derivation von $R_S$ über $P_S$

in einem $R_S$-Modul $N$, so gilt $D'\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s} D'(r) - \frac{r}{s^2} D'(s)$. $D'$ angewandt auf die Elemente $r \in R_S$ liefert eine Derivation $d'$ von $R$ über $P$ in $N$. Daher gibt es eine $R$-lineare Abbildung $h: M \to N$ mit $d' = h \circ d$. Nach Definition der universellen $R_S$-Einbettung gibt es dann aber auch eine $R_S$-lineare Abbildung $H: R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right) \to N$ mit $h = H \circ \varphi$. Somit gilt $d' = H \circ \varphi \circ d$.

Nun ist aber

$$D'\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s} D'(r) - \frac{r}{s^2} D'(s) = \frac{1}{s} d'(r) - \frac{r}{s^2} d'(s) = \frac{1}{s} H \circ \varphi \circ d(r) - \frac{r}{s} H \circ \varphi \circ d(s)$$
$$= H\left(\frac{1}{s} \varphi d(r) - \frac{r}{s^2} \varphi d(s)\right) = HD\left(\frac{r}{s}\right)$$

für alle $r \in R$, $s \in S$. Es ist also $D' = H \circ D$. Da außerdem $R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right)$ als $R_S$-Modul sicher von den Elementen $D(r)$ erzeugt wird, ist $D$ universelle Derivation, was zu beweisen war.

Wenn der Differentialmodul $M\left(\frac{R}{P}\right)$ endlich erzeugt ist, können die Kählerschen Differenten von $R$ über $P$ gebildet werden. Um zu ihnen zu gelangen, betrachten wir zunächst einen beliebigen endlich erzeugten $R$-Modul

$$M = Rw_1 + \cdots + Rw_n.$$

Wir stellen ihn als Restklassenmodul eines freien $R$-Moduls nach einem Untermodul $M_0$ dar:

$$M = (Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_n)/M_0. \tag{1}$$

$M_0$ werde von den Elementen $m_\lambda = r_{1\lambda} x_1 + \cdots + r_{n\lambda} x_n (\lambda \in \Lambda)$ erzeugt. Unter dem $\nu$-ten Fittingschen Determinantenideal $d_\nu(M)$ versteht man für $\nu < n$ das Ideal in $R$, welches von allen $(n - \nu)$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$(r_{i\lambda}) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \lambda \in \Lambda) \tag{2}$$

erzeugt wird, für $\nu \geqq n$ das Einheitsideal von $R$.

Fitting hat gezeigt, daß seine Determinantenideale Invarianten des Moduls $M$ sind (vgl. [1], S. 197). Es gilt

$$d_0(M) \leqq d_1(M) \leqq d_2(M) \leqq \cdots.$$

Unter den Kählerschen Differenten $d_\nu\left(\frac{R}{P}\right)$ von $R$ über $P$ versteht man nun die Fittingschen Determinantenideale des Differentialmoduls von $R$ über $P$:

$$d_\nu\left(\frac{R}{P}\right) = d_\nu\left(M\left(\frac{R}{P}\right)\right) \qquad \nu = 0, 1, \ldots.$$

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir für $d_\nu\left(\frac{R}{P}\right)$ auch kurz $d_\nu$.

Wie verhalten sich die Kählerschen Differenten beim Übergang zum (verallgemeinerten) Quotientenring?

Wenn $M\left(\frac{R}{P}\right)$ eine Darstellung (1) besitzt, dann folgt nach 3:

$$M\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right) = R_S \otimes_R (Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_n/M_0)$$
$$= [R_S \otimes_R (Rx_1 \oplus \cdots \oplus Rx_n)]/R_S \otimes M_0 = R_S x_1 \oplus \cdots \oplus R_S x_n / R_S M_0,$$

wenn $R_S M_0$ den von den Elementen aus $M_0$ in $R_S x_1 \oplus \cdots \oplus R_S x_n$ erzeugten Untermodul bedeutet, wobei man bei allen Elementen aus $M_0$ die Koeffizienten der $x_i$ als Elemente von $R_S$ aufzufassen hat.

Man erkennt hieraus, daß die Kählerschen Differenten $d_r\left(\frac{R_S}{P_S}\right)$ gerade aus den Elementen $\frac{d}{s}$ mit $d \in d_r\left(\frac{R}{P}\right)$ und $s \in S$ bestehen, d. h. die Erweiterungsideale der Differenten $d_r\left(\frac{R}{P}\right)$ in $R_S$ sind. Wir können also das Hauptergebnis dieses Paragraphen wie folgt formulieren:

**Satz 1.** *Der Differentialmodul eines (verallgemeinerten) Quotientenrings $R_S$ ist der Erweiterungsmodul des Differentialmoduls von $R$:*

$$M\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = R_S \otimes_R M\left(\frac{R}{P}\right),$$

*die Kählerschen Differenten von $R_S$ sind die Erweiterungsideale der Kählerschen Differenten von $R$:*

$$d_r\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = R_S d_r\left(\frac{R}{P}\right).$$

Satz 1 ermöglicht uns, die Betrachtungen über den Differentialmodul und die Differenten vom globalen Fall auf den lokalen Fall zu reduzieren, wenn wir nämlich für $S$ die Menge aller Elemente aus $R$ nehmen, die nicht in einem Primideal $\mathfrak{P}$ von $R$ liegen. $R_S$ wird dann zum Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}R_S$.

## § 2. Rang des Differentialmoduls eines Stellenrings.

Für diesen Paragraphen soll $R$ ein beliebiger *Stellenring* sein, d. h. ein kommutativer unitärer Ring, dessen Nichteinheiten ein Ideal $\mathfrak{P}$ bilden. $P$ sei ein beliebiger Unterring von $R$ mit derselben Eins wie $R$. Der Restklassenkörper $\mathfrak{K} = R/\mathfrak{P}$ habe die Charakteristik $p \geqq 0$. Der Quotientenkörper von $P/\mathfrak{P} \cap P$ sei mit $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Ferner sei $P^* = P[R^p]$ der Unterring von $R$, der aus $P$ durch Adjunktion aller $p$-ten Potenzen der Elemente von $R$ entsteht ($P^* = P$ für $p = 0$) und $\mathfrak{Q}^* = (\mathfrak{P} \cap P^*)R$.

Wir wollen in diesem Paragraphen den Rang des Differentialmoduls $M\left(\frac{R}{P}\right)$ bestimmen, vorausgesetzt, daß $M$ endlich erzeugt ist.

**Definition:** Unter dem *Rang* eines endlich erzeugten $R$-Moduls $M$ verstehen wir die minimale Anzahl von Erzeugenden von $M$.

Wir bedienen uns dabei der folgenden bekannten Tatsache:

**Hilfssatz 1.** *$M$ sei ein endlicher $R$-Modul, $N$ ein Untermodul von $M$ mit*

$$M = N + \mathfrak{P}M.$$

*Dann ist*

$$M = N.$$

Man folgert aus diesem Hilfssatz sofort, daß $M$ und $M/\mathfrak{P}M$ denselben Rang besitzen. $M/\mathfrak{P}M$ kann als Vektorraum über $\mathfrak{K}$ aufgefaßt werden; sein Rang ist dann die Dimension dieses Vektorraums:

$$\text{Rang } M = \text{Rang } (M/\mathfrak{P}M) = \dim_{\mathfrak{K}}(M/\mathfrak{P}M).$$

Erst recht gilt

$$\text{Rang } M = \text{Rang } (M/M_0)$$

für jeden Untermodul $M_0 \leqq \mathfrak{P}M$.

Ferner benötigen wir

**Hilfssatz 2.** *Der R-Modul $M$ sei Summe zweier Untermoduln $M_1$ und $M_2$: $M = M_1 + M_2$, wobei* Rang $(M/M_1) = \alpha$, Rang $(M/M_2) = \beta$ *und* Rang $M \leqq \alpha + \beta$ *ist. Dann ist* Rang $M = \alpha + \beta$.

*Beweis*: Wenn $\dot{M} = M/M_1 \cap M_2$ und $\dot{M}_i = M_i/M_1 \cap M_2$ gesetzt wird $(i = 1, 2)$, ergibt sich $\dot{M} = \dot{M}_1 \oplus \dot{M}_2$ und $\dot{M}/\dot{M}_1 = \dot{M}_2 = M/M_1$ sowie $\dot{M}/\dot{M}_2 = \dot{M}_1 = M/M_2$. Es folgt Rang $\dot{M}_1 = \beta$, Rang $\dot{M}_2 = \alpha$. Aus der Gleichung

$$\dot{M}/\mathfrak{P}\dot{M} = \dot{M}_1/\mathfrak{P}\dot{M}_1 \oplus \dot{M}_2/\mathfrak{P}\dot{M}_2$$

entnimmt man

$$\text{Rang } M \geqq \text{Rang } \dot{M} = \text{Rang } \dot{M}_1 + \text{Rang } \dot{M}_2 = \alpha + \beta.$$

Zusammen mit Rang $M \leqq \alpha + \beta$ ergibt dies

$$\text{Rang } M = \alpha + \beta.$$

Für das Folgende werden auch noch die Sätze über den Rang des Differentialmoduls eines Körpers $K$ über einem Unterkörper $k$ als bekannt vorausgesetzt (vgl. [3], §§ 15—21):

*Ist $K$ separabel ezeugbar über $k$, so ist* Rang $M\left(\frac{K}{k}\right) = t$ *gleichwertig damit, daß der Transzendenzgrad von $K$ über $k$ gleich $t$ ist. Die Differentiale der Elemente einer separierenden Transzendenzbasis von $K$ über $k$ bilden eine Basis des Differentialmoduls.*

*Hat $K$ die Charakteristik $p > 0$, so ist* Rang $M\left(\frac{K}{k}\right) = t$ *gleichwertig damit, daß $K$ über $k$ den $p$-Grad $t$ hat. Die Differentiale der Elemente einer $p$-Basis von $K$ über $k$ bilden eine Basis des Differentialmoduls.*

Diese Sätze erfahren in den folgenden Überlegungen eine Erweiterung für beliebige Stellenringe, wobei allerdings nur die eine Hälfte der Aussagen verallgemeinert wird, da bei uns immer die Endlichkeit des Rangs des Differentialmoduls vorausgesetzt ist. Es gilt nämlich der

**Rangsatz.** *Unter den am Anfang dieses Paragraphen formulierten Voraussetzungen ist*

(a) $M\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{k}}\right)$ *endlich erzeugt,*

(b) $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2$ *endlich erzeugt,*

(c) Rang $M\left(\frac{R}{P}\right) =$ Rang $M\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{k}}\right) +$ Rang $(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2)$.

*Beweis*: 1) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $P$ als Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap P$ vorausgesetzt werden, denn jedes Element $\varrho \in P$, welches nicht in $\mathfrak{p}$ liegt, besitzt in $R$ ein Inverses $\varrho'$. Daher enthält $R$ den Stellenring $P_\mathfrak{p}$ zum Primideal $\mathfrak{p}$ und wegen $d\varrho' = 0$ ist $M\left(\frac{R}{P}\right) = M\left(\frac{R}{P_\mathfrak{p}}\right)$. Ferner ist $\mathfrak{Q}^* = (\mathfrak{P} \cap P_\mathfrak{p}[R^p])R$ und $\mathfrak{k} = P_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}P_\mathfrak{p}$.

2) Daß $M\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{k}}\right)$ endlich erzeugt ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß es homomorphes Bild von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ ist (§ 1, 1).

3) Es sei $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P} \cap P)\, R$. Offensichtlich ist $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{Q}^*$. Wir deuten den Übergang zum Restklassenring $\dot{R} = R/\mathfrak{Q}$ durch Übersetzen eines Punktes an, den Übergang zum Restklassenring $\ddot{R} = R/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2$ durch zwei Punkte. Das folgende Diagramm veranschaulicht die Beziehung der zu betrachtenden Ringe untereinander:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\mathrm{mod}\,\mathfrak{Q}"] \arrow[d, dash] & \dot{R} \arrow[r, "\mathrm{mod}\,(\dot{\mathfrak{Q}}^* + \dot{\mathfrak{P}}^2)"] \arrow[d, dash] & \ddot{R} \arrow[r, "\mathrm{mod}\,\ddot{\mathfrak{P}}"] \arrow[d, dash] & \mathfrak{K} \arrow[d, dash] \\
P^* = P[R^p] \arrow[r] \arrow[d, dash] & \dot{P}^* = \dot{P}[\dot{R}^p] \arrow[r] \arrow[d, dash] & \ddot{P}^* = \ddot{P}[\ddot{R}^p] \arrow[r, equal] \arrow[d, dash] & \mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p] \arrow[d, dash] \\
P \arrow[r] & \dot{P} \arrow[r, equal] & \ddot{P} \arrow[r, equal] & \mathfrak{k}
\end{tikzcd}$$

Wegen $\mathfrak{Q} \cap P = \mathfrak{p}$ ist $\dot{P} = \ddot{P} = \mathfrak{k}$. Da $\dot{R}$ über $\dot{P}^*$ ganzalgebraisch ist, ist $\dot{\mathfrak{Q}}^* \cap \dot{P}^* = \dot{\mathfrak{P}} \cap \dot{P}^*$ ein maximales Ideal von $\dot{P}^*$ und daher $\ddot{P}^*$ ein Körper: $\ddot{P}^* = \mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]$, weil er mod $\ddot{\mathfrak{P}}$ sicher in $\mathfrak{k}[\mathfrak{K}^p]$ übergeht.

Nach § 1, 1 ist $M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) = M\left(\frac{R}{P}\right) / \langle Rd\mathfrak{Q}\rangle$. Da $\mathfrak{Q}$ von Elementen aus $P$ erzeugt wird, folgt $\langle Rd\mathfrak{Q}\rangle \leqq \mathfrak{Q}\, M\left(\frac{R}{P}\right)$, woraus sich nach der Folgerung von Hilfssatz 1 Rang $M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) =$ Rang $M\left(\frac{R}{P}\right)$ ergibt. $\dot{R}$ hat, weil $\dot{P} = \mathfrak{k}$ in $\dot{R}$ enthalten ist, die Charakteristik $p$. Daher ist $d(\dot{R}^p) = 0$, woraus nach § 1, 2 $M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) = M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}^*}\right)$ folgt.

Weiter ist $M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right) = M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}}\right) / \langle Rd(\dot{\mathfrak{Q}}^* + \dot{\mathfrak{P}}^2)\rangle$. $\dot{\mathfrak{Q}}^*$ wird von Elementen aus $\dot{P}^*$ erzeugt, woraus wieder $\langle \dot{R}d\dot{\mathfrak{Q}}^*\rangle \leqq \dot{\mathfrak{Q}}^* M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}^*}\right)$ folgt. Andererseits ist $\langle \dot{R}d\dot{\mathfrak{P}}^2\rangle \leqq \dot{\mathfrak{P}} M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}^*}\right)$, also insgesamt $\langle \dot{R}d(\dot{\mathfrak{Q}}^* + \dot{\mathfrak{P}}^2)\rangle \leqq \dot{\mathfrak{P}} M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}^*}\right)$, daher

$$\text{Rang } M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right) = \text{Rang } M\left(\frac{\dot{R}}{\dot{P}^*}\right) = \text{Rang } M\left(\frac{R}{P}\right).$$

Wir haben damit die Bestimmung des Rangs von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ auf die einfachere Aufgabe zurückgeführt, den Rang von $M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right)$ zu bestimmen.

4) $\ddot{\mathfrak{P}}$ ist wegen $\ddot{\mathfrak{P}}^2 = 0$ ein $\ddot{R}/\ddot{\mathfrak{P}}$-Modul, also ein Vektorraum über dem Körper $\mathfrak{K} = R/\mathfrak{P} = \ddot{R}/\ddot{\mathfrak{P}}$. Es sei $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Basis von $\ddot{\mathfrak{P}}$ über $\mathfrak{K}$. Eine Relation

$$(1) \qquad e_1 p_{\lambda_1} + \cdots + e_n p_{\lambda_n} = 0,$$

bei der die $e_i$ Einheiten in $R$ oder gleich Null sind, ist dann nur möglich, wenn $e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 0$ ist.

Wir behandeln jetzt zwei Fälle getrennt weiter:

A. Char. $\mathfrak{K} = p > 0$, B. Char. $\mathfrak{K} = 0$.

A. Hier ist $t = \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{k}}\right)$ gleich dem $p$-Grad von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$. $x_1, \ldots, x_t$ seien Repräsentanten in $R$ für eine $p$-Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$. Eine Relation

$$(2) \qquad \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq p-1 \\ (i=1,\ldots,t)}} \varrho_{\nu_1 \cdots \nu_t} x_1^{\nu_1} \cdots x_t^{\nu_t} \in \ddot{\mathfrak{P}}, \qquad \varrho_{\nu_1 \cdots \nu_t} \in \ddot{P}^*$$

kann nur dann bestehen, wenn alle Koeffizienten $\varrho_{\nu_1 \cdots \nu_t} = 0$ sind.

Andererseits ist jede Einheit $e \in \ddot{R}$ modulo $\ddot{\mathfrak{P}}$ einer solchen Summe kongruent. Jedes $r \in \ddot{R}$ läßt sich daher in der folgenden Form schreiben:

$$r = \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq p-1 \\ (i=1,\ldots,t)}} \varrho^{(0)}_{\nu_1 \cdots \nu_t} x_1^{\nu_1} \cdots x_t^{\nu_t} + \sum_{\lambda \in \Lambda} \left( \sum_{\substack{0 \leq \nu_i \leq p-1 \\ (i=1,\ldots,t)}} \varrho^{(\ )}_{\nu_1 \cdots \nu_t} x_1^{\nu_1} \cdots x_t^{\nu_t} \right) p_\lambda .$$

Ist $r = 0$, so folgt aus (2) und (1), daß alle vorkommenden Koeffizienten $\varrho^{(0)}_{\nu_1 \cdots \nu_t}$ und $\varrho^{(\lambda)}_{\nu_1 \cdots \nu_t} = 0$ sein müssen. Das bedeutet, daß die angegebene Darstellung für die Elemente von $\ddot{R}$ eindeutig ist. Man erkennt hieraus sofort, daß $\ddot{R}$ der Restklassenring des Polynomrings $\ddot{P}^*[X_1, \ldots, X_t, \{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]$ nach dem Ideal $\mathfrak{n}$ ist, das von allen Polynomen $X_i^p - x_i^p$ $(i = 1, \ldots, t)$, $Y_{\lambda_1} \cdot Y_{\lambda_2} (\lambda_1, \lambda_2, \in \Lambda)$ erzeugt wird. Nach § 1 ist daher

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right) = \left( \bigoplus_{i=1}^{t} \ddot{R} dX_i \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \ddot{R} dY_\lambda \right) / M_0,$$

wobei $M_0$ von allen Elementen der Form $p_{\lambda_1} dY_{\lambda_2} + p_{\lambda_2} dY_{\lambda_1} (\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda)$ erzeugt wird.

Es liegt also $M_0$ ganz in $\ddot{\mathfrak{P}}\left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R dY_\lambda \right)$, daher ist

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right) = \bigoplus_{i=1}^{t} \ddot{R} dx_i \oplus M' \quad \text{mit} \quad M' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \ddot{R} dY_\lambda / M_0 .$$

Ein homomorphes Bild von $M'$ ist $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \ddot{R} dY_\lambda / \ddot{\mathfrak{P}}\left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \ddot{R} dY_\lambda \right) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{K} dY_\lambda$. Wäre nun die Indexmenge $\Lambda$ nicht endlich, dann wäre $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{K} dY_\lambda$ nicht endlich erzeugbar. Weil dieser Modul aber homomorphes Bild von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ ist, könnte auch $M\left(\frac{R}{P}\right)$ nicht endlich erzeugbar sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es sei also

$$\operatorname{Rang} \ddot{\mathfrak{P}} = \operatorname{Rang} (\mathfrak{P} / \mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2) = s, \quad \text{also } \ddot{\mathfrak{P}} = \langle p_1, \ldots, p_s \rangle .$$

Dann hat auch $M'$ den Rang $s$ und es folgt

$$\operatorname{Rang} M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}^*}\right) = \operatorname{Rang} M\left(\frac{R}{P}\right) = s + t .$$

B. Wenn Char. $\mathfrak{K} = 0$ ist, ist $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ separabel und es gibt nach [8], Satz 1a, da $\ddot{R}$ wegen $\ddot{\mathfrak{P}}^2 = 0$ ein kompletter lokaler Ring ist, einen zu $\mathfrak{K}$ isomorphen Unterkörper von $\ddot{R}$, welcher $\ddot{P} = \mathfrak{k}$ umfaßt. Wir bezeichnen ihn ebenfalls mit $\mathfrak{K}$. Es ergibt sich sofort:

$$\ddot{R} = \mathfrak{K} \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{K} p_\lambda$$

und

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\mathfrak{K}}\right) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R dY_\lambda / M_0 ,$$

mit $M_0$ wie in A. $M\left(\frac{\ddot{R}}{\mathfrak{K}}\right)$ ist andererseits homomorphes Bild von $M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right)$:

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\mathfrak{K}}\right) = M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right) / \langle \ddot{R} d\mathfrak{K} \rangle$$

und hat daher endlichen Rang $s$. Wie unter A. folgt, daß $\Lambda$ endlich sein muß, und zwar aus $s$ Elementen bestehend: $\ddot{\mathfrak{P}} = \langle p_1, \ldots, p_s \rangle$, $M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{\mathfrak{R}}}\right) = \langle dp_1, \ldots, dp_s \rangle$.

$M\left(\frac{\ddot{\mathfrak{R}}}{\mathfrak{k}}\right) = M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right) / \langle \ddot{R} d\ddot{\mathfrak{P}} \rangle$ habe den Rang $t$ und werde von den Differentialen $dx'_1, \ldots, dx'_t$ erzeugt. $x_1, \ldots, x_t$ seien Urbilder der $x'_i$ in $\ddot{R}$. Dann ist

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right) = \langle dx_1, \ldots, dx_t \rangle + \langle \ddot{R} d\ddot{\mathfrak{P}} \rangle = \langle dx_1, \ldots, dx_t, dp_1, \ldots, dp_s \rangle + \ddot{\mathfrak{P}} M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right),$$

also nach Hilfssatz 1:

$$M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right) = \langle dx_1, \ldots, dx_t, dp_1, \ldots, dp_s \rangle.$$

Wendet man jetzt noch Hilfssatz 2 mit $M_1 = \langle \ddot{R} d\ddot{\mathfrak{P}} \rangle$, $M_2 = \langle \ddot{R} d\ddot{\mathfrak{R}} \rangle$ an, so folgt

$$\operatorname{Rang} M\left(\frac{\ddot{R}}{\ddot{P}}\right) = \operatorname{Rang} M\left(\frac{R}{P}\right) = s + t, \quad \text{q. e. d.}$$

Anmerkungen zum Beweis des Rangsatzes:

1. Ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{k}$ separabel, so kann der Beweis auch wie in B. geführt werden, weil der dort benutzte zu $\mathfrak{R}$ isomorphe, in $\ddot{R}$ enthaltene Körper, der $\ddot{P}$ umfaßt, dann auch existiert ([8], Satz 1 a). In diesem Fall gilt der Rangsatz daher auch mit $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P} \frown P)\, R$ an Stelle von $\mathfrak{Q}^*$.

2. Weiterhin kann man aus dem Beweis des Rangsatzes entnehmen, daß ein minimales Erzeugendensystem von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ von den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_t, dp_1, \ldots, dp_s$ gebildet wird, wobei $x_1, \ldots, x_t$ Repräsentanten in $R$ für eine separierende Transzendenzbasis (im Falle separabler Erzeugbarkeit) oder für eine $p$-Basis von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ bilden (wenn Char. $\mathfrak{R} > 0$) und $p_1, \ldots, p_s$ Repräsentanten in $\mathfrak{P}$ für eine Basis von $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q} + \mathfrak{P}^2$ bzw. $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2$ sind.

Der Rang eines endlichen Moduls $M$ über einem Stellenring $R$ kann auch mit Hilfe der Fittingschen Determinantenideale des Moduls charakterisiert werden. Es gilt nämlich

**Satz 2.** *Der Rang $r$ von $M$ ist die kleinste natürliche Zahl derart, daß $d_r(M) = (1)$ ist.*

*Beweis*: Wir nehmen an, es sei $M = Rw_1 + \cdots + Rw_r$, wobei $w_1, \ldots, w_r$ ein minimales Erzeugendensystem von $M$ sei. In der zugehörigen Matrix (2) von § 1, die zur Bildung der Fittingschen Determinantenideale heranzuziehen ist, tritt dann keine Einheit von $R$ auf. Denn andernfalls bestünde eine Relation

$$s_1 w_1 + \cdots + s_r w_r = 0 \qquad (s_i \in R),$$

wobei mindestens ein $s_i$ eine Einheit in $R$ wäre. Dann könnte aber das zugehörige $w_i$ durch die übrigen ausgedrückt werden, im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität des Systems $w_1, \ldots, w_r$. Da somit alle Koeffizienten der Matrix (2) in $\mathfrak{P}$ liegen, ist $d_{r-1}(M) \leqq \mathfrak{P}$; $d_r(M) = (1)$ gilt aber nach Definition.

Für die Differenten von $R$ über $P$ bedeutet dies: Es ist

$$d_i \leqq \mathfrak{P} \quad \text{für} \quad i < \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}}\right) + \operatorname{Rang}(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2),$$

$$d_i = (1) \quad \text{für} \quad i \geqq \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{k}}\right) + \operatorname{Rang}(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}^* + \mathfrak{P}^2).$$

## § 3. Die Primidealteiler der Differenten in beliebigen Ringen.

Von jetzt ab soll $R$ wieder ein beliebiger Erweiterungsring des Grundrings $P$ sein, wobei nur vorausgesetzt wird, daß $M\left(\frac{R}{P}\right)$ endlich erzeugt ist, so daß die Kählerschen Differenten von $R$ über $P$ existieren.

Wir wollen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, wann ein Primideal $\mathfrak{P} < R$ eine Differente $d_i\left(\frac{R}{P}\right)$ teilt. Dazu gehen wir zum (verallgemeinerten) Quotientenring $R' = R_S$ über, wobei $S$ die Menge aller $s \in R$ ist, die nicht in $\mathfrak{P}$ liegen. $R'$ ist ein Stellenring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cdot R'$ (vgl. Northcott [6], 44—48; ebenso für weitere stillschweigend benutzte Tatsachen aus der Theorie der verallgemeinerten Quotientenringe). Nach Satz 1 folgt sofort: $\mathfrak{P}$ teilt genau dann die Differente $d_i\left(\frac{R}{P}\right)$, wenn $\mathfrak{P}'$ die Differente $d_i\left(\frac{R_S}{P_S}\right)$ teilt.

Setzen wir $P_S = P'$, $\mathfrak{K}' = R'/\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{k}' = P'/\mathfrak{P}' \cap P'$ und $\mathfrak{Q}^{*\prime} = (\mathfrak{P}' \cap P'[R'^p])\,R'$, wobei $p$ die Charakteristik von $\mathfrak{K}'$ ist, so folgt aus dem Rangsatz in Verbindung mit Satz 2:

**Satz 3.** *Notwendig und hinreichend für* $d_i\left(\frac{R}{P}\right) \leqq \mathfrak{P}$ *ist* $i < s + t$ *mit*

$$s = \operatorname{Rang}\,(\mathfrak{P}'/\mathfrak{Q}^{*\prime} + \mathfrak{P}'^2), \quad t = \operatorname{Rang} M\left(\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{k}'}\right).$$

Ist $R$ ein Integritätsbereich, so ist das Nullideal Primideal. $\mathfrak{K}'$ ist dann der Quotientenkörper von $R$, $\mathfrak{k}'$ der von $P$ und $s = 0$. Als unmittelbare Folgerung aus Satz 3 ergibt sich somit:

**Satz 4.** *Ist $R$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $K$, ist $k$ der Quotientenkörper von $P$ und $m$ der Rang von $M\left(\frac{K}{k}\right)$, so ist*

$$d_0\left(\frac{R}{P}\right) = \cdots = d_{m-1}\left(\frac{R}{P}\right) = 0, \quad d_m\left(\frac{R}{P}\right) \neq 0.$$

Ist speziell $K$ eine separable algebraische Erweiterung von $k$ wie in allen Beispielen der Einleitung, so ist schon $d_0\left(\frac{R}{P}\right) \neq 0$.

Wir wollen ein Primideal $\mathfrak{P}$ eines Ringes $R$ *träge* bezüglich $P$ nennen, wenn $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}^{*\prime} + \mathfrak{P}'^2$ und $M\left(\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{k}'}\right) = 0$ ist. Satz 3, auf die 0-te Kählersche Differente angewandt, liefert dann sofort den

**Differentensatz.** *Ein Primideal $\mathfrak{P} < R$ ist genau dann nicht träge bezüglich $P$, wenn $d_0\left(\frac{R}{P}\right) \leqq \mathfrak{P}$ ist.*

Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die Trägheitsdefinition in einigen Spezialfällen ausdrückt und insbesondere, daß sie in den Beispielen der Einleitung mit den dort angegebenen Definitionen äquivalent ist.

Zunächst betrachten wir den Fall, daß der Restklassenkörper $\mathfrak{K}'$ endlich über $\mathfrak{k}'$ ist. Dann ist $M\left(\frac{\mathfrak{K}'}{\mathfrak{k}'}\right) = 0$ damit gleichbedeutend, daß $\mathfrak{K}'$ über $\mathfrak{k}'$ separabel algebraisch ist. Nach Anmerkung 1 zum Rangsatz darf dann $\mathfrak{Q}^{*\prime}$ durch $\mathfrak{Q}' = (\mathfrak{P}' \cap P')\,R'$ ersetzt werden. Es ist in diesem Fall also $\mathfrak{P}$ genau dann träge, wenn $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{P}'^2$ und $\mathfrak{K}'$

über $\mathfrak{k}'$ separabel algebraisch ist. Gilt überdies in $R$ der Teilerkettensatz, dann auch in $R'$, und nach Hilfssatz 1 ist dann $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{P}'^2$ mit $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}'$ äquivalent.

Es ist $\mathfrak{K}' = Q(R/\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{k}' = Q(P/\mathfrak{P} \cap P)$. Ferner ist $\mathfrak{Q}'$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{P} \cap P) R$ in $R'$. Zunächst ist $\mathfrak{Q}R' \leqq \mathfrak{Q}'$ klar. $\mathfrak{Q}'$ wird von Elementen aus $\mathfrak{P}' \cap P'$ erzeugt. Läßt man bei diesen Elementen die Nenner weg, so erhält man ein neues Erzeugendensystem für $\mathfrak{Q}'$, aus Elementen von $\mathfrak{P} \cap P$ bestehend. Also ist auch $\mathfrak{Q}' \leqq \mathfrak{Q}R'$ und damit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}R'$.

Wenn in $R$ der Teilerkettensatz gilt, so läßt sich $\mathfrak{Q}$ als unverkürzbarer Durchschnitt von Primäridealen schreiben:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_t,$$

wobei $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$ die zugehörigen Primideale seien. Setzen wir noch voraus, daß $R$ ganzalgebraisch in bezug auf $P$ ist, so gilt:

a) Unter den $\mathfrak{P}_i$ kommt kein echtes Primunterideal von $\mathfrak{P}$ vor,

b) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$ für geeignetes $i$; das zugehörige $\mathfrak{Q}_i$ ist eindeutig bestimmt.

Denn wenn $\mathfrak{P}_0$ ein echt in $\mathfrak{P}$ enthaltenes Primideal ist, so ist wegen der Ganzheit von $R$ über $P$ auch $\mathfrak{P}_0 \cap P$ echt in $\mathfrak{P} \cap P$ enthalten. Für ein Primärideal $\mathfrak{Q}_0$ zu $\mathfrak{P}_0$ gilt dann erst recht $\mathfrak{Q}_0 \cap P \leqq \mathfrak{P}_0 \cap P \leqq \mathfrak{P} \cap P = \mathfrak{Q} \cap P$, und daher ist $\mathfrak{Q} \leqq \mathfrak{Q}_0$ unmöglich.

In $R'$ gilt $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_t'$, wobei die $\mathfrak{Q}_i'$ die Erweiterungsideale der $\mathfrak{Q}_i$ sind. Wegen a) sind alle diese Ideale $\mathfrak{Q}_i' = R'$ bis auf höchstens eines, welches Primärideal zu $\mathfrak{P}'$ ist. Wegen $\mathfrak{Q}' \leqq \mathfrak{P}'$ muß auch mindestens ein solches Ideal dort stehen. Es ist somit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}_i'$, daher $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{Q}_i$ ist eindeutig bestimmt.

$\mathfrak{P}$ ist somit genau dann träge bezüglich $P$, wenn $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{K} = Q(R/\mathfrak{P})$ eine separable algebraische Erweiterung von $\mathfrak{k} = Q(P/\mathfrak{P} \cap P)$ ist.

Läßt sich in $R$ sogar jedes Ideal als Produkt von teilerfremden Primäridealen schreiben und ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \cdots \mathfrak{Q}_t$ die Darstellung von $\mathfrak{Q}$ mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$, so ist $\mathfrak{P}$ gleich einem der $\mathfrak{P}_i$ (dazu braucht nicht vorausgesetzt zu werden, daß $R$ über $P$ ganzalgebraisch ist). Auch hier ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Q}'$ mit $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}_i$ gleichbedeutend.

Diese Betrachtungen erläutern den Trägheitsbegriff in einigen wichtigen Sonderfällen und zeigen, daß er in der Tat in den Beispielen der Einleitung (auch im Falle der van der Waerden-Artinschen Idealtheorie) mit dem dort angegebenen äquivalent ist.

Als eine weitere Folgerung aus Satz 3 wollen wir jetzt das Kriterium von Zariski (vgl. [9], S. 74) herleiten. Es sei dazu $R$ eine affine $k$-Algebra (d. h. Restklassenring eines Polynomrings in endlich vielen Unbestimmten über einem Körper $k$ nach einem Primideal). Ist $p$ die Charakteristik von $k$, so setzen wir $P = k^p$ $(k^0 = k)$. $M\left(\frac{R}{P}\right)$ soll endlich erzeugt und $d$ die erste von Null verschiedene Kählersche Differente von $R$ über $P$ sein.

Nach Satz 4 ist $d = d_m\left(\frac{R}{P}\right)$ mit $m = \operatorname{Rang} M\left(\frac{Q(R)}{k^p}\right)$. Damit ein Primideal $\mathfrak{P}$ aus $R$ Teiler von $d$ ist, ist nach Satz 3 notwendig und hinreichend, daß

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Rang} M\left(\frac{Q(R)}{k^p}\right) < \operatorname{Rang} M\left(\frac{Q(R/\mathfrak{P})}{k^p}\right) + \operatorname{Rang} \mathfrak{P}'/\mathfrak{Q}^{*\prime} + \mathfrak{P}'^2$$

ist, wenn $\mathfrak{P}'$ wieder das maximale Ideal des Stellenrings $R'$ zu $\mathfrak{P}$ bezeichnet und $\mathfrak{Q}^{*\prime} = (\mathfrak{P}' \cap k^p[R'^p])\, R'$ ist. Da $\mathfrak{Q}^{*\prime} \leqq \mathfrak{P}'^p$ für $p > 0$ und $\mathfrak{Q}^{*\prime} = 0$ für $p = 0$ gilt, folgt $\mathfrak{P}'/\mathfrak{Q}^{*\prime} + \mathfrak{P}'^2 = \mathfrak{P}'/\mathfrak{P}'^2$. Wir setzen $Q(R) = K$, $Q(R/\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}$. Dann ist

$$\text{Rang } M\left(\frac{K}{k^p}\right) = \begin{cases} \dim \dfrac{K}{k} & \text{für } p = 0 \\ p\text{-Grad } \dfrac{K}{k^p} = \dim \dfrac{K}{k} + p\text{-Grad } \dfrac{k}{k^p} & \text{für } p > 0, \end{cases}$$

(für die letzte Gleichung vgl. [9], S. 73, Lemma 1) und dieselbe Beziehung gilt mit $\mathfrak{K}$ an Stelle von $K$. (1) ist daher äquivalent mit

$$\text{(2)} \quad \text{Rang } M\left(\frac{K}{k^p}\right) - \text{Rang } M\left(\frac{\mathfrak{K}}{k^p}\right) = \dim \frac{K}{k} - \dim \frac{\mathfrak{K}}{k} < \text{Rang } (\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}'^2).$$

Nun ist aber $\dim \frac{K}{k} - \dim \frac{\mathfrak{K}}{k} = \dim R'$ und $\dim R' < \text{Rang}(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}'^2)$ gleichbedeutend damit, daß $R'$ nicht regulär ist. Wir haben damit gezeigt:

**Satz 5.** *$k$ sei ein beliebiger Körper der Charakteristik $p \geqq 0$ und $R$ eine nullteilerfreie affine $k$-Algebra, für die $M\left(\frac{R}{k^p}\right)$ endlich erzeugt sei. $d$ sei die erste von Null verschiedene Kählersche Differente von $R$ über $k^p$. Dann ist $d \leqq \mathfrak{P}$ damit gleichbedeutend, daß der Stellenring $R'$ zu $\mathfrak{P}$ nicht regulär ist.*

*Folgerung*: $R'$ ist genau dann regulär, wenn $M\left(\frac{R'}{k^p}\right)$ freier $R'$-Modul ist *).

Das ergibt sich unmittelbar aus Satz 5 mit Hilfe von Satz 1.

## § 4. Noethersche Differente.

Der folgende Teil der Arbeit ist der von E. Noether definierten Differente gewidmet (vgl. [5], 1—21). Es wird ihre Beziehung zur 0-ten Kählerschen Differente untersucht und gezeigt, daß der Differentensatz in sehr allgemeinen Fällen auch für die Noethersche Differente gilt. In einigen Fällen folgt er dann auch für die Dedekindsche Differente.

Dieser vorbereitende Paragraph dient dazu, Definition und wichtigste Eigenschaften der Noetherschen Differente anzugeben. In der Definition wird das von E. Noether benutzte direkte Produkt zweckmäßigerweise durch das tensorielle Produkt ersetzt, weil das direkte Produkt, wenn es existiert, mit dem tensioriellen Produkt übereinstimmt. Die Noethersche Differente ist dann für beliebige Ringe $R$, $P$ definiert und man erhält sie so:

Man bilde das tensorielle Produkt $R \otimes_P R$ und in ihm das Ideal $\mathfrak{N}$, das von allen Elementen der Form $r \otimes 1 - 1 \otimes r$ mit $r \in R$ erzeugt wird. $\mathfrak{N}$ heißt *Differenzenideal.* $H: R \otimes_P R \to R$ sei der Homomorphismus, bei dem das Tensormultiplikationszeichen durch das Multiplikationszeichen in $R$ ersetzt wird (Kern $(H) = \mathfrak{N}$).

**Definition:** Unter der *Noetherschen Differente von $R$ über $P$* verstehen wir das Bild des Idealquotienten $0 : \mathfrak{N}$ beim Homomorphismus $H$:

$$\text{(1)} \qquad d_N\left(\frac{R}{P}\right) = H(0 : \mathfrak{N}).$$

Das Ideal $0 : \mathfrak{N}$ aus $R \otimes_P R$ wird auch *Differenzenquotient* genannt.

Neben diese invariante Definition tritt eine zweite, die auf eine Erzeugung von $R$ über $P$ Bezug nimmt und aus der man die Verwandtschaft der Bildung von $d_N\left(\frac{R}{P}\right)$ mit dem Differentiationsprozeß erkennt.

*) Anm. bei der Korrektur: Dies gilt auch, wenn $M\left(\frac{R'}{k^p}\right)$ nicht als endlich erzeugt vorausgesetzt wird.

$R$ entstehe aus $P$ durch Ringadjunktion eines Systems $x_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ von Elementen: $R = P[x_\lambda] = P[X_\lambda]/\mathfrak{n}$.

Dann ist

$$R \otimes_P R = R \otimes_P (P[X_\lambda]/\mathfrak{n}) = (R \otimes P[X_\lambda])/(R \otimes \mathfrak{n}) = R[X_\lambda]/\mathfrak{n}R[X_\lambda].$$

Das vollständige Urbild des Differenzenideals $\mathfrak{N}$ in $R[X_\lambda]$ ist das Ideal, das von allen Polynomen $X_\lambda - x_\lambda$ erzeugt wird; das vollständige Urbild von 0 ist das Ideal $\mathfrak{n}R[X_\lambda]$, daher von $0 : \mathfrak{N}$ der Idealquotient $\mathfrak{n}R[X_\lambda] : (X_\lambda - x_\lambda)_{(\lambda \in \Lambda)}$. Der Homomorphismus von $R[X_\lambda]$ auf $R \otimes_P R$ liefert mit $H : R \otimes_P R \to R$ zusammengesetzt den Homomorphismus $\underset{X_\lambda \to x_\lambda}{H} : R[X_\lambda] \to R$ mit dem Kern $(X_\lambda - x_\lambda)$. Es gilt somit

$$d_N\left(\frac{R}{P}\right) = \underset{X_\lambda \to x_\lambda}{H}(\mathfrak{n}R[X_\lambda] : (X_\lambda - x_\lambda)). \tag{2}$$

Die Entstehung der Noetherschen Differente aus einem Differentiationsprozeß läßt eine nahe Verwandtschaft von $d_N$ mit den Kählerschen Differenten vermuten. Ein weiterer Grund besteht darin, daß der Differentialmodul $M\left(\frac{R}{P}\right)$ mit dem Differenzenideal $\mathfrak{N}$ zusammenhängt. Es ist nämlich

$$M\left(\frac{R}{P}\right) = \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2. \tag{3}$$

Dabei ist $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2$ nach folgender Vorschrift als $R$-Modul aufzufassen: Eine Restklasse von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2$ wird mit $r \in R$ multipliziert, indem man einen Repräsentanten mit $r \otimes 1$ multipliziert und dann wieder zur Restklasse übergeht.

Beweis von (3): Das vollständige Urbild von $\mathfrak{N}^2$ in $R[X_\lambda]$ ist das Ideal, das von allen Elementen der Form $(X_{\lambda_1} - x_{\lambda_1})(X_{\lambda_2} - x_{\lambda_2})$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ und den Elementen von $\mathfrak{n}$ erzeugt wird. Daher ist

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2 = \{X_\lambda - x_\lambda\}/(\{(X_{\lambda_1} - x_{\lambda_1})(X_{\lambda_2} - x_{\lambda_2})\} + \mathfrak{n}R[X_\lambda]).$$

$\mathfrak{n}$ werde von einem System $F_\nu(X_\lambda)$ von Polynomen aus $P[X_\lambda]$ erzeugt $(\nu \in N)$. Indem man die Polynome nach Potenzen von $X_\lambda - x_\lambda$ entwickelt, dann modulo $\{(X_{\lambda_1} - x_{\lambda_1})(X_{\lambda_2} - x_{\lambda_2})\}$ rechnet und das Bild von $X_\lambda - x_\lambda$ mit $dX_\lambda$ bezeichnet, erkennt man:

$$\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2 = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R dX_\lambda \Big/ \left\langle \frac{\partial F_\nu}{\partial x_\lambda} dX_\lambda \right\rangle.$$

So gewinnt man aber nach § 1 den Differentialmodul $M\left(\frac{R}{P}\right)$.

Schließlich hat E. Noether gezeigt (vgl. [5], S. 19), daß ihre Differente in folgendem Fall mit der Dedekindschen Differente übereinstimmt: $P$ sei ein Integritätsbereich, der in seinem Quotientenkörper $k$ ganz abgeschlossen ist, $R$ sei ein $P$ umfassender Integritätsbereich, der eine endliche (linear unabhängige) $P$-Modulbasis besitzt und dessen Quotientenkörper $K$ endlich separabel algebraische Erweiterung von $k$ ist. Durch Nenneraufnahme (vgl. den später folgenden Satz 7) schließt man daraus sofort, daß die Differenten auch dann übereinstimmen, wenn $P$ ein Dedekindscher Ring und $R$ ein endlich erzeugter $P$-Modul ist, und daß sie quasigleich sind, wenn in $P$ und $R$ die van der Waerden-Artinsche Idealtheorie gilt.

Andererseits weiß man aber auch, daß die 0-te Kählersche und die Dedekindsche Differente übereinstimmen, wenn unter denselben Voraussetzungen über $k$ und $K$ wie oben sowohl $P$ als auch $R$ Dedekindringe sind. Für diesen Fall steht also die Übereinstimmung aller drei Differenten fest. (Zur Übereinstimmung von 0-ter Kählerscher und Dedekindscher Differente vgl. das Referat von F. K. Schmidt über [3] im Zentralblatt f. Math. 53, S. 20ff.)

## § 5. Über die Äquivalenz der Differenten.

Zwei Beispiele am Ende dieses Paragraphen werden zeigen, daß es nicht zu erwarten ist, daß zwei der Differenten in wesentlich allgemeineren Fällen als in den am Schlusse von § 4 erwähnten übereinstimmen. Es kann jedoch bewiesen werden, daß die 0-te Kählersche Differente und die Noethersche Differente $d_N$ in sehr allgemeinen Ringen in folgendem Sinne äquivalent sind:

**Definition:** Zwei Ideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus $R$ heißen *äquivalent*, wenn sie dieselben Primidealteiler besitzen.

**Satz 6.** *$R$ gehe aus seinem Grundring $P$ durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente hervor. Dann sind $d_0\left(\frac{R}{P}\right)$ und $d_N\left(\frac{R}{P}\right)$ äquivalent.*

*Beweis*: Es sei $R = P[x_1, \ldots, x_n] = P[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{n}$, wobei das Ideal $\mathfrak{n}$ von einem System $G_\lambda(X_1, \ldots, X_n)$ von Polynomen aus $P[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugt werde ($\lambda \in \Lambda$). Jedes $G_\lambda$ läßt sich in $R[X_1, \ldots, X_n]$ nach Potenzen von $X_i - x_i$ entwickeln. Wegen $\underset{X_i \to x_i}{H}(G_\lambda) = 0$ kann man eine Zerlegung folgender Art finden:

$$(1) \qquad G_\lambda = G_\lambda^{(1)}(X_1 - x_1) + \cdots + G_\lambda^{(n)}(X_n - x_n)$$

mit

$$G_\lambda^{(i)} \in R[X_1, \ldots, X_n], \quad \underset{X_i \to x_i}{H}(G_\lambda^{(i)}) = \frac{\partial G_\lambda}{\partial x_i} \in R \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Greift man nun $n$ beliebige Gleichungen (1) heraus ($\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$), so kann man nach der Cramerschen Regel folgern:

$$(X_i - x_i)\begin{vmatrix} G_{\lambda_1}^{(1)}, \ldots, G_{\lambda_1}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ G_{\lambda_n}^{(1)}, \ldots, G_{\lambda_n}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{\lambda_1}^{(1)}, \ldots, G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_1}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{\lambda_n}^{(1)}, \ldots, \underset{i\text{-te Spalte}}{G_{\lambda_n}}, \ldots, G_{\lambda_n}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Durch Entwickeln der Determinante rechts nach der $i$-ten Spalte sieht man:

$$(X_i - x_i)\,|G_{\lambda_j}^{(k)}| \in \{G_{\lambda_1}, \ldots, G_{\lambda_n}\} \leqq \mathfrak{n}R[X_1, \ldots, X_n] \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

was damit gleichbedeutend ist, daß

$$|G_{\lambda_j}^{(k)}| \in \mathfrak{n}R[X_1, \ldots, X_n] : \{X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n\}$$

ist. Dann ist aber

$$\underset{X_i \to x_i}{H}(|G_{\lambda_j}^{(k)}|) = \left|\frac{\partial G_{\lambda_j}}{\partial x_k}\right| \in d_N\left(\frac{R}{P}\right).$$

Nach § 1 wird aber $d_0$ von allen Determinanten $\left|\frac{\partial G_{\lambda_j}}{\partial x_k}\right|$ erzeugt. Daher ist $d_0 \leqq d_N$.

Nach § 4, (3) ist $M\left(\frac{R}{P}\right) = \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2$. Der Annullator von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^2$ als $R$-Modul ist das Ideal $H(\mathfrak{N}^2 : \mathfrak{N}) = \mathfrak{A}$. Wegen $0 : \mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}^2 : \mathfrak{N}$ ist dann $d_0 \leqq d_N \leqq \mathfrak{A}$. Andererseits ist aber nach Fitting (vgl. [1], Satz 3) eine Potenz von $\mathfrak{A}$ in $d_0$ enthalten: $\mathfrak{A}^m \leqq d_0 \leqq d_N \leqq \mathfrak{A}$. Hieraus folgt die Äquivalenz aller drei Ideale.

Daß Satz 6 nicht richtig zu sein braucht, wenn $R$ aus $P$ nicht durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente gewonnen werden kann, hat R. Berger an einem Beispiel gezeigt[1]). Wir zeigen noch

[1]) *R. Berger*, Über verschiedene Differentenbegriffe (erscheint demnächst in den Sitz.ber. d. Heidelberger Ak. d. W.).

**Satz 7.** *$R$ gehe aus $P$ durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente hervor. $R_S$ sei der (verallgemeinerte) Quotientenring von $R$ mit der Nennermenge $S$. Dann ist*

$$d_N\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = R_S d_N\left(\frac{R}{P}\right).$$

*Beweis*: Wir benutzen die Tatsache, daß $R_S \otimes_{P_S} R_S$ zum Quotientenring $(R \otimes_P R)_{S'}$ von $R \otimes_P R$ mit der Nennermenge $S'$, die aus allen Elementen der Form $s \otimes 1$, $1 \otimes s$, $(s \otimes 1)(1 \otimes \bar{s})$ mit $s, \bar{s} \in S$ besteht, isomorph ist, daß wir also nach der Regel $\frac{r_1}{s_1} \otimes \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 \otimes r_2}{s_1 \otimes s_2}$ rechnen dürfen. Wegen

$$\frac{r}{s} \otimes 1 - 1 \otimes \frac{r}{s} = \frac{(r \otimes 1 - 1 \otimes r)(1 \otimes s) - (s \otimes 1 - 1 \otimes s)(1 \otimes r)}{(s \otimes 1)(1 \otimes s)}$$

erkennt man sofort, daß das Differenzenideal $\mathfrak{R}'$ von $(R \otimes_P R)_{S'}$ gleich dem Erweiterungsideal von $\mathfrak{R}$ ist.

Ist $H' : R_S \otimes_{P_S} R_S \to R_S$ der durch $H'\left(\frac{r_1}{s_1} \otimes \frac{r_2}{s_2}\right) = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$ definierte Homomorphismus, so gilt für $\alpha \in R \otimes_P R$, $\beta \in S'$ gerade $H'\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{H(\alpha)}{H(\beta)}$. Es folgt: Ist $\alpha \in R \otimes_P R$ ein Element mit $\alpha\mathfrak{R} = 0$, so gilt auch $\alpha\mathfrak{R}' = 0$, wenn das Bild von $\alpha$ in $(R \otimes_P R)_{S'}$, ebenfalls mit $\alpha$ bezeichnet wird, daher $H'(\alpha) \in d_N\left(\frac{R_S}{P_S}\right)$ und somit $d_N\left(\frac{R}{P}\right) R_S \in d_N\left(\frac{R_S}{P_S}\right)$.

Ist umgekehrt $\frac{\alpha}{\beta}$ ein Element aus $R_S \otimes_{P_S} R_S$ $(\alpha \in R \otimes R,\ \beta \in S')$ mit $\frac{\alpha}{\beta}\mathfrak{R}' = 0$, so folgt $\alpha\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n}$ das Ideal aller Elemente $\nu \in R \otimes R$ ist, für die es ein $s'$ in $S'$ mit $s'\nu = 0$ gibt. Da $R$ aus $P$ durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente hervorgeht, ist $\mathfrak{R}$ endlich erzeugt. Daher gibt es ein $s' \in S'$ mit $s'\alpha\mathfrak{R} = 0$. Es ist also $H(s'\alpha) \in d_N\left(\frac{R}{P}\right)$, somit $H'\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \in d_N\left(\frac{R}{P}\right) R_S$. Damit hat man $d_N\left(\frac{R_S}{P_S}\right) \subseteq d_N\left(\frac{R}{P}\right) R_S$ und folglich $d_N\left(\frac{R_S}{P_S}\right) = d_N\left(\frac{R}{P}\right) R_S$.

Die Äquivalenz von 0-ter Kählerscher Differente und Noetherscher Differente und damit die Gültigkeit des Differentensatzes auch für die Noethersche Differente ist jetzt für alle Ringe bewiesen, die aus dem Grundring durch Ringadjunktion endlich vieler Elemente und anschließende Nenneraufnahme hervorgehen.

Es folgen die beiden angekündeten Beispiele. Zunächst

**Beispiel 1,** das zeigen soll, daß $d_N$ und $d_0$ schon für Ordnungen in Zahlkörpern verschieden sein können.

Es sei $k$ der Körper der rationalen Zahlen, $K = k(\sqrt[4]{2})$. $P$ sei der Ring der ganzen rationalen Zahlen und $R$ die Ordnung

$$R = P \cdot 1 \oplus P \cdot 2\sqrt[4]{2} \oplus P \cdot 2\sqrt{2} \oplus P \cdot 2\sqrt[4]{2^3}.$$

Nach dem am Schlusse von § 4 Gesagten ist $d_N\left(\frac{R}{P}\right)$ gleich der Dedekindschen Differente $d_D\left(\frac{R}{P}\right)$.

**1. Bestimmung der Kählerschen Differente:** Es ist

$$R = P[u, v, w] = P[U, V, W]/\mathfrak{n}$$

($u = 2x$, $v = 2x^2$, $w = 2x^3$, $x = \sqrt[4]{2}$, $U$, $V$, $W$ Unbestimmte), wobei das Ideal $\mathfrak{n}$ von den Polynomen $U^2 - 2V$, $V^2 - 8$, $W^2 - 4V$, $UV - 2W$, $UW - 8$, $VW - 4U$ erzeugt wird. Nach dem in § 1 angegebenen Rezept errechnet man hieraus leicht

$$d_0 = (2^6, 2^6 x, 2^6 x^2, 2^5 x^3).$$

2. Bestimmung der Dedekindschen Differente: Eine $P$-Modulbasis des Komplementärmoduls $R'$ von $R$ erhält man nach E. Noether (vgl. [5], S. 16) durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1, & 2x, & 2x^2, & 2x^3 \\ 1, & 2ix, & -2x^2, & -2ix^3 \\ 1, & -2x, & 2x^2, & -2x^3 \\ 1, & -2ix, & -2x^2, & 2ix^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $R' = P\frac{1}{2^2} \oplus P\frac{1}{2^3 x} \oplus P\frac{1}{2^3 x^2} \oplus P\frac{1}{2^3 x^3}$. Die Dedekindsche Differente von $R$ über $P$ besteht nun aus sämtlichen Elementen von $R$, die, mit allen Elementen von $R'$ multipliziert, wieder Elemente von $R$ ergeben. Man erhält $d_D = (2^5, 2^5 x, 2^5 x^2, 2^4 x^3) \neq d_0$.

**Beispiel 2** dient dazu, zu zeigen, daß auch die Noethersche und die Dedekindsche Differente in sehr einfachen Fällen voneinander verschieden sein können. Die explizite Berechnung der Noetherschen Differente (die i. A. schwierig ist) wird in diesem Beispiel nicht nötig sein, da man mit der Betrachtung des Differentialmoduls auskommt.

Es sei $Z$ der Körper der rationalen Zahlen, $P = Z[u, v]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten $u$, $v$ über $Z$, ferner $k = Z(u, v)$, $K = k(\sqrt{u})$, $R = P[u\sqrt{u}, v\sqrt{u}]$, $R^* = P[\sqrt{u}]$.

$R$ läßt sich als $P$-Modul in der Form

$$R = P \oplus (Px + Py) \quad \text{mit } x = u\sqrt{u},\ y = v\sqrt{u} \tag{2}$$

und als Restklassenring eines Polynomrings in der Form

$$R = P[X, Y]/\mathfrak{n}$$

schreiben, wobei $\mathfrak{n}$ von den Polynomen $X^2 - u^3$, $Y^2 - uv^2$, $XY - u^2 v$, $vX - uY$ erzeugt wird.

1. Untersuchung des Differentialmoduls $M\left(\frac{R}{P}\right)$: Es ist

$$M\left(\frac{R}{P}\right) = Rdx + Rdy = RdX \oplus RdY / M_0,$$

wobei der Untermodul $M_0$ von $RdX \oplus RdY$ von den Elementen $xdX$, $ydY$, $ydX + xdY$, $vdX - udY$ erzeugt wird. Wegen (2) erzeugen diese Elemente und ihre Produkte mit $x$ und $y$ gerade $M_0$ als $P$-Modul. Man erkennt aus dieser Tatsache und aus (2) sofort, daß $M\left(\frac{R}{P}\right)$ als $P$-Modul direkte Summe zweier $P$-Untermoduln ist:

$$M\left(\frac{R}{P}\right) = (Pdx + Pdy) \oplus (Pxdx + Pydx + Pydy).$$

Der erste direkte Summand kann in der Form $PdX \oplus PdY / M_0'$ geschrieben werden, wobei $M_0'$ von den Elementen $vdX - udY$, $u^3 dX$, $u^2 vdX$, $uv^2 dX$, $v^3 dX$ erzeugt wird.

2. Berechnung der Dedekindschen Differente: Ein Element $\varkappa \in K$ liegt genau dann im Komplementärmodul $R'$ von $R$, wenn Spur $(\varkappa r) \in P$ für alle $r \in R$ ist. Wegen (2) genügt es, $r = 1, x, y$ zu nehmen. Nun ist aber Spur $(\varkappa x) = u \cdot$ Spur $(\varkappa\sqrt{u})$, Spur $(\varkappa y) = v \cdot$ Spur $(\varkappa\sqrt{u})$. Damit beide Elemente in $P$ enthalten sind, ist notwendig

und hinreichend, daß Spur $(\varkappa\sqrt{u}) \in P$ ist. Dies bedeutet, daß $R'$ auch gleich dem Komplementärmodul von $R^*$ ist, für den man eine $P$-Modulbasis als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1, & \sqrt{u} \\ 1, & -\sqrt{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gewinnen wird. Also gilt $R' = P \oplus P\frac{1}{\sqrt{u}}$. Es ergibt sich $d_D = (x, y, u^2, uv)$.

3. Verschiedenheit von Dedekindscher und Noetherscher Differente: $d_D\left(\frac{R}{P}\right)$ kann nicht gleich $d_N\left(\frac{R}{P}\right)$ sein, denn sonst müßte $d_D$, wie aus dem Beweis von Satz 6 hervorgeht, im Annullator von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ enthalten sein. Nun liegt aber z. B. $u^2$ sicher nicht im Annullator von $M\left(\frac{R}{P}\right)$, wie man aus der unter 1. angegebenen $P$-Moduldarstellung von $M\left(\frac{R}{P}\right)$ entnimmt.

Es sei noch erwähnt, daß R. Berger ein entsprechendes Beispiel für die Verschiedenheit von $d_D$ und $d_N$ angegeben hat, wo neben $P$ auch noch $R$ ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist ($P$ und $R$ mit van der Waerden-Artinscher Idealtheorie). In diesem Beispiel sind $d_D$ und $d_N$ nicht einmal äquivalent im Sinne unserer obigen Definition (daher auch nicht $d_D$ und $d_0$), weshalb der Differentensatz für $d_D$ nicht gültig sein kann (sondern nur der abgeschwächte Differentensatz nach Einführung der Quasigleichheit). Die Gültigkeit des Differentensatzes für die Dedekindsche Differente beschränkt sich also auf Ordnungen und Hauptordnungen über Dedekindringen.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, meinem Lehrer, Herrn Prof. F. K. Schmidt sowie Herrn Dr. R. Berger für wertvolle Hinweise zu dieser Arbeit herzlich zu danken.

## Literatur.

[1] *H. Fitting*, Die Determinantenideale eines Moduls, Jahresbericht d. d. Math.-Vereinigung 1936.
[2] *H. Grell*, Verzweigungstheorie in allgemeinen Ordnungen algebraischer Zahlkörper, Math. Z. **40** (1936).
[3] *E. Kähler*, Algebra und Differentialrechnung, Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 1953.
[4] *E. Kähler*, Geometria Aritmetica, Annali di Matem. **55** (1958).
[5] *E. Noether*, Idealdifferentiation und Differente, Crelle, **188**.
[6] *D. G. Northcott*, Ideal Theory, Cambridge 1953.
[7] *P. Roquette*, Differentiale absolut regulärer Stellenringe, Arbeitsgemeinschaft über Stellenringe und Schnittmultiplizität in der alg. Geometrie, Oberwolfach 1958.
[8] *P. Roquette*, Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen, Hamb. Abh. **23** (1959).
[9] *P. Samuel*, Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

*Zusatz* bei der Korrektur: Erst jetzt wurde ich auf die Arbeit von *M. Auslander* und *D. A. Buchsbaum*, On Ramification Theory in Noetherian Rings, Am. J. of Math. **81** (1959), 3, hingewiesen in welcher der Differentensatz für die homologische Differente (=Noethersche Differente) auf anderem Wege, aber im wesentlichen unter den gleichen Voraussetzungen wie hier bewiesen wurde.

Eingegangen 20. November 1959.

# Propriétés des homomorphismes appliquant un demi-groupe D sur un autre, $\bar{D}$, ou sur un groupe, $\bar{G}$.

**A M. Wolfgang Krull, à l'occasion de son 60e anniversaire.**

Par *Paul Dubreil* à Paris.

---

**1.** D'intéressantes recherches de P. Lefebvre, consacrées notamment aux demi-groupes possédant des idéaux à droite minimaux et des idéaux à gauche minimaux, étudiés par Clifford, ou, ce qui revient au même, des complexes nets à droite minimaux et des complexes nets à gauche minimaux, m'ont amené à examiner d'une façon systématique le comportement dans les homomorphismes de quelques propriétés intervenant couramment dans la théorie des demi-groupes.

Ces propriétés (unitaire, fort, net, symétrique) sont celles qui appartiennent en bloc au noyau d'un homomorphisme appliquant un demi-groupe $D$ sur un groupe $\bar{G}$ (voir par exemple mon Algèbre, chap. V, B). Ici, nous les envisagerons isolément et nous considérerons en premier lieu (N° 2) les homomorphismes les plus généraux, appliquant $D$ sur un demi-groupe $\bar{D}$; ceux qui appliquent $D$ sur un groupe $\bar{G}$ seront étudiés au numéro 3.

J'avais déjà indiqué (Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 215 (1942), 239) des formes générales des théorèmes d'isomorphisme, faisant intervenir les équivalences régulières. L'application aux demi-groupes paraissait peu aisée parce que les équivalences principales d'un côté ne sont qu'un cas très particulier des équivalences régulières de ce côté, et de plus le complexe intervenant dans leur définition n'est pas en général une classe.

Malgré cela, et à condition de se limiter dans la plupart des cas au couple formé par un complexe $\bar{H}$ de l'image homomorphe $\bar{D}$ ou $\bar{G}$ et par son image inverse $H$ dans $D$, on peut obtenir les propriétés précises qui font l'objet de cet article. Pour être complet, j'ai mentionné dans cet ordre d'idées une proposition non encore publiée de M. Chaudhuri (théorème 1) et, avec sa démonstration, un théorème de M. Lefebvre (théorème 5). Je rappellerai aussi qu'en déterminant à quelle condition un complexe $A$ d'un demi-groupe $D$ est une classe suivant une équivalence régulière, Mme. Guillemot-Teissier a mis en évidence deux types intéressants de relations d'équivalence et obtenu, pour l'un d'eux, un théorème d'isomorphisme (Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 232 (1951), 1987).

**2.** Soit:

$$(\alpha) \qquad D \sim \bar{D} = \alpha D$$

un homomorphisme appliquant un demi-groupe $D$ sur un demi-groupe $\bar{D}$.

$\bar{H}$ étant un complexe de $\bar{D}$, il sera commode de désigner par $K, K', \ldots$ des complexes de $D$ tels que

$$\alpha K = \alpha K' = \cdots = \bar{H}$$

et par $H$ l'image inverse (réciproque) de $\bar{H}$:

$$H = \alpha^{-1}\bar{H} = \{x;\ x \in D,\ \alpha x \in \bar{H}\}.$$

$H$ est *saturé* par rapport à l'équivalence d'homomorphisme; il contient tout $K$ vérifiant $\alpha K = \bar{H}$ et on a $\alpha H = \bar{H}$.

**Théorème 1 (Chaudhuri).** *$H$ et $\bar{H}$ sont en même temps unitaires à droite (respectivement dans $D$ et dans $\bar{D}$).*

Des propriétés analogues concernant les complexes nets ou forts et les équivalences principales résultent des lemmes suivants:

**Lemme 1.** *Pour tout complexe $K$ de $D$ et tout élément $x$ de $D$, on a*

$$\alpha(K \cdot\!: x) \leqq \alpha K \cdot\!: \alpha x. \tag{1}$$

Si en effet $q \in K \cdot\!: x$, c'est à dire $xq \in K$ on a

$$\alpha x \cdot \alpha q \in \alpha K,\ \alpha q \in \alpha K \cdot\!: \alpha x.$$

De (1) résulte

$$K \cdot\!: x \leqq \alpha^{-1}(\alpha K \cdot\!: \alpha x) = \alpha^{-1}(\bar{H} \cdot\!: \alpha x). \tag{1'}$$

**Lemme 2.** *Pour tout complexe $\bar{H}$ de $\bar{D}$ et tout élément $x$ de $D$, on a (en posant toujours $H = \alpha^{-1}\bar{H}$):*

$$H \cdot\!: x = \alpha^{-1}(\bar{H} \cdot\!: \alpha x). \tag{2}$$

D'après (1') le premier membre est contenu dans le second. Soit alors $r \in \alpha^{-1}(\bar{H} \cdot\!: \alpha x)$ c'est à dire $\alpha r \in \bar{H} \cdot\!: \alpha x$ ou $\alpha(xr) \in \bar{H}$, il en résulte $xr \in \alpha^{-1}\bar{H} = H$, donc $r \in H \cdot\!: x$. On a bien l'égalité (2).

**Théorème 2.** 1°) *Soit $W_K$ le résidu à droite d'un complexe $K$; on a:*

$$W_K \geqq \alpha^{-1} W_{\alpha K}. \tag{3}$$

*par conséquent, si $K$ est net à droite dans $D$, $\alpha K$ est net à droite dans $\bar{D}$.*

2°) *Pour $H = \alpha^{-1}\bar{H}$, on a:*

$$W_H = \alpha^{-1} W_{\bar{H}}. \tag{4}$$

*Si $\bar{H}$ est net à droite dans $\bar{D}$, son image inverse $H$ est nette à droite dans $D$.*

1°) Si $x$ vérifie $\alpha K \cdot\!: \alpha x = \emptyset$, c'est à dire $\alpha x \in W_{\alpha K}$ ou $x \in \alpha^{-1} W_{\alpha K}$, on a, d'après (1'), $K \cdot\!: x = \emptyset$, donc $x \in W_K$, ce qui établit (3), d'où résulte immédiatement que, si $K$ est net à droite dans $D$, $\alpha K$ l'est dans $\bar{D}$.

2°) D'après (2), si $x \in W_H$, c'est à dire si $H \cdot\!: x = \emptyset$, on a nécessairement $\bar{H} \cdot\!: \alpha x = \emptyset$ donc $\alpha x \in W_{\bar{H}}$, $x \in \alpha^{-1} W_{\bar{H}}$. On a donc $W_H = W_{\alpha^{-1}\bar{H}} \leqq \alpha^{-1} W_{\bar{H}}$, d'où, d'après (3), l'égalité (4). Il en résulte que $\bar{H}$ et $H (= \alpha^{-1}\bar{H})$ sont *nets à droite en même temps.*

Pour étudier la correspondance entre les équivalences principales à droite $\mathcal{R}_{\alpha^{-1}H}$ et $\mathcal{R}_{\bar{H}}$, nous utiliserons une généralisation connue du premier théorème d'isomorphisme.

Soit d'abord $\alpha$ une application d'un ensemble $E$ *sur* un ensemble $\bar{E}$ (ou surjection):

$$E \to \bar{E} = \alpha E. \tag{$\alpha$}$$

A toute équivalence $\bar{\mathcal{R}}$ définie dans $\bar{E}$ associons dans $E$ l'équivalence $\lambda(\bar{\mathcal{R}})$ définie par

$$x \equiv y\,(\lambda(\bar{\mathcal{R}})) \text{ si } \alpha x \equiv \alpha y\,(\bar{\mathcal{R}}).$$

$\lambda(\bar{\mathcal{R}})$ contient l'équivalence d'application $\mathfrak{E}$ (définie par $x \equiv y\,(\mathfrak{E})$ si $\alpha x = \alpha y$).

Inversement, pour toute équivalence $\mathcal{R}$ définie dans $E$ et contenant $\mathfrak{E}$, considérons l'équivalence $\mu(\mathcal{R})$ définie dans $\bar{E}$ par

$$\bar{x} \equiv \bar{y}\,(\mu(\mathcal{R})) \text{ si } \exists\, x,\ y \in E \text{ tels que } \alpha x = \bar{x},\ \alpha y = \bar{y} \text{ et } x \equiv y(\mathcal{R}).$$

*On a $\mu[\lambda(\bar{\mathcal{R}})] = \bar{\mathcal{R}}$, $\lambda[\mu(\mathcal{R})] = \mathcal{R}$; $\lambda$ et $\mu$ sont deux bijections inverses, appliquant l'un sur l'autre d'une façon isotone l'ensemble des relations d'équivalence de $\bar{E}$ et l'ensemble des relations d'équivalence de $E$ contenant $\mathfrak{E}$.*

*Si $E$ et $\bar{E}$ sont munis de lois de composition que nous noterons multiplicativement, les propriétés de régularité (d'un côté, de l'autre ou des deux) sont conservées par l'application $\lambda$ (ou $\mu$). Lorsque $\mathcal{R}$ et $\bar{\mathcal{R}}$ sont régulières, on a l'isomorphisme des ensembles-quotients*

$$\frac{E}{\mathcal{R}} \simeq \frac{\bar{E}}{\bar{\mathcal{R}}} \quad \text{où } \mathcal{R} = \lambda(\bar{\mathcal{R}}).$$

Comparons alors les *équivalences principales à droite* $\mathcal{R}_H$ dans $D$, $\mathcal{R}_{\bar{H}}$ dans $\bar{D}$, où $H = \alpha^{-1}\bar{H}$.

**Théorème 3.** *On a*

$$\mathcal{R}_H = \lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}}). \tag{5}$$

Soit $x \equiv y(\mathcal{R}_H)$ c'est à dire $H \cdot x = H \cdot y$. Puisque, d'après (2), $\alpha(H \cdot x) = \bar{H} \cdot \alpha x$, on a $\bar{H} \cdot \alpha x = \bar{H} \cdot \alpha y$, c'est à dire $\alpha x \equiv \alpha y(\mathcal{R}_{\bar{H}})$, donc $x \equiv y(\lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}}))$; ainsi $\mathcal{R}_H \subseteq \lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}})$.

Inversement, soit $x \equiv y\,(\lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}}))$, c'est à dire $\alpha x \equiv \alpha y(\mathcal{R}_{\bar{H}})$ donc $\bar{H} \cdot \alpha x = \bar{H} \cdot \alpha y$. Il en résulte, d'après (2), $H \cdot x = H \cdot y$ c'est à dire $x \equiv y(\mathcal{R}_H)$. Nous avons $\lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}}) \subseteq \mathcal{R}_H$, d'où l'égalité (5).

**Corollaire.** *$H = \alpha^{-1}\bar{H}$ et $\bar{H}$ sont en même temps symétriques.*

On a en effet des égalités analogues à (4) et (5) pour les résidus à gauche et les équivalences principales à gauche; si $\bar{H}$ est symétrique, $H$ l'est aussi et inversement.

**Théorème 4.** *Si $\bar{H}$ est dans $\bar{D}$ un complexe fort, $H = \alpha^{-1}\bar{H}$ est dans $D$ un complexe fort, et inversement.*

Posons $I = (H \cdot x) \cap (H \cdot y)$, $\bar{I} = (\bar{H} \cdot \alpha x) \cap (\bar{H} \cdot \alpha y)$. D'après (2), $I = \alpha^{-1}\bar{I}$ (puisqu'une application *inverse* respecte les intersections).

Supposons $\bar{H}$ fort et soit $I \neq \emptyset$. Alors $\alpha\bar{I} = I \neq \emptyset$ ce qui entraîne $\bar{H} \cdot \alpha x = \bar{H} \cdot \alpha y$ d'où, d'après (2), $H \cdot x = H \cdot y$, $H$ est fort.

Inversement, supposons $H$ fort. Soit $(\bar{H} \cdot \bar{x}) \cap (\bar{H} \cdot \bar{y}) \neq \emptyset$ $(\bar{x}, \bar{y} \in \bar{D})$, Considérons deux éléments $x, y$ de $D$ tels que $\alpha x = \bar{x}$, $\alpha y = \bar{y}$; nous avons $\bar{I} \neq \emptyset$ d'où $I = (H \cdot x) \cap (H \cdot y) = \alpha^{-1}\bar{I} \neq \emptyset$, donc $H \cdot x = H \cdot y$ d'où, d'après (2), $\bar{H} \cdot \bar{x} = \bar{H} \cdot \bar{y}$; $\bar{H}$ est fort.

**3.** Considérons maintenant un homomorphisme $\varphi$ appliquant un demi-groupe $D$ sur un groupe $\bar{G}$:

$$D \sim \bar{G} = \varphi D. \tag{$\varphi$}$$

Nous désignons toujours par $S = \varphi^{-1}\bar{e}$ le *noyau* de $\varphi$.

Le théorème suivant, de Lefebvre, apporte une condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe $K$ de $G$ ait pour image $\varphi K = \bar{H}$ un *sous-groupe* de $\bar{G}$. Nous posons $H = \varphi^{-1}\bar{H} = \mathfrak{E}(K)$, extension saturée de $K$ par l'équivalence d'homomorphisme $\mathfrak{E}$.

**Théorème 5.** *Pour qu'un complexe $K$ de $D$ ait pour image un sous-groupe de $\bar{G}$, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition*

$$(6) \qquad \forall k \in K \text{ on a } K(S \cdot k) \subseteq H.$$

Rappelons la démonstration:

1°) Supposons $\varphi K$ *sous-groupe* de $\bar{G}$. Si $k$ et $k'$ appartiennent à $K$ et $x$ à $S \cdot k$, on a $kx \in S$, d'où $\varphi(kx) = \varphi k \cdot \varphi x = \bar{e}$ et par suite $\varphi(k'x) = \varphi k' \cdot (\varphi k)^{-1}$ appartient à $\varphi K$; nous avons donc $k'x \in \varphi^{-1}(\varphi K) = H$ et par conséquent $K(S \cdot k) \subseteq H$, $\forall k \in K$.

2°) Supposons $K(S \cdot k) \subseteq H = \varphi^{-1}(\varphi K)$, $\forall k \in K$. Soient $\bar{k}, \bar{k}'$ deux éléments de $\varphi K$; $k, k'$ deux éléments de $K$ tels que l'on ait: $\varphi k = \bar{k}$, $\varphi k' = \bar{k}'$; $x$ un élément de $S \cdot k (\neq \emptyset$ d'après les propriétés du noyau $S)$. Nous avons

$$k'x \in K(S \cdot k) \subseteq H$$

d'où $\bar{k}' \cdot \varphi x \in \varphi H = \varphi K$. Comme $kx \in S$ entraîne $\varphi x = \bar{k}^{-1}$, inverse de $\bar{k}$ dans le groupe $\bar{G}$, nous obtenons $\bar{k}' \bar{k}^{-1} \in \varphi K$ $\forall \bar{k}$ et $\bar{k}' \in \varphi K$; $\varphi K$ est bien un sous-groupe de $\bar{G}$.

**Remarque.** On a aussi la condition nécessaire et suffisante symétrique

$$\forall k \in K \qquad (S \cdot k) K \subseteq H.$$

**Théorème 6.** *Soit $U$ un sous-demi-groupe unitaire de $D$ contenant le noyau $S$ de l'homomorphisme $\varphi$.*

1°) *$U$ est saturé modulo $\mathfrak{E}$; $U = \mathfrak{E}(U) = \varphi^{-1}(\varphi U)$.*

2°) *$U$ a pour image $\varphi U = \bar{U}$ un sous-groupe de $\bar{G}$ (dont il est l'image inverse).*

1°) Soit $m \equiv u(\mathfrak{E})$ c'est à dire $S \cdot m = S \cdot u \neq \emptyset$, puisque $S$ est net. Soit donc $q$ un élément de $D$ vérifiant $mq \in S \subseteq U$, $uq \in S \subseteq U$. $U$ étant unitaire à gauche, il en résulte $q \in U$, $U$ étant unitaire à droite, $m \in U$. Nous avons donc $\mathfrak{E}(U) \subseteq U$ et par suite $\mathfrak{E}(U) = U$.

2°) En tenant compte de la première partie et du théorème 1, on conclut immédiatement que $\varphi U$ est, dans $\bar{G}$, un complexe unitaire (à droite par exemple) et par conséquent un sous-groupe. On peut le voir aussi en utilisant la condition du théorème 5. Si $u \in U$ et $x \in S \cdot u$, c'est à dire $ux \in S \subseteq U$, on a $x \in U$ et par conséquent $S \cdot u \subseteq U$ d'où

$$U(S \cdot u) \subseteq U^2 \subseteq U = \mathfrak{E}(U).$$

La condition (6) est vérifiée et $\varphi U = \bar{U}$ est un sous-groupe de $\bar{G}$.

Réciproquement, un sous-groupe $\bar{H}$ de $\bar{G}$ a pour image inverse dans $D$ un *sous-demi-groupe* $H = \varphi^{-1}\bar{H}$, qui est *unitaire* et contient le noyau $S$. Les images inverses des sous-groupes de $\bar{G}$ sont donc les *sous-demi-groupes unitaires contenant le noyau.* Mais de plus $\bar{H}$ est, dans $\bar{G}$, un complexe fort et net; donc $H$ est fort et net[1]) dans D. Enfin, les équivalences principales $\mathcal{R}_{\bar{H}}$ et ${}_{\bar{H}}\mathcal{R}$, réalisant la décomposition de $\bar{G}$ en classes à droite et en classes à gauche par rapport à $\bar{H}$, ont pour images respectives dans $D$ les équivalences principales à droite $\mathcal{R}_H = \lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}})$ et à gauche ${}_H\mathcal{R} = \lambda({}_{\bar{H}}\mathcal{R})$. Nous pouvons énoncer:

**Théorème 7.** *Les images inverses $H$, dans $D$, des sous-groupes $\bar{H}$ de $\bar{G}$ sont les sous-demi-groupes unitaires contenant le noyau $S$ de l'homomorphisme; ces sous-demi-groupes sont en outre forts et nets. On a $\mathcal{R}_H = \lambda(\mathcal{R}_{\bar{H}})$, ${}_H\mathcal{R} = \lambda({}_{\bar{H}}\mathcal{R})$.*

---

[1]) Le fait que $H$ est net résulte aussi du fait qu'il contient $S$ qui a lui-même cette propriété.

**Théorème 8.** *Pour que le sous-groupe $H$ soit invariant dans $G$, il faut et il suffit que son image inverse $H$ vérifie en outre l'une quelconque des conditions suivantes (équivalentes pour un sous-demi-groupe unitaire contenant $S$):*

a) *$H$ est symétrique,*

b) *$\mathcal{R}_H$ est régulière à gauche,*

b') *${}_H\mathcal{R}$ est régulière à droite.*

Rappelons que $H$ est invariant dans $\bar{G}$ si $\mathcal{R}_{\bar{H}} = {}_{\bar{H}}\mathcal{R}$ et seulement dans ce cas. Cette égalité, d'après le théorème 7, entraîne l'égalité $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ et alors, puisque $W_H = {}_HW = \emptyset$, $H$ est symétrique. Comme $\mathcal{R}_H$ est régulière à droite et ${}_H\mathcal{R}$ régulière à gauche, les conditions b) et b') sont remplies.

Inversement, $H$ symétrique implique $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ qui entraîne $\mathcal{R}_{\bar{H}} = {}_{\bar{H}}\mathcal{R}$; si maintenant $\mathcal{R}_H$ est régulière à gauche, son image $\mu(\mathcal{R}_H) = \mathcal{R}_{\bar{H}}$ l'est aussi d'après le premier théorème d'isomorphisme généralisé. Comme $\mathcal{R}_{\bar{H}}$ admet $\bar{H}$ pour classe-unité, on a $\mathcal{R}_{\bar{H}} = {}_{\bar{H}}\mathcal{R}$ puisque ${}_{\bar{H}}\mathcal{R}$ est la seule équivalence régulière à gauche, dans $\bar{G}$, admettant $\bar{H}$ pour classe unité.

**Remarque.** Si $\bar{H}$ est sous-groupe invariant de $\bar{G}$ et si $\psi$ est l'homomorphisme naturel appliquant $\bar{G}$ sur le groupe-quotient $\bar{G}/\bar{H}$, l'homomorphisme $\psi\varphi$ applique $D$ sur le groupe $\bar{G}/\bar{H}$, et admet $H$ pour noyau, ce qui exige que $H$ soit un sous-demi-groupe normal unitaire, en particulier qu'il soit symétrique: on pouvait prévoir ainsi une partie du théorème précédent.

---

Eingegangen 27. November 1959.

# Über den Modul der bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale in einem Körper von Primzahlcharakteristik.

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *Robert Berger* in Heidelberg.

---

**Inhaltsübersicht.**

Einleitung.
I. Modultheoretische Vorbemerkungen.
II. Mehrstufige diskrete Bewertungsringe.
III. Der Differentialmodul einer Ringerweiterung.
IV. Die bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale eines Körpers von Primzahlcharakteristik.
1. Formulierung des Struktursatzes.
2. Beweis des Struktursatzes.
Literatur.

## Einleitung.

Bei der arithmetischen Untersuchung algebraischer Funktionenkörper spielen die an einer Stelle ganzen Differentiale eine wichtige Rolle.

Es sei $K$ ein Körper, $k$ ein Unterkörper, $D$ die universelle Derivation von $K$ über $k$ mit dem Differentialmodul $KDK$ und $S$ eine Ordnung von $K$. Den von den Differentialen der Elemente von $S$ erzeugten $S$-Untermodul $SDS$ von $KDK$ nennen wir den „Modul der bei $S$ ganzen Differentiale von $K$ über $k$".

In der vorliegenden Arbeit wird $SDS$ für den Fall untersucht, daß $S$ ein diskreter Bewertungsring endlicher Stufe und $K$ ein Körper von Primzahlcharakteristik $p$ ist. Dabei setzen wir noch voraus, daß $K$ endlich algebraisch über dem Körperkompositum $K^p \cdot k$ von $K^p$ und $k$ ist. Wenn $K$ algebraischer Funktionenkörper in endlich vielen Unbestimmten über $k$ ist, ist diese Voraussetzung stets erfüllt.

Über die Struktur von $SDS$ läßt sich im allgemeinen keine befriedigende Aussage machen. Bedeutend glatter werden die Resultate, wenn man den Modul $SDS$ zunächst universell in einen Modul über einem maximalen Bewertungsring $\bar{S} \geqq S$ einbettet und die Struktur des universellen $\bar{S}$-Einbettungsmoduls $\bar{S} \cdot DS$ von $SDS$ untersucht, weil man dann die Struktursätze aus [5] zur Verfügung hat. Diese universelle $\bar{S}$-Einbettung ist ein Monomorphismus.

Die Struktur von $\bar{S} \cdot DS$ wird in Satz 12 vollständig bestimmt. Das Resultat von Satz 12 wurde für den Fall ein- und zweistufiger diskreter Bewertungsringe bereits in [1] mit Hilfe der Fortsetzungstheorie für Derivationen gewonnen. Die vorliegende Arbeit

gibt einen direkteren Beweis, bei dem nur die einfachsten Tatsachen über Derivationen benutzt werden.

Die ersten drei Kapitel enthalten eine Zusammenstellung von Sätzen über universelle Einbettung, mehrstufige diskrete Bewertungsringe und Derivationen, die beim Beweis des Struktursatzes in Kapitel IV gebraucht werden.

## I. Modultheoretische Vorbemerkungen.

Wir stellen zunächst einige bekannte Tatsachen über Operatorenbereichserweiterungen von Moduln zusammen, die wir in Kap. IV laufend brauchen werden.

*Es seien $S \geqq R$ kommutative unitäre Ringe mit derselben Eins, $M$ ein unitärer $R$-Modul.*

**Definition 1.** *Unter einer $S$-Einbettung von $M$ verstehen wir eine $R$-lineare Abbildung $\varphi$ von $M$ in einen unitären $S$-Modul $N$. Der von $\varphi(M)$ erzeugte $S$-Untermodul von $N$ heißt $S$-Einbettungsmodul von $M$.*

*Anmerkung.* Ist $\varphi$ eine $S$-Einbettung von $M$ in den $S$-Modul $N$, $\Lambda$ eine $S$-lineare Abbildung von $N$ in einen $S$-Modul $L$, so ist auch $\psi = \Lambda \circ \varphi$ eine $S$-Einbettung von $M$.

**Definition 2.** *Die $S$-Einbettung $\varphi$ von $M$ in den $S$-Modul $N$ heißt universelle $S$-Einbettung von $M$, wenn sich jede $S$-Einbettung $\psi$ von $M$ in der Form $\psi = \Lambda \circ \varphi$ erhalten läßt, wobei $\Lambda$ eine $S$-lineare Abbildung ist. Der von $\varphi(M)$ erzeugte $S$-Untermodul von $N$ heißt universeller $S$-Einbettungsmodul von $M$ und wird mit $S \cdot M$ bezeichnet.*

*Anmerkung.* Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $S \cdot M$ bis auf $S$-Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Ferner wird in [2] gezeigt, daß unter den angegebenen Voraussetzungen die universelle $S$-Einbettung von $M$ stets existiert. Man hat nämlich:

**Satz 1.** *Es ist $S \cdot M \cong S \otimes_R M$, und die universelle $S$-Einbettung von $M$ wird geliefert durch $\varphi(x) = 1 \otimes x \in S \otimes M$ für alle $x \in M$.* ($S \otimes M$ ist dabei in kanonischer Weise als $S$-Modul aufzufassen.)

Aus den Regeln für tensorielle Produkte erhält man sofort:

**Satz 2.** (*Transitivität*). *Ist $T$ ein kommutativer unitärer Oberring von $S$ mit derselben Eins, so gilt $T \cdot (S \cdot M) \cong T \cdot M$ in natürlicher Weise.*

**Satz 3.** *Ist $A$ ein multiplikativ abgeschlossenes System von $R$, das keine Nullteiler für $R$ oder $M$ enthält, $1 \in A$, $S = R_A$ der Quotientenring von $R$ bezüglich $A$, so ist die universelle $S$-Einbettung von $M$ ein Monomorphismus.*

*Beweis.* Nach [2] besteht der Kern der universellen $S$-Einbettung aus allen denjenigen Elementen $x$ von $M$, zu denen es ein $a \in A$ mit $a \cdot x = 0$ gibt. Nach Voraussetzung über $A$ ist das aber allein die Null von $M$.

**Satz 4.** *Sei $A$, $R$, $S$ wie in Satz 3. Sei ferner $\psi$ eine $R$-monomorphe Einbettung von $M$ in einen $S$-Modul $N$. Dann ist $\psi$ universelle $S$-Einbettung von $M$.*

*Beweis.* Sei $\varphi$ universelle $S$-Einbettung von $M$. Dann gibt es also eine $S$-lineare Abbildung $\Lambda$ von $S \cdot M$ in $N$ mit $\psi = \Lambda \circ \varphi$. Sei nun $x \in S \cdot M$, $\Lambda(x) = 0$. Da $S$ Quotientenring von $R$ ist, läßt sich $x$ in der Form $x = \frac{1}{a} \cdot \varphi(y)$ mit $y \in M$, $a \in A$ schreiben. Es folgt:

$$\Lambda(x) = \frac{1}{a} \cdot \Lambda \circ \varphi(y) = \frac{1}{a} \cdot \psi(y) = 0.$$

Damit hat man $\psi(y) = 0$ und folglich, weil $\psi$ ein Monomorphismus ist, $y = 0$ und daher auch $x = 0$. $\Lambda$ ist also ein Monomorphismus. q. e. d.

**Satz 5.** *Sei $R$ ein nullteilerfreier Elementarteilerring (s. [4]), $S$ ein nullteilerfreier Oberring, $M$ ein $R$-Modul, $T$ die Torsion von $M$, $\varphi$ universelle $S$-Einbettung von $M$. Dann ist der von $\varphi(T)$ erzeugte $S$-Untermodul von $S \cdot M$ die Torsion von $S \cdot M$.*

*Beweis.* Zunächst ist wegen der $R$-Linearität von $\varphi$ klar, daß die Elemente von $\varphi(T)$ Torsionselemente in $S \cdot M$ sind. Es bleibt zu zeigen, daß sich jedes Torsionselement von $S \cdot M$ durch Elemente von $\varphi(T)$ mit Koeffizienten aus $S$ darstellen läßt.

Wir denken uns $M$ dargestellt in der Form $M = N/Q$, wo $N$ einen von einem System $Y$ von Unbestimmten $Y_i$ aufgespannten freien $R$-Modul und $Q$ einen Untermodul bezeichnet. Dann ist

$$S \cdot M \cong S \otimes_R M \cong (S \otimes_R N)/S \otimes Q \cong N'/Q',$$

wo $N'$ den von den $Y_i$ aufgespannten freien $S$-Modul und $Q'$ den von den Elementen von $Q$ in $N'$ erzeugten $S$-Untermodul bezeichnet. (Wir fassen $N'$ als Obermodul von $N$ auf, was sicher geht, da $S$ Oberring von $R$ ist.) Es sei nun $x \in N'$ Repräsentant eines Torsionselementes von $N'/Q'$. Es gibt dann ein $s \neq 0$ aus $S$ mit $s \cdot x \in Q'$, d. h. $s \cdot x = \sum_{i=1}^{m} t_i \cdot q_i$ mit $t_i \in S$ und $q_i \in Q$. Sei nun $N_1$ der endlich erzeugte freie Teilmodul von $N$, der von den endlich vielen $Y_i$ aufgespannt wird, die man zur Darstellung der $q_i$ mit Koeffizienten aus $R$ und des $x$ mit Koeffizienten aus $S$ benötigt. Ferner sei $Q_1$ der von den $q_i$ erzeugte $R$-Modul. Es gilt dann offenbar $Q_1 \subseteq Q \cap N_1$.

Mit $N_1'$ bzw. $Q_1'$ bezeichnen wir die von $N_1$ bzw. $Q_1$ in $N'$ erzeugten $S$-Untermoduln.

$N_1$ ist ein freier $R$-Modul, $Q_1$ ein endlich erzeugter Untermodul, $R$ ein Elementarteilerring. Es gibt also eine Simultanbasis für $N_1$ und $Q_1$:

$$N_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R \cdot Z_i, \; Q_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} R \cdot r_i \cdot Z_i, \; r_i \in R.$$

Es folgt:

$$N_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S \cdot Z_i, \; Q_1' = \bigoplus_{i=1}^{n} S \cdot r_i \cdot Z_i.$$

Nun liegt nach Konstruktion $x$ in $N_1'$, $s \cdot x$ in $Q_1'$. Also gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot Z_i, \; s_i \in S,$$

$$s \cdot x = \sum_{i=1}^{n} s \cdot s_i \cdot Z_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot r_i \cdot Z_i \text{ mit } v_i \in S.$$

Da die $Z_i$ eine Basis von $N_1'$ bilden, folgt daraus:

$$s \cdot s_i = v_i \cdot r_i \text{ für alle } i.$$

In der Darstellung von $x$ braucht man natürlich nur solche $Z_i$ zu berücksichtigen, für die $s_i \neq 0$ gilt. Für diese gilt aber dann nach obiger Beziehung $r_i \neq 0$. Nun ist aber $r_i \cdot Z_i \in Q_1 \subseteq Q$. Das bedeutet, daß diese $Z_i$ Torsionselemente von $N/Q$ repräsentieren. Es gilt also beim Übergang zu Klassen mod $Q'$:

$$\bar{x} = \sum_i s_i \cdot \varphi(\bar{Z}_i), \; \bar{Z}_i \in T. \qquad \text{q. e. d.}$$

**Korollar.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 gilt: Ist $M$ torsionsfrei, so ist auch $S \cdot M$ torsionsfrei.*

**Satz 6.** *Seien $S \supseteq R$ Integritätsbereiche, $M$ ein torsionsfreier $R$-Modul. Dann ist die universelle $S$-Einbettung von $M$ ein Monomorphismus. Hat außerdem $M$ endlichen Rang, so gilt: $Rg(M) = Rg(S \cdot M)$.* (Rang = Maximalzahl linear unabhängiger Elemente.)

*Beweis.* $K$ bzw. $k$ seien die Quotientenkörper von $S$ bzw. $R$, $\varphi$ universelle $S$-Einbettung von $M$, $\mu$ universelle $k$-Einbettung von $M$, $\lambda$ universelle $K$-Einbettung von $k \cdot M$, $\nu$ universelle $K$-Einbettung von $S \cdot M$. Man hat dann nach dem Transitivitätsgesetz ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S \cdot M \arrow[r, "\nu"] & K \cdot M \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\mu"] & k \cdot M \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

$\mu$ ist ein Monomorphismus nach Satz 3. $\lambda$ ist ebenfalls ein Monomorphismus, weil $k \cdot M$ als Vektorraum über einem Körper frei ist. Also muß, wegen der Kommutativität des Diagrammes, auch $\varphi$ ein Monomorphismus sein. Das zeigt die erste Behauptung. Außerdem gilt ersichtlich:

$$Rg(M) = Rg(k \cdot M) = Rg(K \cdot M) = Rg(S \cdot M). \qquad \text{q. e. d.}$$

**Korollar.** *Sind $y_1, \ldots, y_n \in M$, linear unabhängig über $R$, so sind auch $\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_n)$ linear unabhängig über $S$.*

Zum Schluß dieses Kapitels zeigen wir noch einen Satz einer völlig anderen Art, der im Kapitel IV die Grundlage für die dortigen Rangaussagen bilden wird:

**Satz 7.** *Es sei $R$ ein allgemeiner Bewertungsring* ([6]),

*$v$ eine Nichteinheit von $R$,*

*$M$ ein torsionsfreier $R$-Modul,*

*$M = F \oplus Z$,*

*$F$ endlich erzeugt (also frei),*

*$Z$ ein $v$-Divisionsmodul (d. h. zu jedem $a \in Z$ gibt es ein $b \in Z$ mit $a = v \cdot b$),*

*$H$ ein endlich erzeugter Untermodul von $M$,*

*$M/H$ torsionsfreier $v$-Divisionsmodul.*

*Dann gilt*

$$Rg(F) = Rg(H).$$

*Beweis.* 1) $Rg(F) \leqq Rg(H)$: Wir setzen zur Abkürzung $F' = M/Z$, $H' = H + Z/Z$. Es ist dann $F' \cong F$. Man hat dann einerseits:

$$M/H + Z \cong (M/Z)/(H + Z/Z) \cong F'/H'$$

ist als homomorphes Bild von $F' \cong F$ endlich erzeugt.

Andererseits gilt:

$$M/H + Z \cong (M/H)/(H + Z/H)$$

ist als homomorphes Bild von $M/H$ ein $v$-Divisionsmodul.

$F'/H'$ ist endlich erzeugt. Sei $y_1, \ldots, y_n$ ein Erzeugendensystem kürzester Länge. Da andererseits $F'/H'$ ein $v$-Divisionsmodul ist, gilt $F'/H' = v \cdot (F'/H')$. Es liegt also auch $y_1$ in $v \cdot (F'/H')$, d. h. es gibt eine Darstellung

$$y_1 = a_1 \cdot v \cdot y_1 + \cdots + a_n \cdot v \cdot y_n.$$

Es folgt:

$$(1 - a_1 \cdot v) \cdot y_1 = a_2 \cdot v \cdot y_2 + \cdots + a_n \cdot v \cdot y_n.$$

Nach Voraussetzung ist $v$ Nichteinheit des Bewertungsringes $R$. Also ist $1 - a_1 \cdot v$ Einheit in $R$ und $y_1$ läßt sich durch die $y_2, \ldots, y_n$ ausdrücken im Widerspruch zu der Annahme, daß die $y_i$ ein Erzeugendensystem kürzester Länge bilden. Es folgt daraus: $F'/H' = (0)$.

Daher gilt: $F' = H'$ und folglich:

$$Rg(F) = Rg(F') = Rg(H') \leqq Rg(H),$$

weil $H'$ homomorphes Bild von $H$ ist. q. e. d.

2) $Rg(F) \geqq Rg(H)$: $H$ ist als endlich erzeugter torsionsfreier Modul über einem Bewertungsring frei. Sei $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $H$. Dann ist $r = Rg(H)$. Als Elemente von $M = F \oplus Z$ gestatten die $x_i$ eine eindeutige Zerlegung $x_i = f_i + z_i$ mit $f_i \in F$, $z_i \in Z$.

Wir werden nun zeigen, daß die $f_1, \ldots, f_r$ über $R$ linear unabhängig sind. Dann enthält $F$ mindestens $r$ linear unabhängige Elemente, d. h. $Rg(F) \geqq r = Rg(H)$. Die lineare Unabhängigkeit der $f_i$ zeigen wir indirekt: Es gelte eine Beziehung $a_1 \cdot f_1 + \cdots + a_r \cdot f_r = 0$ mit Elementen $a_i \in R$, die nicht alle gleich Null sind. Da $R$ ein Bewertungsring ist, dürfen wir etwa annehmen, daß $a_1 \neq 0$ ist und $a_1$ alle weiteren $a_i$ teilt. Sei also $a_i = a_1 \cdot b_i$ mit $b_i \in R$ für alle $i$. Es folgt: $a_1 \cdot (f_1 + \cdots + b_r \cdot f_r) = 0$ und wegen der Torsionsfreiheit von $M$ weiter: $f_1 + \cdots + b_r \cdot f_r = 0$.

Berücksichtigt man nun, daß nach Wahl der $f_i$ gilt $f_i = x_i - z_i$, so ergibt das:

$$x_1 + (b_2 \cdot x_2 + \cdots + b_r \cdot x_r) = z_1 + b_2 \cdot z_2 + \cdots + b_r \cdot z_r.$$

Wir nennen dieses Element $y$. Es liegt, wie man aus seinen beiden Darstellungen sieht, sowohl in $H$ als auch in $Z$. Als Element von $Z$ ist $y$ durch $v$ teilbar:

$$y = v \cdot y' \text{ mit } y' \in Z.$$

Da $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $H$ bilden und $v$ eine Nichteinheit von $R$ ist, ist $y$ innerhalb von $H$ nicht durch $v$ teilbar, wie man an der Darstellung

$$y = x_1 + (b_2 \cdot x_2 + \cdots + b_r \cdot x_r)$$

sieht. Es gilt also:

$$y' \not\equiv 0 \bmod H, \; v \cdot y' = y \equiv 0 \bmod H.$$

$y'$ repräsentiert also ein Torsionselement von $M/H$. Nach Voraussetzung ist aber $M/H$ torsionsfrei. Die Annahme einer linearen Abhängigkeit der $f_i$ führt also zu einem Widerspruch. q. e. d.

## II. Mehrstufige diskrete Bewertungsringe.

**Definition 3.** *Ein Bewertungsring $S$ heißt $n$-stufig diskret, wenn die zugehörige Wertegruppe die $n$-rangige diskrete Gruppe ist.*

Unter der $n$-rangigen diskreten Gruppe verstehen wir dabei nach [6] die Gruppe, die von allen lexikographisch geordneten $n$-Tupeln $(a_1, \ldots, a_n)$ bei komponentenweiser Addition gebildet wird, wo die $a_i$ einer additiven geordneten, zur Gruppe der ganzen Zahlen isomorphen Gruppe $\Gamma$ entstammen.

Wir stellen im folgenden die wichtigsten Tatsachen über solche $n$-stufigen diskreten Bewertungsringe zusammen. Für nähere Einzelheiten verweisen wir auf [6].

Bezeichnet $w$ die Bewertung des Quotientenkörpers $K$ von $S$, so ist $S$ charakterisiert als die Menge aller Elemente $x$ von $K$ mit $w(x) \geqq (0, \ldots, 0)$. $S$ enthält genau $n + 1$ von $S$ verschiedene Primideale:

$$\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_{n-1} > \cdots > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_0 = (0).$$

Sie sind charakterisiert durch:

$\mathfrak{P}_i = \{x;\, x \in S,\, w(x) > (0, \ldots, 0, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)$ für *alle* solchen $n$-Tupel der Wertegruppe$\}$.

Für $i = 1, \ldots, n$ sei nun $u_i$ ein Element mit

$$w(u_i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

wobei die 1 an $i$-ter Stelle steht. (Wir nehmen für $\Gamma$ die Gruppe der ganzen Zahlen.) Außerdem setzen wir noch $u_{n+1} = 1$.

**Anmerkung.** Es ist $\mathfrak{P}_n = S \cdot u_n$. Die übrigen $\mathfrak{P}_i$ für $i \geqq 1$ sind nicht endlich erzeugbar.

Es sei nun $I$ ein im Quotientenkörper $K$ von $S$ enthaltener $S$-Modul. Entweder ist $I = K$ oder es gibt ein $u_i$, so daß nicht alle Elemente von $I$ sich in der Form $x \cdot u_i$ mit $x \in I$, wohl aber in der Form $y \cdot u_{i+1}$ mit $y \in I$ schreiben lassen. Man sieht, daß $I$ als $S$-Modul dann isomorph ist zu

$$S_{\mathfrak{P}_i} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in S,\ b \notin \mathfrak{P}_i\right\} (\cong \mathfrak{P}_i) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Ist $M$ ein beliebiger torsionsfreier $S$-Modul vom Rang 1, so läßt sich $M$ stets $S$-monomorph in $K$ einbetten (s. a. Satz 6). Daraus folgt:

**Satz 8.** *Sei $M$ ein torsionsfreier $S$-Modul vom Rang 1. Dann ist $M$ isomorph zu einem der $S$-Moduln $S_{\mathfrak{P}_i}$, $i = 0, \ldots, n$.*

Zum Abschluß dieses Kapitels beweisen wir noch zwei Struktursätze über $n$-stufige diskrete Bewertungsringe, die Verallgemeinerungen eines Struktursatzes von F. K. Schmidt für einstufige diskrete Bewertungsringe darstellen.

**Satz 9.** *Es sei $K = k(x)$ eine einfache Körpererweiterung, $S$ ein $n$-stufiger diskreter Bewertungsring von $K$ mit den Primidealen*

$$\mathfrak{P}_n > \cdots > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_0 = (0),$$

$$s = S \cap k,\ \mathfrak{P}_1 = S \cdot (\mathfrak{P}_1 \cap s),\ S/\mathfrak{P}_1 = s + \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1.$$

*Hat man dann eine Folge von Elementen $x_i \in S$ mit*

$$x_0 = x \in S,\ x_i - a_i = x_{i+1} \cdot g_i \text{ mit } g_i,\ a_i \in s;\ g_i \in \mathfrak{P}_1$$

*und setzt man $R_i = s[x_i]$, so gilt:*

$$R_i \subseteqq R_{i+1} \text{ und } S = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)_{\mathfrak{P}_n} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i,\ b \notin \mathfrak{P}_n\right\}.$$

*Beweis.* Wir gliedern den Beweis der Übersichtlichkeit halber in mehrere Punkte.

a) Wir überlegen zunächst, daß man die bei der Herleitung von Satz 8 definierten Elemente $u_i$ in $s$ wählen kann: Sei $u_i \in S$, dann gibt es wegen $S/\mathfrak{P}_1 = s + \mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_1$ ein Element $v_i \in s$ mit $u_i - v_i \in \mathfrak{P}_1$. Für $i \geqq 2$ hat man dann: $w(u_i - v_i) > w(u_i)$ und daher $w(u_i) = w(v_i)$. Man kann also an Stelle der $u_i$ die $v_i \in s$ nehmen. Wegen $\mathfrak{P}_1 = S \cdot (\mathfrak{P}_1 \cap s)$ hat man schließlich $u_1 = z \cdot u_1'$ mit $z \in S$; $u_1' \in (\mathfrak{P}_1 \cap s)$. Aus $w(u_1) = (1, 0, \ldots, 0)$ folgt dann $w(u_1') = (1, m_2, \ldots, m_n)$. Sei $v_1 = u_1' \cdot u_2^{-m_2} \cdots u_n^{-m_n}$, $u_2, \ldots, u_n \in s$. Dann liegt auch $v_1$ in $s$ und es gilt $w(v_1) = (1, 0, \ldots, 0)$. Man kann also an Stelle von $u_1$ auch $v_1 \in s$ nehmen. Wir denken uns daher die $u_i$ für die Dauer des Beweises in $s$ gewählt.

b) Sei $x \in \mathfrak{P}_i \cap R_i$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $m$ mit

$$u_{i+1}^m \cdot x \in (x_i - a_i) \cdot R_i + u_i \cdot R_i.$$

Beweis. Als Element von $R_i$ gestattet $x$ eine Darstellung in der Form $x = f(x_i)$ mit $f(X) \in s[X]$. Es ist nach Voraussetzung $x_i \equiv a_i \bmod \mathfrak{P}_1$. Wegen $\mathfrak{P}_1 \subseteqq \mathfrak{P}_i$ gilt dann

diese Kongruenz auch mod $\mathfrak{P}_i$. Man hat also: $f(a_i) \equiv f(x_i) \equiv 0 \bmod \mathfrak{P}_i$ in $S$. Die Kongruenz gilt dann auch in $S' = S_{\mathfrak{P}_i}$ mod $\mathfrak{P}_i' = S' \cdot \mathfrak{P}_i$. Bezeichnen wir mit einem Querstrich die Restklassen modulo $\mathfrak{P}_i'$, so bedeutet das, daß das Polynom $\bar{f}(X)$ aus $\bar{s}'[X]$ die Nullstelle $\bar{a}_i \in \bar{s}'$ besitzt ($s' = s_{\mathfrak{P}_i}$). $\bar{s}' = s_{\mathfrak{P}_i}/s' \cap \mathfrak{P}_i'$ ist aber ein Körper. Also gibt es eine Zerlegung $\bar{f}(X) = (X - \bar{a}_i) \cdot \bar{h}(X)$ mit $\bar{h}(X) \in \bar{s}'[X]$. Beachtet man schließlich noch, daß $\mathfrak{P}_i' \cap s'$ Hauptideal ist und von $u_i$ erzeugt wird, so folgt durch Übergang zu Repräsentanten aus $s'$:

$$f(X) = (X - a_i) \cdot h(X) + u_i \cdot g(X); \; h(X), \; g(X) \in s'[X].$$

Ein beliebiges Element $b$ von $s' = s_{\mathfrak{P}_i}$ läßt sich als $\frac{y}{z}$ mit $y, z \in s$, $z \notin \mathfrak{P}_i$ schreiben. Es gilt daher $w(z) < (0, \ldots, 0, m_{i+1}, 0, \ldots, 0)$ für hinreichend großes $m_{i+1} > 0$. Daraus folgt: $\frac{u_{i+1}^{m_{i+1}}}{z} \in s$, also auch $u_{i+1}^{m_{i+1}} \cdot b \in s$. Es gibt daher eine natürliche Zahl $m$ derart, daß nach Multiplikation mit $u_{i+1}^m$ alle Koeffizienten von $h(X)$ und $g(X)$ in $s$ liegen. Es folgt:

$$u_{i+1}^m \cdot x = u_{i+1}^m \cdot f(x_i) \in (x_i - a_i) \cdot R_i + u_i \cdot R_i. \qquad \text{q. e. d.}$$

c) Sei $x \in R_i$, $\frac{x}{u_i^r} \in S$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $m$ mit

$$\frac{u_{i+1}^m \cdot x}{u_i^r} \in R_{i+r}.$$

Beweis: Induktion nach $r$. Für $r = 0$ ist nichts zu zeigen. Die Behauptung sei nun richtig für $r$ und es sei $x \in R_i$, $\frac{x}{u_i^{r+1}} \in S$.

Dann liegt $\frac{x}{u_i^r}$ in $S \cap \mathfrak{P}_i$. Es gilt also nach Induktionsannahme

$$u_{i+1}^{m_1} \cdot \frac{x}{u_i^r} \in \mathfrak{P}_i \cap R_{i+r} \text{ mit einem } m \geqq 0,$$

und folglich gilt nach b):

$$\frac{u_{i+1}^{m_2} \cdot x}{u_i^r} \in (x_{i+r} - a_{i+r}) \cdot R_{i+r} + u_i \cdot R_{i+r} \text{ mit einem } m_2 \geqq m_1.$$

Nun gilt nach Voraussetzung

$$x_{i+r} - a_{i+r} = g_{i+r} \cdot x_{i+r+1} \text{ mit } g_{i+r} \in \mathfrak{P}_1 \cap s.$$

Für $t \geqq 2$ ist $\frac{g_{i+r}}{u_i} = g_{i+r}' \in s$ und man hat:

$$\frac{u_{i+1}^m \cdot x}{u_i^{r+1}} \in g_{i+r}' \cdot x_{i+r+1} \cdot R_{i+r} + 1 \cdot R_{i+r} \subseteq R_{i+r+1} \text{ mit } m = m_2.$$

Im Fall $t = 1$ gibt es eine natürliche Zahl $m_3$ mit $g_{i+r} \cdot u_2^{m_3} = g_{i+r}' \in u_1 \cdot s$. Man erhält dann $\frac{u_2^m \cdot x}{u_1^{r+1}} \in R_{i+r+1}$ wie oben, wenn man $m = m_2 + m_3$ setzt. q. e. d.

d) Wir zeigen nun die Behauptung von Satz 9. $R_i \subseteq R_{i+1}$ ist klar, denn es gilt $x_i = x_{i+1} \cdot g_i + a_i \in R_{i+1}$. Außerdem sind alle $R_i$ und somit auch $\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)_{\mathfrak{P}_n}$ in $S$ enthalten. Ferner läßt sich wegen $K = k(x)$ jedes Element von $S$ als Quotient zweier Elemente aus $R_0 = s[x]$ schreiben. Die Behauptung von Satz 9 ist daher bewiesen, wenn wir zeigen,

daß es zu jedem Quotienten $\frac{y}{z} \in S$ mit $y, z \in R_i$ ein $j$ mit $\frac{y}{z} \in (R_j)_{\mathfrak{P}_n}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ gibt. Zu dem Element $z$ gibt es eine größte tganze Zahl $t$ mit $n + 1 \geqq t > 0$ derart, daß $z \notin \mathfrak{P}_{t-1}$ gilt. Wir beweisen unsere Behauptung nun durch Rekursion nach $t$.

Für $t = n + 1$ gilt $z \notin \mathfrak{P}_n$, also $\frac{y}{z} \in (R_i)_{\mathfrak{P}_n}$. Sei nun die Behauptung bewiesen für alle Quotienten $\frac{y}{z} \in S$, $z, y \in R_i$, $z \notin \mathfrak{P}_t$ und alle $i$. Es sei nun $\frac{y}{z} \in S$, $y, z \in R_i$, $z \notin \mathfrak{P}_{t-1}$. Wegen $z \notin \mathfrak{P}_{i-1}$ gibt es eine natürliche Zahl $m_1$ mit $z \cdot u_{i+1}^{m_1} = z_1 \cdot u_i^r$, $z_1 \in S$, $z_1 \notin \mathfrak{P}_t$. Nach c) hat man dann $u_{i+1}^{m_2} \cdot z_1 \in R_{i+r}$, $m_2 \geqq 0$. Ferner ist

$$\frac{y \cdot u_{i+1}^{m_1}}{u_i^r} = z_1 \cdot \frac{y}{z} \in S,$$

also nach c):

$$y_1 = \frac{y \cdot u_{i+1}^{m_3}}{u_i^r} \in R_{i+r} \text{ mit einem } m_3 \geqq m_1.$$

Insgesamt ergibt das:

$$\frac{y}{z} = \frac{u_{i+1}^{-m_2} \cdot y_1}{u_{i+1}^{-m_1} \cdot z_1} = \frac{u_{i+1}^{m_1+m_3} \cdot y_1}{u_{i+1}^{m_2} \cdot (u_{i+1}^{m_3} \cdot z_1)}.$$

Zähler und Nenner des letzten Quotienten liegen nach Konstruktion in $R_{i+r}$. Außerdem liegt der Nenner nicht in $\mathfrak{P}_t$, weil $z_1$ nicht in $\mathfrak{P}_t$ liegt. Nach Rekursionsannahme gibt es also ein $j$, so daß der Quotient in $(R_j)_{\mathfrak{P}_n}$ liegt. Da $\frac{y}{z}$ ein beliebiges Element von $S$ war, ist damit Satz 9 bewiesen.

**Satz 10.** *Es seien $K \geqq k$ zwei Körper, $K$ algebraisch über $k$, $S$ ein $n$-stufiger diskreter Bewertungsring von $K$ mit den Primidealen $\mathfrak{P}_n > \cdots > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_0 = (0)$, $s = S \cap k$. Unter den $\mathfrak{P}_i$ gebe es ein $\mathfrak{P}_m$ mit folgenden Eigenschaften:*

*$\mathfrak{P}_m = S \cdot (\mathfrak{P}_m \cap s)$, $S/\mathfrak{P}_m = s + \mathfrak{P}_m/\mathfrak{P}_m$ und $(K' : k') = (K : k)$, wenn $K'$ bzw. $k'$ die Quotientenkörper von $S/\mathfrak{P}_{m-1}$ bzw. von $s + \mathfrak{P}_{m-1}/\mathfrak{P}_{m-1}$ bezeichnen. Außerdem gebe es ein Element $x \in S$ mit $K = k(x)$, $K' = k'(x')$, $x'$ die Restklasse von $x$ mod $\mathfrak{P}_{m-1}$.*

*Dann gibt es eine Folge von Ringen $R_i$ und Elementen $x_i \in S$ mit folgenden Eigenschaften: $R_i \leqq R_{i+1}$, $R_i = s[x_i]$, $K = k(x_i)$ für alle $i = 0, 1, \ldots$ und*

$$S = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)_{\mathfrak{P}_n} = \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i,\ b \notin \mathfrak{P}_n\right\}.$$

*Beweis*: Wir definieren zunächst rekursiv die Folge der $x_i$. Wir setzen $x_0 = x$. Sei nun $x_i \in S$ schon definiert. Wegen $S/\mathfrak{P}_m = s + \mathfrak{P}_m/\mathfrak{P}_m$ gibt es dann zu $x_i$ ein Element $a_i \in s$ mit $x_i - a_i \in \mathfrak{P}_m$. Nun ist nach Voraussetzung $\mathfrak{P}_m = S \cdot (\mathfrak{P}_m \cap s)$. Also gibt es ein Element $g_i \in s \cap \mathfrak{P}_m$ und ein Element $y_i \in S$ mit $x_i - a_i \in g_i \cdot y_i$. Wir definieren: $x_{i+1} = y_i$. Wir setzen $R_i = s[x_i]$ für alle $i = 0, 1, \ldots$. Auf Grund der Definition der $x_i$ hat man dann: $x_i \in R_{i+1}$, also $R_i \leqq R_{i+1}$ und wegen $K = k(x_0)$ auch $K = k(x_i)$ für alle $i = 0, 1, \ldots$. Schließlich liegen nach Konstruktion alle $R_i$ in $S$, also gilt auch

$$\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)_{\mathfrak{P}_n} \subseteq S.$$

Wir müssen also nur noch zeigen, daß es zu vorgegebenem $y \in S$ stets ein $i$ mit $y \in (R_i)_{\mathfrak{P}_n}$ gibt.

Dazu betrachten wir die Ringe $S' = S/\mathfrak{P}_{m-1}$ und $s' = s + \mathfrak{P}_{m-1}/\mathfrak{P}_{m-1}$. $S'$ ist ein diskreter Bewertungsring von $K'$ mit den Primidealen

$$\mathfrak{P}'_n > \cdots > \mathfrak{P}'_m > \mathfrak{P}'_{m-1} = (0), \quad \mathfrak{P}'_j = \mathfrak{P}_j/\mathfrak{P}_{m-1}.$$

Außerdem ist $s' = S' \cap k'$, $K' = k'(x')$, $\mathfrak{P}'_m = S' \cdot (\mathfrak{P}'_m \cap s')$ und $S'/\mathfrak{P}'_m = s' + \mathfrak{P}'_m/\mathfrak{P}'_m$. Es seien $y'$, $x'_i$, $a'_i$, $g'_i$ die Restklassen der ungestrichenen Elemente mod $\mathfrak{P}_{m-1}$. Dann gilt: $x'_i - a'_i = g'_i \cdot x'_{i+1}$ für alle $i$, $g'_i \in \mathfrak{P}'_m \cap s'$, $a'_i \in s'$. Nach Satz 9 gibt es dann zu $y'$ ein $i$ mit $y' \in (s'[x'_i])_{\mathfrak{P}'_n}$, d. h. $y' = \dfrac{a'}{b'}$ mit $a', b' \in s'[x'_i]$, $b' \notin \mathfrak{P}'_n$. Beim Übergang zu Repräsentanten $a, b \in s[x^i]$ bedeutet das: $b \cdot y - a \in \mathfrak{P}_{m-1}$, $b \notin \mathfrak{P}_n$. Nun betrachten wir die Ringe $R'' = S_{\mathfrak{P}_{m-1}}$ und $s'' = s_{\mathfrak{P}_{m-1}}$. Es ist $S''$ ein diskreter Bewertungsring von $K$ mit den Primidealen

$$\mathfrak{P}''_{m-1} > \cdots > \mathfrak{P}''_1 > \mathfrak{P}''_0 = (0), \quad \mathfrak{P}''_j = S'' \cdot \mathfrak{P}_j.$$

Außerdem ist $s'' = S'' \cap k''$, $K' = S''/\mathfrak{P}''_{m-1}$, $k' = s'' + \mathfrak{P}''_{m-1}/\mathfrak{P}''_{m-1}$, $K' = k'(x'_0)$ und $(K' : k') = (K : k)$. Daraus folgt $S'' = s''[x_0]$ und

$$\mathfrak{P}''_{m-1} = S'' \cdot (\mathfrak{P}''_{m-1} \cap s'') = S'' \cdot (\mathfrak{P}_{m-1} \cap s).$$

Aus $b \cdot y - a \in \mathfrak{P}_{m-1} \subseteqq \mathfrak{P}''_{m-1}$ folgt daher $b \cdot y - a = u \cdot f(x_0)$ mit $u \in \mathfrak{P}_{m-1} \cap s$, $f(X) \in s''[X]$. Ein Element aus $s'' = s_{\mathfrak{P}_{m-1}}$ geht durch Multiplikation mit einem Element aus $\mathfrak{P}_{m-1} \cap s$ in ein Element aus $s$ über. Es folgt $u \cdot f(X) \in s[X]$ und daher $b \cdot y - a \in R_0 \subseteqq R_i$, also wegen $a, b \in R_i$, $b \notin \mathfrak{P}_n$ schließlich $y \in (R_i)_{\mathfrak{P}_n}$. q. e. d.

## III. Der Differentialmodul einer Ringerweiterung.

**Voraussetzung.** *Es seien $S \supseteqq R$ zwei kommutative unitäre Ringe mit derselben Eins.*

**Definition 4.** *Eine Derivation $D$ von $S$ über $R$ ist eine Abbildung von $S$ in einen unitären $S$-Modul $M$ mit den folgenden drei Eigenschaften:*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ D(a+b) = D(a) + D(b) \\ 2)\ D(a \cdot b) = a \cdot D(b) + b \cdot D(a) \\ 3)\ D(r) = 0 \end{array}\right\} \textit{ für alle } a, b \in S,\ r \in R.$$

*Der von den Bildern der Elemente von $S$ bei $D$ erzeugte $S$-Untermodul $SDS$ von $M$ heißt der Deriviertenmodul von $S$ über $R$ bezüglich $D$.*

**Anmerkung.** Ist $D$ eine Derivation von $S$ über $R$ in $M$, $\Lambda$ eine $S$-lineare Abbildung von $M$ in einen $S$-Modul $L$, so ist $\Lambda \circ D$ eine Derivation von $S$ über $R$ in $L$. Das gibt Anlaß zu der folgenden Definition:

**Definition 5.** *Eine Derivation $D$ von $S$ über $R$ heißt universelle Derivation von $S$ über $R$, wenn sich jede Derivation von $S$ über $R$ in der Form $\Lambda \circ D$ schreiben läßt, wobei $\Lambda$ eine $S$-lineare Abbildung ist.*

Dieser Begriff wurde von E. Kähler in [3] eingeführt. Zu der hier benutzten Darstellung vgl. [7]. Es ist klar, daß die universelle Derivation von $S$ über $R$, wenn es überhaupt eine solche gibt, bis auf $S$-Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Die universelle Derivation heißt auch *Differentiation* von $S$ über $R$, ihr Deriviertenmodul der *Differentialmodul* von $S$ über $R$. Die Existenz und ein Konstruktionsprinzip der universellen Derivation werden in [3] gezeigt. Dort wird auch der Differentialmodul für endlich erzeugte Körpererweiterungen berechnet. Wir führen hier nur den folgenden Satz an, auf den wir uns in Kap. IV berufen werden.

**Satz 11.** *Es sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, $k$ ein Unterkörper, $K^+ = K^p \cdot k$ das Körperkompositum von $K^p$ und $k$ in $K$.*

*Es sei ferner $K = K^+(y_1, \ldots, y_n)$, $(K : K^+) = p^n$ und $D$ universelle Derivation von $K$ über $k$. Dann ist:*

$$KDK = K \cdot D(y_1) \oplus \cdots \oplus K \cdot D(y_n) \text{ Vektorraum der Dimension } n.$$

*Beweis.* Da der Körpergrad von $K$ über $K^+$ gerade $p^n$ ist, bilden die Elemente $y_1, \ldots, y_n$ eine $p$-Basis von $K$ über $k$. Nach [3] § 20 sind dann ihre Differentiale $D(y_1), \ldots, D(y_n)$ über $K$ linear unabhängig. Da sie andererseits gerade $KDK$ erzeugen, folgt daraus die Behauptung.

**Korallar.** *Ist $L$ ein Zwischenkörper zwischen $K$ und $K^+$, $K \geqq L \geqq K^+$, $K = L(z_1, \ldots, z_m)$, $(K : L) = p^m$, so ist $KDK = KDL \oplus K \cdot D(z_1) \oplus \cdots \oplus K \cdot D(z_m)$ mit $D(z_i) \neq 0$ für alle $i$. Dabei bedeutet $KDL$ den von den Elementen $D(x)$ mit $x \in L$ erzeugten $K$-Unterraum von $KDK$.*

*Beweis.* Da der Körpergrad von $K$ über $L$ gerade $p^m$ ist, lassen sich die $m$ Elemente $z_1, \ldots, z_m$ durch $n - m$ Elemente $x_1, \ldots, x_{n-m}$ aus $L$ zu einer $p$-Basis von $K$ über $k$ ergänzen. Die $D(x_i)$ erzeugen dann $KDL$. Aus Satz 11 folgt die Behauptung des Korollars.

**Definition 3.** *Ist $K$ ein Körper, $k$ ein Unterkörper, $D$ die universelle Derivation von $K$ über $k$, $S$ ein Ring, dessen Quotientenkörper $K$ ist, so bezeichnen wir mit $SDS$ den von allen Elementen $D(x)$ mit $x \in S$ erzeugten $S$-Untermodul von $KDK$. Wir nennen $SDS$ den Modul der bei $S$ ganzen Differentiale von $K$ über $k$.*

Es wird im nächsten Kapitel unser Ziel sein, die Struktur von $SDS$ zu bestimmen, wenn $S$ ein $n$-stufiger diskreter Bewertungsring und $K$ ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$ ist.

## IV. Die bei einer diskreten Bewertung ganzen Differentiale eines Körpers von Primzahlcharakteristik.

### 1. Formulierung des Struktursatzes.

**Voraussetzungen.** *Es seien für das Folgende:*

*$K$ ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$,*
*$k$ ein Unterkörper von $K$,*
*$K^+ = K^p \cdot k$ das Körperkompositum von $K^p$ und $k$ in $K$,*
*$(K : K^p) = p^r$ endlich,*
*$S$ ein $n$-stufiger diskreter Bewertungsring von $K$ mit den Primidealen:*
$\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_{n-1} > \cdots > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_0 = (0)$,
$S^+ = S \cap K^+$,
$\mathfrak{P}_i^+ = \mathfrak{P}_i \cap S^+$,
*$K_i$ der Quotientenkörper von $S/\mathfrak{P}_i$,*
*$K_i^+$ der Quotientenkörper von $S^+ + \mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_i = S^+/\mathfrak{P}_i^+$,*
*$r_i$ der $p$-Grad von $K_i$ über $K_i^+$; $(K_i : K_i^+) = p^{r_i}$,*
*$D$ die universelle Derivation von $K$ über $k$,*
*$SDS$ der Modul der bei $S$ ganzen Differentiale von $K$ über $k$.*

**Anmerkung.** $K$ entsteht aus $K^+$ durch Adjunktion $p$-ter Wurzeln von Elementen von $K^+$, weil $K^p$ in $K^+$ liegt. Darum ist $K$ rein inseparabel algebraisch über $K^+$. Wenn wir noch fordern, daß $K$ endlich algebraisch über $K^+$ ist, so muß der Körpergrad eine $p$-Potenz sein. Außerdem gilt $S^p \leqq K^+ \cap S = S^+$. Darum gilt auch für alle Restklassenkörper $K_i^p \leqq K_i^+$, d. h. auch $K_i$ entsteht aus $K_i^+$ durch Ausziehen $p$-ter Wurzeln. $K_i$ bzw. $K_i^+$ lassen sich auch als Restklassenkörper eines einstufigen diskreten Bewertungsringes von $K_{i-1}$ bzw. $K_{i-1}^+$ erhalten, nämlich von $S_{\mathfrak{P}_i}/S_{\mathfrak{P}_i} \cdot \mathfrak{P}_{i-1}$ bzw. $S_{\mathfrak{P}_i^+}^+/S_{\mathfrak{P}_i^+}^+ \cdot \mathfrak{P}_{i-1}^+$. Darum ist $K_i$ endlich algebraisch über $K_i^+$ sobald $K_{i-1}$ endlich algebraisch über $K_{i-1}^+$ ist. Da das für $K_0 = K$ über $K_0^+ = K^+$ nach Voraussetzung der Fall ist, hat man also: $(K_i : K_i^+) = p^{r_i}$ und natürlich $r_i \leqq r_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $(r_0 = r)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K = K_0 & \longrightarrow & K_1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_{n-1} & \longrightarrow & K_n \\
\Big| p^{r_0} & & \Big| p^{r_1} & & \Big| p^{r_2} & & & & \Big| p^{r_{n-1}} & & \Big| p^{r_n} \\
K^+ = K_0^+ & \longrightarrow & K_1^+ & \longrightarrow & K_2^+ & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_{n-1}^+ & \longrightarrow & K_n^+
\end{array}$$

Wir ordnen nun dem Bewertungsring $S$ von $K$ bezüglich $k$ eine Folge von Zahlen $\mu_i$ zu:

**Definition 6.** Es sei für $i = n, n-1, \ldots, 0$

$$\mu_i = \begin{cases} r_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mu_j & \text{falls } S \cdot \mathfrak{P}_i^+ = \mathfrak{P}_i \ (S \text{ unverzweigt in } \mathfrak{P}_i^+), \\ r_i + 1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mu_j & \text{falls } S \cdot \mathfrak{P}_i^+ \neq \mathfrak{P}_i \ (S \text{ verzweigt in } \mathfrak{P}_i^+). \end{cases}$$

Dabei setzen wir $r_0 = r$. Wegen $\mathfrak{P}_0 = (0)$, also $\mathfrak{P}_0 = S \cdot \mathfrak{P}_0^+$ hat man dann $\sum\limits_{j=0}^{n} \mu_j = r$.

Die so rein arithmetisch definierten Invarianten $\mu_i$ von $S$ bezüglich $k$ werden wir nun mit der Struktur des Moduls $SDS$ in Verbindung bringen. Um eine übersichtliche Aussage zu erhalten, ist es zweckmäßig, den Modul $SDS$ zunächst universell in einen Modul über einem maximalen $n$-stufigen diskreten Bewertungsring $\bar{S} \geqq S$ einzubetten, weil der universelle Einbettungsmodul $\bar{S} \cdot DS$ $(= \bar{S} \cdot SDS)$ eine einfachere Struktur hat. Da $SDS$ torsionsfrei und $S$ als Bewertungsring ein Elementarteilerring ist, ist die universelle Einbettung nach Satz 6 monomorph und $\bar{S} \cdot DS$ nach Satz 5 wieder torsionsfrei. Das Hauptresultat dieser Arbeit besteht in dem folgenden Struktursatz:

**Satz 12.** *Es sei $\bar{S}$ ein maximaler $n$-stufiger diskreter Bewertungsring, der Oberring von $S$ ist und die Bewertung von $S$ fortsetzt* (s. [5]),

$\bar{\mathfrak{P}}_n > \bar{\mathfrak{P}}_{n-1} > \cdots > \bar{\mathfrak{P}}_1 > \bar{\mathfrak{P}}_0 = (0)$ *die Primideale von $\bar{S}$,*

*$\bar{S} \cdot DS$ der universelle $\bar{S}$-Einbettungsmodul von $SDS$,*

*$\mu_0, \ldots, \mu_n$ die oben definierten Invarianten von $S$ bzgl. $k$.*

*Im übrigen seien die zu Anfang dieses Abschnittes angegebenen Voraussetzungen erfüllt. Dann gilt:*

$$\bar{S} \cdot DS = \bigoplus_{j=0}^{n} \bigoplus_{i=1}^{\mu_j} G_{ij} \quad \textit{mit } G_{ij} \cong \bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_j} \textit{ als } \bar{S}\textit{-Moduln.}$$

**Anmerkung.** Da eine solche Zerlegung von $\bar{S} \cdot DS$ in eine direkte Summe von Moduln vom Rang 1 bis auf Isomorphie eindeutig ist (s. [5]), hat man damit eine neue Charakterisierung der Invarianten $\mu_j$ von $S$ bzgl. $k$: Es ist $\mu_j$ die Anzahl der direkten Summanden vom Typ $\bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_j}$ in einer Zerlegung von $\bar{S} \cdot DS$.

*Vorbemerkung zum Beweis von Satz* 12: Nach Satz 11 ist $KDK$ ein Vektorraum der Dimension $r$ über $K$. Da $K$ Quotientenkörper von $S$ ist, läßt sich wegen $D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b^2}(b \cdot Da - a \cdot Db)$ jedes Element von $KDK$ als Linearkombination von Elementen von $SDS$ mit Koeffizienten aus $K$ darstellen. $SDS$ enthält also $r$ über $S$ linear unabhängige Elemente. Andererseits sind je $r+1$ Elemente von $KDK$, also auch von $SDS$, über $K$ und damit auch über $S$ linear abhängig. Man hat so: $Rg(SDS) = r$. Nach Satz 5 und 6 ist dann $\bar{S} \cdot DS$ ein torsionsfreier $\bar{S}$-Modul vom Rang $r$. Nach [5] ist, weil $\bar{S}$ ein maximaler Bewertungsring ist, $\bar{S} \cdot DS$ dann direkte Summe von $\bar{S}$-Moduln vom Rang 1. Zusammen mit Satz 8 ergibt das: $\bar{S} \cdot DS = \bigoplus_{j=0}^{n} \bigoplus_{i=1}^{\nu_j} G_{ij}$ mit $G_{ij} \cong \bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_j}$. Wir haben also noch zu zeigen: $\nu_j = \mu_j$ für $j = 0, \ldots, n$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $n$.

## 2. Beweis des Struktursatzes.

Wir beweisen Satz 12 durch Induktion nach der Stufenzahl $n$ des diskreten Bewertungsringes. Dabei rechnen wir den Körper $K$ als 0-stufigen diskreten Bewertungsring.

*Induktionsbeginn*: $n = 0$. In diesem Fall ist der Satz trivial.

Es ist nämlich $S = K$ und $KDK$ ein Vektorraum der Dimension $r$ nach Satz 11. Außerdem ist $\mu_0 = r$. $\bar{S}$ ist irgendein Oberkörper $L$ von $K$. Es gilt dann:

$$\bar{S} \cdot DS = L \cdot DK = \bigoplus_{i=1}^{\mu_0} G_{i0}, \; G_{i0} \cong L. \qquad \text{q. e. d.}$$

*Induktionsschluß*: Wir nehmen an, der Satz sei für alle $(n-1)$-stufigen diskreten Bewertungsringe bewiesen. $S$ sei ein $n$-stufiger diskreter Bewertungsring mit den Primidealen $\mathfrak{P}_n > \cdots > \mathfrak{P}_1 > \mathfrak{P}_0 = (0)$, $n \geqq 1$.

Wir betrachten dann den Ring $S' = S_{\mathfrak{P}_{n-1}}$. Er ist ein $(n-1)$-stufiger diskreter Bewertungsring von $K$ mit den Primidealen $\mathfrak{P}'_i = S' \cdot \mathfrak{P}_i$, $i = n-1, \ldots, 0$. Wegen $D\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{b^2}(b \cdot Da - a \cdot Db)$ ist $S'DS' = S'DS$ in $KDK$. Nach Satz 4 ist $S'DS = S' \cdot DS$ universelle $S'$-Einbettung von $SDS$. Bezeichnen wir $\bar{S}' = \bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_{n-1}}$ und $\bar{\mathfrak{P}}'_i = \bar{S}' \cdot \bar{\mathfrak{P}}_i$, so hat man nach Satz 2 für die universelle $\bar{S}'$-Einbettung von $S'DS$:

$$\bar{S}' \cdot S'DS = \bar{S}' \cdot SDS = \bar{S}' \cdot \bar{S} \cdot DS = \bigoplus_{j=0}^{n} \bigoplus_{i=1}^{\nu_j} \bar{S}' \cdot G_{ij}.$$

Dabei ist offenbar

$$\bar{S}' \cdot G_{ij} \cong \bar{S}' \cdot \bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_j} \cong \begin{cases} \bar{S}' \left(= \bar{S}'_{\bar{\mathfrak{P}}'_{n-1}}\right) & \text{für } j = n,\, n-1 \\ \bar{S}'_{\bar{\mathfrak{P}}'_j} & \text{für } j = n-2, \ldots, 0. \end{cases}$$

Sei nun $T$ irgendein $(n-1)$-stufiger diskreter Bewertungsring, der $S'$ umfaßt und die Bewertung von $\bar{S}'$ fortsetzt. Seine Primideale seien $\mathfrak{Q}_{n-1} > \cdots > \mathfrak{Q}_1 > \mathfrak{Q}_0 = (0)$. Es ist dann:

$$T \cdot S'DS' = T \cdot S'DS = \bigoplus_{j=0}^{n} \bigoplus_{i=1}^{\nu_j} T \cdot G_{ij} \text{ und } T \cdot G_{ij} \cong \begin{cases} T_{\mathfrak{Q}_{n-1}} & \text{für } j = n,\, n-1 \\ T_{\mathfrak{Q}_j} & \text{für } j = n-2, \ldots, 0. \end{cases}$$

Da $S'$ $(n-1)$-stufig ist, gilt nach Induktionsannahme:

$$\nu_j = \mu'_j \text{ für } j = 0, \ldots, n-2$$
$$\nu_n + \nu_{n-1} = \mu'_{n-1}.$$

Dabei bedeuten die $\mu'_j$ die dem $S'$ bezüglich $k$ zugeordneten Invarianten. Die Beziehung der $\mu'_j$ zu den $\mu_j$ stellt folgender Hilfssatz her:

**Hilfssatz 1.** *Es ist* $\mu'_j = \mu_j$ *für* $j = n-2, \ldots, 0$ *und* $\mu'_{n-1} = \mu_{n-1} + \mu_n$.

*Beweis.* $S'$ ist ein $(n-1)$-stufiger diskreter Bewertungsring mit den Primidealen $\mathfrak{P}'_{n-1} > \cdots > \mathfrak{P}'_1 > \mathfrak{P}'_0 = (0)$. Sei $S'^+ = S' \cap K^+$, $\mathfrak{P}'^+_i = \mathfrak{P}'_i \cap S'^+$.

Für $i = 0, \ldots, n-1$ haben dann $S'/\mathfrak{P}'_i$ und $S/\mathfrak{P}_i$ bzw. $S'^+/\mathfrak{P}'^+_i$ und $S^+/\mathfrak{P}^+_i$ die gleichen Quotientenkörper. Das bedeutet: $r'_i = r_i$. Außerdem gilt genau dann $S' \cdot \mathfrak{P}'^+_i = \mathfrak{P}'_i$, wenn $S \cdot \mathfrak{P}^+_i = \mathfrak{P}_i$ gilt. Man hat also nach Definition der $\mu'_j$ bzw. der $\mu_j$:

$$\mu'_{n-1} = \begin{Bmatrix} r_{n-1} \\ r_{n-1} + 1 \end{Bmatrix} = \mu_{n-1} + \mu_n$$

und rekursiv für $i = n-2, \ldots, 0$:

$$\mu'_i = \begin{Bmatrix} r_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} \mu'_i \\ r_i + 1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n-1} \mu'_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mu_i \\ r_i + 1 - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mu_i \end{Bmatrix} = \mu_i \quad \text{q. e. d.}$$

Aus dem Hilfssatz folgt demnach:

$$\nu_j = \mu_j \text{ für } j = 0, \ldots, n-2$$
$$\nu_{n-1} + \nu_n = \mu_{n-1} + \mu_n.$$

*Satz* 12 *ist also bewiesen, wenn wir noch zeigen:*

$$\nu_n = \mu_n.$$

Dazu konstruieren wir einen Zwischenkörper $L$ zwischen $K^+$ und $K$ auf folgende Weise:

Da $K_n$ aus $K^+_n$ durch Adjunktion $p$-ter Wurzeln von Elementen von $K^+_n$ entsteht, gibt es eine Folge von Körpern $\bar{L}_i$ mit

$$\bar{L}_0 = K^+_n, \; \bar{L}_i = \bar{L}_{i-1}(\bar{x}_i), \; (\bar{L}_i : \bar{L}_{i-1}) = p, \; \bar{L}_{r_n} = K_n.$$

$x_i \in S$ sei ein Repräsentant mod $\mathfrak{P}_n$ für $\bar{x}_i$. Wir definieren dann:

$$L_0 = K^+_0,$$
$$L_i = L_{i-1}(x_i) \text{ für } i = 1, \ldots, r_n.$$

Wegen $K^p \leqq K^+_0$ gilt dann $(L_i : L_{i-1}) \leqq p$. Da aber der Körper $\bar{L}_i$ jedenfalls im Restklassenkörper von $L_i$ mod $\mathfrak{P}_n$ liegt, und der von $L_0$ genau $\bar{L}_0$ ist, kann der Grad von $L_i$ über $L_{i-1}$ nicht kleiner als $p$ sein. Man hat so $(L_i : L_{i-1}) = p$.

Aus diesen Gradrelationen folgt dann weiter:

Der zu $L_i$ gehörige Restklassenkörper mod $\mathfrak{P}_n$ ist genau $\bar{L}_i$, und $L_i$ ist unverzweigt über $L_{i-1}$ in $S$.

Es sei nun $S_i = S \cap L_i$. Man hat dann auf Grund der eben festgestellten Eigenschaften:

$$S_i = S_{i-1}[x_i].$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. *Fall*: $S \cdot \mathfrak{P}^+_n = \mathfrak{P}_n$. In diesem Falle setzen wir $L = L_{r_n}$, $T = S \cap L$. Es ist dann nach dem oben Ausgeführten:

$$(L : K^+) = p^{r_n}, \quad T = S^+[x_1, \ldots, x_{r_n}], \quad T + \mathfrak{P}_n/\mathfrak{P}_n = K_n = S/\mathfrak{P}_n, \quad S \cdot (\mathfrak{P}_n \cap T) = \mathfrak{P}_n.$$

(Ferner o. B. d. A. $u_n \in T$.)

2. *Fall*: $S \cdot \mathfrak{P}_n^+ \neq \mathfrak{P}_n$. Es ist $\mathfrak{P}_n = S \cdot u_n$. Wegen $S \cdot \mathfrak{P}^+ \neq \mathfrak{P}_n$ liegt $u_n$ nicht in $S^+$ und, weil $L_{r_n}$ unverzweigt über $K^+$ ist, auch nicht in $L_{r_n}$. Andererseits gilt $u_n^p \in S^+$. Das ergibt: $(L_{r_n}(u_n) : L_{r_n}) = p$. $u_n$ hat den Wert $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Gäbe es in $L_{r_n}$ ein Element mit einem Wert $(0, \ldots, 0, q)$, $p > q$, $q \neq 0$, so könnte man aus $u_n^p$ und diesem Element ein Element mit dem Wert $(0, \ldots, 0, 1)$ in $L_{r_n}$ erhalten. Daraus würde wegen der Unverzweigtheit von $L_{r_n}$ über $K^+$ folgen: $S \cdot \mathfrak{P}_n^+ = \mathfrak{P}_n$, entgegen unserer Voraussetzung. Alle Nichteinheiten von $S \cap L_{r_n} = S_{r_n}$ haben also einen Wert $\geqq (0, \ldots, 0, p)$. Das bedeutet $\mathfrak{P}_n \cap S_{r_n} = S_{r_n} \cdot u_n^p$. Zusammen mit $(L_{r_n}(u_n) : L_{r_n}) = p$ ergibt das:

$L_{r_n}(u_n)$ ist rein verzweigt mit dem Exponenten $p$ über $L_{r_n}$.

Wir setzen in diesem Falle:

$$L = L_{r_n}(u_n), \quad T = S \cap L.$$

Es ist dann $T = S_{r_n}[u_n]$ wegen der reinen Verzweigung mit dem Exponenten $p$. Insgesamt ergibt das:

$$(L : K^+) = p^{r_n+1}, \quad T = S^+[x_1, \ldots, x_{r_n}, u_n], \quad T + \mathfrak{P}_n/\mathfrak{P}_n = K_n = S/\mathfrak{P}_n, \quad S \cdot (\mathfrak{P}_n \cap T) = \mathfrak{P}_n.$$

Wir bezeichnen in beiden Fällen den Untermodul $SDT$ von $SDS$, der von den Elementen $D(z)$ mit $z \in T$ erzeugt wird, mit $H$. Von $H$ werden wir die folgenden 3 Eigenschaften beweisen:

1) *$H$ ist endlich erzeugt*, $Rg(H) = \mu_n$,

2) *$SDS/H$ ist $u_n$-Divisionsmodul* (d. h. zu jedem $z \in SDS/H$ gibt es ein $z' \in SDS/H$ mit $z = u_n \cdot z'$),

3) *$SDS/H$ ist torsionsfrei.*

Bevor wir diese 3 Eigenschaften beweisen, zeigen wir, daß aus ihnen $\nu_n = \mu_n$ folgt:

Sei $H'$ der von den Elementen von $H$ in dem universellen $\bar{S}$-Einbettungsmodul erzeugte $\bar{S}$-Untermodul. Weil $H$ endlich erzeugt ist, ist auch $H'$ endlich erzeugt. Außerdem gilt nach dem Korollar zu Satz 6 $Rg(H') = Rg(H) = \mu_n$. Schließlich ist:

$$\bar{S} \cdot DS/H' = \bar{S} \otimes SDS/\bar{S} \otimes H = \bar{S} \otimes (SDS/H) = \bar{S} \cdot (SDS/H).$$

Nach Eigenschaft 2) ist dann auch $\bar{S} \cdot DS/H'$ ein $u_n$-Divisionsmodul. Nach Eigenschaft 3) und Satz 5 ist außerdem $\bar{S} \cdot DS/H'$ torsionsfrei.

Wir betrachten nun die Zerlegung

$$\bar{S} \cdot DS = \bigoplus_{j=0}^{n} \bigoplus_{i=1}^{\nu_j} G_{ij} \text{ mit } G_{ij} \cong \bar{S}_{\bar{\mathfrak{P}}_j}$$

und bezeichnen:

$$Z = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \bigoplus_{i=1}^{\nu_j} G_{ij}, \quad F = \bigoplus_{i=1}^{\nu_n} G_{in}.$$

$Z$ ist ein $u_n$-Divisionsmodul, $F$ ein freier Modul, $\bar{S} \cdot DS = Z \oplus F$. Nach Satz 7 folgt:

$$\nu_n = Rg(F) = Rg(H') = \mu_n.$$

Satz 12 ist also vollständig bewiesen, sobald wir die Eigenschaften 1) bis 3) für $H$ gezeigt haben.

*Beweis von Eigenschaft* 1): Es ist $S^+ = S \cap K^p \cdot k$. Die Elemente von $K^p \cdot k$ sind Quotienten von Ausdrücken $a = \sum_i b_i \cdot c_i^p$, $b_i \in k$, $c_i \in K$. Daher ist

$$D(a) = p \cdot \sum_i b_i \cdot c_i^{p-1} \cdot D(c_i) = 0,$$

also auch

$$SDS^+ = (0).$$

$T$ entsteht aus $S^+$ durch Adjunktion endlich vieler Elemente. Die Differentiale dieser Elemente erzeugen dann $SDT$. Also ist $SDT$ endlich erzeugt. Ferner ist $(L : K^+) = p^{\mu_n}$, $(K : K^+) = p^r$, also $(K : L) = p^{r-\mu_n}$.

Es gibt also $(r - \mu_n)$ Elemente $y_i$ mit $K = L(y_1, \ldots, y_{r-\mu_n})$.

Nach dem Korollar zu Satz 11 ist dann

$$KDK = KDL \oplus K \cdot D(y_1) \oplus \cdots \oplus K \cdot D(y_{r-\mu_n})$$

und alle $D(y_i) \neq 0$. Es folgt:

$$Rg(KDL) = Rg(KDK) - (r - \mu_n) = r - (r - \mu_n) = \mu_n.$$

Andererseits ist $KDL = KDT$, weil $L$ der Quotientenkörper von $T$ ist, also

$$Rg(SDT) = Rg(KDT) = Rg(KDL) = \mu_n. \qquad \text{q. e. d.}$$

*Beweis von Eigenschaft* 2): Es ist $S/\mathfrak{P}_n = T + \mathfrak{P}_n/\mathfrak{P}_n (= K_n)$. Zu vorgegebenem $y \in S$ gibt es also ein $z \in T$ mit

$$y = z + u_n \cdot x, \; x \in S.$$

Die Anwendung von $D$ liefert:

$$D(y) = D(z) + u_n \cdot D(x) + x \cdot D(u_n).$$

$z$ und $u_n$ liegen in $T$, also

$$D(y) \equiv u_n \cdot D(x) \bmod SDT.$$

Da diese $D(y)$ ganz $SDS$ als $S$-Modul erzeugen, folgt daraus, daß $SDS/SDT$ ein $u_n$-Divisionsmodul ist.

*Beweis von Eigenschaft* 3): Wir benötigen dazu folgenden Hilfssatz:

**Hilfssatz 2.** *Für jede natürliche Zahl $e$ gibt es zu vorgegebenen Elementen $y_1, \ldots, y_e \in S$ Elemente $x_1, \ldots, x_k \in S$, $p^k = (K : L)$ mit*

$$y_1, \ldots, y_e \in T[x_1, \ldots, x_k]_{\mathfrak{P}_n} \text{ und } K = L(x_1, \ldots, x_k).$$

Bevor wir den Hilfssatz beweisen, zeigen wir, wie aus ihm die Eigenschaft 3) von $SDT$ folgt: Es sei $z \in SDS$, $t \in S$, $t \neq 0$, $t \cdot z \in SDT$. Wir haben zu zeigen, daß daraus $z \in SDT$ folgt.

Es sei $z = \sum_{i=1}^{e} a_i D(y_i)$; $a_i$, $y_i \in S$. Nach dem Hilfssatz gibt es zu den $y_i$ Elemente $x_1, \ldots, x_k \in S$ mit $y_1, \ldots, y_e \in T[x_1, \ldots, x_k]_{\mathfrak{P}_n}$ und $K = L(x_1, \ldots, x_k)$. Dabei ist $p^k = (K : L)$. Es folgt zunächst:

$$D(y_i) \in S \cdot D(x_1) + \cdots + S \cdot D(x_k) + SDT,$$

also

$$z = w + b_1 \cdot D(x_1) + \cdots + b_k \cdot D(x_k) \text{ mit } w \in SDT, \; b_i \in S.$$

Das ergibt

$$t \cdot z = t \cdot w + t \cdot b_1 \cdot D(x_1) + \cdots + t \cdot b_k \cdot D(x_k).$$

$t \cdot z$ und $t \cdot w$ liegen in $SDT \subseteq KDL$. Nach dem Korollar zu Satz 11 ist aber

$$KDK = KDL \oplus K \cdot D(x_1) \oplus \cdots \oplus K \cdot D(x_k).$$

Es folgt: $t \cdot b_i = 0$ für alle $i$, also $b_i = 0$, also $z = w \in SDT$. q. e. d.

Es bleibt nun lediglich noch übrig, den Hilfssatz 2 zu beweisen.

*Beweis von Hilfssatz* 2: Zum Beweis betrachten wir die Zwischenkörper $Z$ mit $L \subseteq Z \subseteq K$ und deren Bewertungsringe $R = S \cap Z$ mit den Primidealen $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{P}_i \cap R$. Es sei $Z_i$ der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{Q}_i$. Wir nennen $Z_i$ den $i$-ten Restklassenkörper von $R$ bzw. von $Z$.

Es ist $Z_0 = Z$, $Z_n = K_n$. Die letzte Beziehung gilt deswegen, weil schon $L$ als $n$-ten Restklassenkörper $K_n$ hat. Es sei $m$ der $p$-Grad von $Z$ über $L$, $(Z:L) = p^m$. Wir beweisen nun die Aussage des Hilfssatzes für alle Unterringe $R$ von $S$ der beschriebenen Art durch Rekursion nach der Zahl $m$. Da speziell auch $R = S$ zulässig ist, ist damit dann der Hilfssatz bewiesen.

Für $m = 0$ ist $Z = L$ und daher nichts zu beweisen.

Wir nehmen nun an, die Behauptung des Hilfssatzes gelte für alle $Z$ mit $(Z:L) < p^m$; d. h. zu je endlich vielen Elementen $y_1, \ldots, y_e \in S \cap Z = R$ gebe es Elemente $x_1, \ldots, x_j \in R$, $p^j = (Z:L)$ mit $y_1, \ldots, y_e \in T[x_1, \ldots, x_j]_{\mathfrak{Q}_n}$ und $Z = L(x_1, \ldots, x_j)$. Wir zeigen, daß sie dann auch für jedes $Z$ mit $(Z:L) = p^m$ gilt. $Z$ sei ein solcher Unterkörper, $R = S \cap Z$. Wegen $Z^p \subseteq K^+ \subseteq L$ entsteht $Z$ aus $L$ durch sukzessive Adjunktion $p$-ter Wurzeln von Elementen von $L$. Es gibt daher einen Unterkörper $Z'$ mit $L \subseteq Z' \subseteq Z$ und $(Z:Z') = p$. Daraus folgt $(Z':L) = p^{m-1}$. Für $R' = S \cap Z'$ gilt daher nach Rekursionsannahme die Aussage des Hilfssatzes. Wir betrachten nun die Struktur von $R$ über $R'$. Wegen

$$(Z:Z') \geqq (Z_i:Z_i') \geqq (Z_{i+1}:Z_{i+1}') \geqq (Z_n:Z_n') = 1$$

gibt es eine natürliche Zahl $j$, $1 \leqq j \leqq n$ mit

$$(Z:Z') = \cdots = (Z_{j-1}:Z_{j-1}') > (Z_j:Z_j').$$

Dabei setzen wir $Z_0 = Z$, $Z_0' = Z'$. Für $(Z_i:Z_i')$ kommen aber nur die Werte $p$ oder 1 in Frage, so daß man hat:

$$(Z:Z') = \cdots = (Z_{j-1}:Z_{j-1}') = p, \; Z_j = Z_j'.$$

Außerdem ist wegen des Primzahlgrades $Z = Z'(z)$, $z \in R$ und $Z_{j-1} = Z_{j-1}'(\bar{z})$, $\bar{z}$ die Restklasse von $z$ mod $\mathfrak{Q}_{j-1}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. *Fall*: $R \cdot (\mathfrak{Q}_j \cap R') = \mathfrak{Q}_j$. In diesem Falle ist Satz 10 anwendbar:

$$R = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)_{\mathfrak{Q}_n}, \; R_i \subseteq R_{i+1}, \; R_i = R'[z_i] \text{ mit } Z = Z'(z_i).$$

Seien $y_1, \ldots, y_e$ irgend endlich viele Elemente aus $R$. Dann gibt es ein $i$ mit

$$y_1, \ldots, y_e \in R'[z_i]_{\mathfrak{Q}_n}.$$

Zur Darstellung der $y_k$ als rationale Funktionen in $z_i$, deren Nenner nicht in $\mathfrak{Q}_n$ liegen, benötigt man endlich viele Koeffizienten aus $R'$. Für $R'$ gilt aber schon die Aussage des Hilfssatzes. Also gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_{m-1}$ aus $T$ derart, daß die erwähnten endlich vielen Koeffizienten in $T[x_1, \ldots, x_{m-1}]_{\mathfrak{Q}_n}$ liegen und außerdem $Z' = L(x_1, \ldots, x_{m-1})$ gilt. Das ergibt:

$$y_1, \ldots, y_e \in T[x_1, \ldots, x_{m-1}, z_i]_{\mathfrak{Q}_n}$$

und

$$Z = L(x_1, \ldots, x_{m-1}, z_i).$$

Also gilt die Behauptung des Hilfssatzes auch für $R$. q. e. d.

2. *Fall*: $R \cdot (\mathfrak{Q}_j \cap R') \neq \mathfrak{Q}_j$. Sei $\hat{R} = R_{\mathfrak{Q}_j}$, $\hat{\mathfrak{Q}}_i = \hat{R} \cdot \mathfrak{Q}_i$. $\hat{R}$ ist ein $j$-stufiger diskreter Bewertungsring von $Z$ mit den Primidealen $\hat{\mathfrak{Q}}_j > \cdots > \hat{\mathfrak{Q}}_1 > \hat{\mathfrak{Q}}_0 = (0)$. $\hat{\mathfrak{Q}}_j$ ist daher Hauptideal. Es sei $u \in R$ ein erzeugendes Element: $\hat{\mathfrak{Q}}_j = u \cdot \hat{R}$. Aus $\hat{R}^p \leqq \hat{R}' = R'_{\mathfrak{Q}_j}$ schließt man nun genauso wie bei der Konstruktion von $L$ aus $L_{r_n}$, daß $\hat{R}$ über $\hat{R}'$ rein verzweigt in $\hat{\mathfrak{Q}}_j$ mit dem Exponenten $p$ ist. (Man beachte, daß aus $R \cdot (\mathfrak{Q}_j \cap R') \neq \mathfrak{Q}_j$ folgt $\hat{R} \cdot (\hat{\mathfrak{Q}}_j \cap \hat{R}') \neq \hat{\mathfrak{Q}}_j$). Daher ist $\hat{R} = \hat{R}'[u]$. Es sei $v$ ein Element aus $\mathfrak{Q}_{j+1} \cap R'$, $v \notin \mathfrak{Q}_j$. Wir zeigen:

$$R = \bigcup_{j=0}^{\infty} R'\left[\frac{u}{v^i}\right].$$

Da natürlich

$$R'\left[\frac{u}{v^i}\right] \leqq R'\left[\frac{u}{v^{i+1}}\right]$$

gilt, folgt dann nach denselben Schlüssen wie im 1. Fall, daß die Aussage des Hilfssatzes auch für $R$ gilt. Wir brauchen also nur noch die angegebene Erzeugung von $R$ aus $R'$ zu zeigen.

Zunächst ist klar, daß gilt: $R'\left[\frac{u}{v^i}\right] \leqq R$; denn aus $\frac{u}{v^i} \notin R$ folgte $\frac{v^i}{u} \in R$, also $v^i \in u \cdot R \leqq \mathfrak{Q}_j$ und daher $v \in \mathfrak{Q}_j$ gegen Voraussetzung. Sei nun $x \in R$ beliebig. Als Element von $\hat{R}$ läßt sich $x$ in der Form $x = \sum_k c_k \cdot u^k$ mit $c_k \in \hat{R}' = R'_{\mathfrak{Q}_j}$ schreiben. Es ist daher $c_k = \frac{c'_k}{c''_k}$, $c'_k, c''_k \in R'$, $c''_k \notin \mathfrak{Q}_j$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $t_k$ mit $\frac{c''_k}{v^{t_k}} \notin R$; denn aus $\frac{c''_k}{v^t} \in R$ für alle $t$ folgte

$$c''_k \in \bigcup_{t=0}^{\infty} v^t \cdot R \leqq \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_{j+1}^t = \mathfrak{Q}_j$$

entgegen der Wahl von $c''_k$. Das Element $b_k = \frac{v^{t_k}}{c''_k}$ liegt daher in $R \cap Z' = R'$. Somit hat man:

$$x = \sum_k c'_k \cdot b_k \cdot \frac{u^k}{v^{t_k}} \leqq R'\left[\frac{u}{v^i}\right]$$

für hinreichend großes $i$. q. e. d.

Damit ist Hilfssatz 2 und somit auch Satz 12 in allen Teilen bewiesen.

## Literatur.


[1] *R. Berger*, Derivationen mehrstufiger diskreter Bewertungsringe in algebraischen Funktionenkörpern von Primzahlcharakteristik, Dissertation, Heidelberg 1958.

[2] *N. Bourbaki*, Les structures fondamentales d'analyse, Livre II Chap. III, Paris 1948.

[3] *E. Kähler*, Algebra und Differentialrechnung, Bericht über die Mathematiker-Tagung Berlin 1953, 61—163.

[4] *I. Kaplansky*, Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464—491.

[5] *I. Kaplansky*, Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 327—340.

[6] *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1932), 160—196.

[7] *F. K. Schmidt*, Referat über [3] im Zentralblatt f. Math. **58** (1953), 20ff.


Eingegangen 7. Dezember 1959.

# Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen.[1]

**Wolfgang Krull zum 60. Geburtstag.**

Von *Emanuel Sperner* in Hamburg.

Die Diskrepanz zwischen der Tragweite des Axiomensystems einer affinen oder projektiven Ebene und der des Axiomensystems eines gleichartigen höherdimensionalen Raumes, welche durch die Stichworte „nichtdesarguessche" und „desarguessche Geometrie" angedeutet wird und die ihren algebraischen Ausdruck darin findet, daß der Koordinatenbereich einer ebenen Geometrie nach *M. Hall* [1][2]) einen ternären Ring (Ternar [2], Ternärkörper [3]) bildet, während er im höherdimensionalen Fall mindestens die Axiome eines Schiefkörpers erfüllt, reizt zu dem Versuch, ein geometrisches Axiomensystem aufzustellen, in welchem die Axiome der Inzidenz so abgeschwächt sind, daß dadurch auch nichtdesarguessche Geometrien „höherer Dimension" von möglichst gleicher Allgemeinheit wie im ebenen Fall definiert werden. Die Frage ist, wie das zu geschehen hat, damit insbesondere eine brauchbare Algebraisierung noch möglich ist.

Nachstehend wird ein Axiomensystem dieser Art in affiner Form in Vorschlag gebracht und das algebraische Gegenstück dazu hergeleitet (§ 1). Die Elemente der zugehörigen algebraischen Strukturen können als mit „Skalaren" versehene „Vektoren" aufgefaßt werden, für die eine binäre Operation mit gewissen Abschwächungen gewohnter Rechenregeln erklärt ist. Zu jeder solchen algebraischen Struktur gehört umgekehrt auch eine verallgemeinerte affine Geometrie der zuvor definierten Art (§ 2). Die Tragweite dieser Begriffsbildungen kann an einer Klasse einfach zu konstruierender Beispiele verdeutlicht werden (§ 3).

Die hier eingeführten verallgemeinerten affinen Räume umfassen unserer Absicht gemäß sowohl die (den ternären Ringen entsprechenden) affinen Ebenen als auch die gewöhnlichen affinen Vektorräume beliebiger (auch unendlicher) Dimension über einem Schiefkörper, aber eben noch viel allgemeinere Strukturen. Von Interesse dürfte auch bei den korrespondierenden algebraischen Strukturen der stufenweise Übergang von den hier eingeführten allgemeineren Strukturen zu den bekannten speziellen (Ternär- und Schiefkörper) sein. Darüber soll aber erst in einer weiteren Mitteilung berichtet werden.

## § 1. Verallgemeinerte affine Räume und ihre algebraische Darstellung.

Zum Zwecke der Definition eines verallgemeinerten affinen Raumes mit abgeschwächter Inzidenz denken wir uns 2 Mengen gegeben, nämlich:

1. eine Menge $\mathfrak{P}$, deren Elemente wir *Punkte* nennen und mit $A, B, C, \ldots$ usw. bezeichnen,

[1]) Über den Inhalt dieser Note habe ich am 7. 8. 1959 in Utrecht im Rahmen eines Kolloquiums über „The Algebraical and Topological Foundations of Geometry" berichtet. Bei der gleichen Veranstaltung hielt auch Herr *G. Ewald*, Mainz, einen Vortrag über seine ganz unabhängig entstandene Untersuchung „Schwach projektive Räume über dreifachen Ternärkörpern", in welcher dasselbe Problem in anderer Weise angegangen wurde.

[2]) Die Nummern in den eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Schluß der Abhandlung.

2. eine Menge $\mathfrak{C}$, deren Elemente wir *Geraden* nennen und mit $a, b, c, \ldots$ usw. bezeichnen.

Sodann setzen wir als erklärt voraus:

I. eine *Inzidenz*, also eine zweistellige Relation, welche für jedes Elementepaar $(P, g)$ mit $P \in \mathfrak{B}$ und $g \in \mathfrak{C}$ festlegt, ob $P$ mit $g$ „inzidiert" oder nicht. Die Menge der mit einer Geraden $g$ inzidierenden Punkte bezeichnen wir ebenfalls mit $g$ und dementsprechend die Inzidenz von $P$ und $g$ mit $P \in g$ usw.[3]).

II. einen *Parallelismus*, d. i. eine zweistellige Relation, welche für jedes Geradenpaar $(g, h)$ mit $g, h \in \mathfrak{C}$ festlegt, ob $g$ zu $h$ „parallel" ist (im Zeichen $g \parallel h$) oder nicht.

Ferner sei eine feste (endliche oder unendliche) Kardinalzahl $s$ gegeben[4]). Dann sollen Inzidenz und Parallelismus die folgenden Axiome befriedigen:

A 1. *Zu zwei verschiedenen Punkten $P, Q$ gibt es stets eine und nur eine Gerade, die sowohl mit $P$ als auch mit $Q$ inzidiert (die „Verbindungsgerade $PQ$").*

A 2. *Jede Gerade inzidiert genau mit $s$ Punkten. Es gibt mindestens zwei Punkte.*

A 3. *Für jede Gerade $a$ gilt $a \parallel a$. Aus $a \parallel b$, $b \parallel c$ folgt stets $c \parallel a$.*

A 4. *Zu jeder Geraden $a$ und jedem Punkt $P$ gibt es stets eine und nur eine Gerade $b$ mit $P \in b$, $a \parallel b$.*

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir die Vereinigungsmenge $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ einen (*verallgemeinerten*) **affinen Raum** nennen.

Die in A 3 geforderten Eigenschaften der Reflexivität und (zyklisch formulierten) Transitivität schließen die Symmetrie ein (wegen $a \parallel b$, $b \parallel b \rightarrow b \parallel a$). Das Parallelenpostulat A 4 hat mit A 3 zusammen zur Folge, daß im Fall $a \parallel b$ stets entweder $a = b$ oder $a \cap b = \emptyset$ gilt. — Natürlich fallen die affinen Ebenen über einem Ternärkörper sowie die affinen Räume über einem Schiefkörper bei beliebiger (auch unendlicher) Dimension unter unseren Begriff des affinen Raumes. Weitere (allgemeinere) Beispiele werden wir weiter unten angeben.

Obwohl der Inhalt der Axiome A 3 und A 4 unserem Vorhaben, wie sich zeigen wird, durchaus angemessen ist, lassen sich diese Forderungen noch etwas abschwächen. Man kann nämlich auch von einem Parallelismus ausgehen, der weder symmetrisch noch transitiv zu sein braucht, indem man die Axiome A 3 und A 4 durch die folgenden ersetzt:

A 3*. *Für jede Gerade $a$ gilt $a \parallel a$.*

A 4*. *Es gibt einen Punkt $O \in \mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Zu jeder mit $O$ inzidierenden Geraden $b$ und jedem beliebigen Punkt $P \in \mathfrak{B}$ gibt es stets eine und nur eine Gerade $a$ mit $P \in a$, $a \parallel b$;*

2) *Zu jeder Geraden $a \in \mathfrak{C}$ gibt es eine und nur eine Gerade $b \ni O$ mit $a \parallel b$.*

Wir werden im folgenden der beabsichtigten Algebraisierung die Axiome A 3* und A 4* (neben A 1 und A 2) zugrundelegen, weil sie gerade den Bestandteil der Forderungen A3 und A4 darstellen, den wir für unsere Zwecke zunächst allein benötigen[5]). Beispiele affiner Räume mit unsymmetrischem Parallelismus folgen weiter unten (am Ende von § 2).

Um zur algebraischen Darstellung eines durch die Axiome A 1, A 2, A 3*, A 4* definierten affinen Raumes zu kommen, gehen wir folgendermaßen vor:

---

[3]) Z. B. bezeichnet $g \cap h$ den Durchschnitt der Punktmengen $g$ und $h$, also die Menge der mit $g$ und $h$ inzidierenden Punkte; hierfür bestehen nach A 1 die Möglichkeiten $g \cap h = \emptyset$ (= leer), $g \cap h = P$ (d. i. ein Schnittpunkt), $g \cap h = g = h$.

[4]) Die nachstehenden Axiome A 1 und A 2 verbürgen, daß $s \geqq 2$ ist.

[5]) Wir brauchen nämlich im folgenden nur die in A 3* und A 4* enthaltene Voraussetzung, daß unser Parallelismus eine eindeutige Zuordnung zwischen den Geraden eines festen *Büschels $O$* (d. h. den mit $O$ inzidenten Geraden) und denen jedes anderen Büschels $P$ hergestellt.

Zuerst wird ein beliebiger Punkt $O$ unseres Raumes, welcher die in A 4* geforderten Eigenschaften besitzt, ausgezeichnet und von nun an als „*Nullpunkt*" festgehalten. Die Menge der mit $O$ inzidenten Geraden wird umkehrbar eindeutig auf eine gleichmächtige Indexmenge $\mathfrak{B}$ abgebildet. Die Elemente von $\mathfrak{B}$ wollen wir „*Vektoren*" nennen und mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ bezeichnen. Der Einfachheit halber werden wir oft auch die mit $O$ inzidenten Geraden (zur Unterscheidung von den übrigen Geraden) durch die ihnen zugeordneten Vektoren aus $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Ist $\mathfrak{a}$ eine solche Gerade, so werde die Menge der mit ihr inzidierenden Punkte ebenfalls wieder mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet.

Nunmehr ziehen wir eine weitere Indexmenge $\mathfrak{S}$ von der bereits in Axiom A 2 benutzten Mächtigkeit $s$ heran. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ usw. Aus $\mathfrak{S}$ greifen wir ebenfalls ein weiterhin festzuhaltendes Element $\mathfrak{o}$ heraus. Nach Axiom A 2 gibt es sicher eineindeutige Abbildungen jeder Geraden (als Punktmenge) auf $\mathfrak{S}$. Für jede Gerade $\mathfrak{a}$ wählen wir eine bestimmte solche Abbildung $\Phi_{\mathfrak{a}}$ fest aus, von der wir voraussetzen, daß sie den Punkt $O \in \mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{o} \in \mathfrak{S}$ abbildet. Im übrigen schreiben wir $P\Phi_{\mathfrak{a}} = \alpha$, wenn die Abbildung $\Phi_{\mathfrak{a}}$ den Punkt $P \in \mathfrak{a}$ auf $\alpha \in \mathfrak{S}$ abbildet.

Weiter ordnen wir jetzt jedem Punkt $P \neq O$ unseres Raumes ein Koordinatenpaar $(\mathfrak{a}, \alpha)$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ und $\alpha \in \mathfrak{S}$ zu; hierin soll $\mathfrak{a}$ die nach A 1 eindeutig bestimmte Verbindungsgerade $OP$ sein und $\alpha = P\Phi_{\mathfrak{a}}$ gesetzt werden. Diese Zuordnung $P \longleftrightarrow (\mathfrak{a}, \alpha)$ ist für alle $P \neq O$ erklärt und insoweit umkehrbar eindeutig. Wir schreiben kurz $P = \mathfrak{a}\alpha$ statt $P \longleftrightarrow (\mathfrak{a}, \alpha)$. Zur Vervollständigung setzen wir noch $O = \mathfrak{a}\mathfrak{o}$, wobei hierin jedes beliebige $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$ eingesetzt werden darf. Nach diesen Festsetzungen ist klar, daß eine Gleichung $\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{b}\beta$ für $\alpha \neq \mathfrak{o}$ stets $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und $\alpha = \beta$ zur Folge hat, für $\alpha = \mathfrak{o}$ jedoch nur $\beta = \mathfrak{o}$. In Formeln[6]):

$$\mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{b}\beta \longleftrightarrow \beta = \mathfrak{o}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{b}\beta \\ \alpha \neq \mathfrak{o} \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \\ \alpha = \beta \neq \mathfrak{o}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Wir brauchen noch eine Schar von Abbildungen $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$, welche von den beiden Parametern $\mathfrak{a}\alpha$ (beliebiger Punkt!) und $\mathfrak{b}$ (beliebige Gerade durch $O$) abhängt. Die einzelne Abbildung $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ kann für jedes Parameterpaar $\mathfrak{a}\alpha, \mathfrak{b}$ im Fall $\alpha \neq \mathfrak{o}$ beliebig gewählt werden als eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Geraden $\mathfrak{b}$ auf die durch die Bedingungen $b \parallel \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\alpha \in b$ nach A 4* eindeutig bestimmte Gerade $b$, jedoch so, daß der Punkt $O = \mathfrak{b}\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{a}\alpha$ abgebildet wird. Die Existenz einer solchen Abbildung ist wegen A 2 klar. Bildet $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ den Punkt $\mathfrak{b}\beta$ auf $\mathfrak{c}\gamma$ ab, so schreiben wir

$$(\mathfrak{b}\beta)\,\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}\gamma, \tag{3}$$

so daß insbesondere stets

$$(\mathfrak{b}\mathfrak{o})\,\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\alpha \tag{4}$$

gilt.

Im bisher ausgeschlossenen Fall $\alpha = \mathfrak{o}$ soll $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ stets die identische Abbildung der Geraden $\mathfrak{b}$ auf sich sein (wie auch immer $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gewählt sein mögen), so daß dann für jedes $\beta$

$$(\mathfrak{b}\beta)\,\Psi_{\mathfrak{a}\mathfrak{o},\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}\beta \tag{5}$$

gilt. Die Gleichung (4) bestätigt sich demgemäß wegen $\mathfrak{b}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\mathfrak{o}$ auch für $\alpha = \mathfrak{o}$.

Mit Hilfe dieser fest gewählt gedachten Abbildungen definieren wir jetzt eine „*Addition*" *der Punkte* unseres affinen Raumes, für welche wir hierbei weiter die vereinbarte Koordinatenschreibweise $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$, usw. benutzen. Sind demgemäß $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$ zwei beliebige Punkte, so erklären wir ihre Summe durch die Vorschrift:

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta = (\mathfrak{b}\beta)\,\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}. \tag{6}$$

[6]) Der Doppelpfeil in den Formeln soll natürlich bedeuten: „*gilt dann und nur dann, wenn*".

Die rechte Seite von (6) stellt nach Definition der Abbildungen $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ einen wohlbestimmten Punkt der (mit $\mathfrak{a}\alpha$ inzidierenden) Geraden $b \parallel \mathfrak{b}$ dar. Natürlich hängt die durch (6) definierte Operation von der Wahl der Abbildungen $\Psi$ ab. Unabhängig davon sind aber die nachfolgenden Rechenregeln B 1 bis B 4 bei jeder Wahl der $\Psi$ gültig. Sie stellen gewissermaßen den algebraischen Ausdruck der Axiome A 1, A 2, A 3*, A 4* (bzw. A 1 bis A 4) dar und lauten:

B 1. *Der Punkt* $O = \mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{b}\mathfrak{o}$ *ist beiderseitige „Null", d. h. es gilt:*

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\mathfrak{o} = \mathfrak{a}\alpha, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{o} + \mathfrak{b}\beta = \mathfrak{b}\beta. \tag{7}$$

B 2. *Zu gegebenen* $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{c}\gamma$ *gibt es stets genau einen Punkt* $\mathfrak{b}\beta$, *der die Gleichung*

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta = \mathfrak{c}\gamma \tag{8}$$

*befriedigt (Eindeutige Rechtsauflösbarkeit!).*

B 3. *Sind* $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$, $\mathfrak{c}\gamma$ *drei Punkte, welche der Gleichung* (8) *genügen, so gibt es stets ein (nach* B 2 *eindeutig bestimmtes)* $\bar{\beta} \in \mathfrak{S}$, *für das*

$$\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{b}\bar{\beta} \tag{9}$$

*gilt (Regel des „Seitenwechsels").*

B 4. *Zu gegebenen* $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta_1$, $\mathfrak{b}\beta_2$ *läßt sich stets ein (nach* B 2 *eindeutig bestimmtes)* $\beta$ *finden mit*

$$(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta_1) + \mathfrak{b}\beta_2 = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta. \tag{10}$$

Die Beweise für diese Regeln gehen wir der Reihe nach durch.

B 1 ergibt sich unmittelbar daraus, daß die Gleichungen (7) nach (6) mit (4) und (5) gleichbedeutend sind.

Um die Richtigkeit von B 2 einzusehen, sei zunächst $\mathfrak{c}\gamma \neq \mathfrak{a}\alpha$. Zuerst ist dann das $\mathfrak{b}$ in (8), bzw. gemäß (6) in der Gleichung

$$(\mathfrak{b}\beta)\,\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}\gamma \tag{11}$$

zu finden. Nach Definition der Abbildungen $\Psi$ (vgl. Abb. 1!) muß die Gerade $\mathfrak{b}$ notwendig die mit $O$ inzidente Parallele zur Verbindungsgeraden $b$ der Punkte $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{c}\gamma$ sein. Mit diesem $\mathfrak{b}$ ist $\Psi_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ zu bilden, wonach sich eindeutig $\mathfrak{b}\beta = (\mathfrak{c}\gamma)\,\Psi^{-1}_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ ergibt. — Ist jedoch $\mathfrak{c}\gamma = \mathfrak{a}\alpha$, so folgt aus (4), daß $\mathfrak{b}$ beliebig sein darf, aber $\beta = \mathfrak{o}$ sein muß; mithin ist die Lösung $O = \mathfrak{b}\mathfrak{o}$ wieder ein eindeutig bestimmter Punkt.

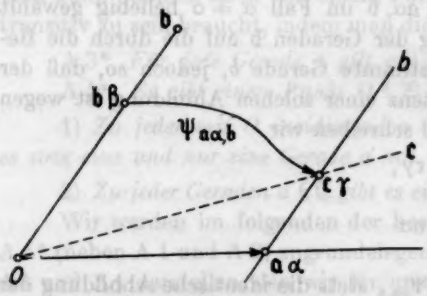

Abb. 1

B 3 erhält man danach so: Sicher gibt es zu dem in (8) mitgegebenen Punktepaar $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{c}\gamma$ stets auch ein $\bar{\mathfrak{b}}\bar{\beta}$, für das $\mathfrak{c}\gamma + \bar{\mathfrak{b}}\bar{\beta} = \mathfrak{a}\alpha$ gilt. Der Beweis von B 2 zeigt aber darüber hinaus, daß hierin stets $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$ ist oder im Fall $\mathfrak{c}\gamma = \mathfrak{a}\alpha$ so gewählt werden kann.

Ähnlich braucht man, um schließlich auch B 4 als richtig zu erkennen, nur den Beweis von B 2 für $\mathfrak{c}\gamma = (\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta_1) + \mathfrak{b}\beta_2$ zu wiederholen, wobei man zusätzlich zeigen muß, daß in (10) **rechts** dasselbe $\mathfrak{b}$ auftritt wie auf der gegeben gedachten **linken** Seite von (10). Das aber folgt unmittelbar aus der Konstruktion von $(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta_1) + \mathfrak{b}\beta_2$ unter Benutzung von A 4*.

Übrigens läßt sich die Regel B 3 noch in eine andere gleichwertige Form bringen. Diese lautet:

B 3*. *Zu gegebenen* $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$ *läßt sich stets ein und nur ein* $\bar{\beta} \in \mathfrak{S}$ *finden mit*

$$(\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta) + \mathfrak{b}\bar{\beta} = \mathfrak{a}\alpha. \tag{12}$$

Denn die Gleichungen (9) und (12) gehen auseinander hervor, wenn gemäß (8) entweder $\mathfrak{c}\gamma$ durch $\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta$ oder umgekehrt ersetzt wird.

Träger der algebraischen Struktur, welche wir auf die vorstehende Weise erhalten haben, ist die Punktmenge $\mathfrak{B}$. Insofern wir daran erinnern wollen, daß der Menge $\mathfrak{B}$ durch die Definition (6) eine algebraische Operation mit den Eigenschaften B 1 bis B 4 aufgeprägt wurde, nennen wir im Folgenden $\mathfrak{B}$ *die dem affinen Raum* $\mathfrak{A}$ (*bezüglich des Nullpunktes O*) *korrespondierende algebraische Struktur.*

## § 2. Umkehrung.

Wenn wir im ersten Paragraphen die verallgemeinerten affinen Räume in gewisser Weise algebraisch dargestellt haben, so wollen wir jetzt umgekehrt zeigen, daß jede algebraische Struktur mit den zuletzt besprochenen Eigenschaften B 1 bis B 4 einen affinen Raum definiert, welcher je nach Anlage der Konstruktion entweder die Eigenschaften A 1 bis A 4 oder A 1, A 2, A 3*, A 4* besitzt. Wir gehen demgemäß jetzt davon aus, daß wir uns zwei Mengen gegeben denken, wie sie in den Eigenschaften B vorkamen, nämlich:

1. eine Menge $\mathfrak{V}$, deren Elemente wir *Vektoren* nennen und mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ usw. bezeichnen.

2. eine Menge $\mathfrak{S}$, deren Elemente wir *Skalare* nennen und mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ usw. bezeichnen.

Mit $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{S}$ bilden wir die Produktmenge $\mathfrak{V} \times \mathfrak{S} = \mathfrak{B}$, deren Elemente wir (vorbehaltlich einer bald zu gebenden Gleichheitsdefinition) *Punkte* nennen[7]) und wie in § 1 einfach durch $\mathfrak{a}\alpha, \mathfrak{b}\beta, \ldots$ usw. bezeichnen. In $\mathfrak{B}$ sei eine binäre Operation gegeben, also eine Abbildung, welche jedem geordneten Punktepaar $(\mathfrak{a}\alpha, \mathfrak{b}\beta)$ einen eindeutig bestimmten Bildpunkt $\mathfrak{c}\gamma$ zuordnet, wofür wir schreiben:

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta = \mathfrak{c}\gamma. \tag{13}$$

Von dieser Operation setzen wir voraus, daß sie die Eigenschaften B 1 bis B 4 besitzt, welche jetzt die Rolle von Axiomen übernehmen. Hierbei ändern wir nur B 1 ein wenig, dem wir die folgende, unserer jetzigen Ausgangsposition besser angepaßte Form geben:

B 1. *Es gibt in* $\mathfrak{S}$ *ein Element* $\mathfrak{o}$ *mit der Eigenschaft, daß für zwei beliebige Punkte* $\mathfrak{a}\alpha, \mathfrak{b}\beta \in \mathfrak{B}$ *stets die Gleichungen* (7) *gelten.*

Setzt man in (7) insbesondere $\alpha = \beta = \mathfrak{o}$ ein, so folgt, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{o} = \mathfrak{b}\mathfrak{o}$ für beliebige $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{V}$ ist. Daher sind wir auch unter der jetzigen Voraussetzung genötigt, alle Elemente $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ mit beliebigen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$ einander gleichzusetzen, d. h. die Beziehung (1) ist wieder gültig. In allen anderen Fällen setzen wir wieder die Regel (2) voraus, d. h. daß für $\alpha \neq \mathfrak{o}$ dann und nur dann $\mathfrak{a}\alpha = \mathfrak{b}\beta$ gilt, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\alpha = \beta$ ist.

Sodann fordern wir weiter als Axiome für die Operation (13) die Eigenschaften B 2, B 3 und B 4 des vorigen Paragraphen genau in dem dortigen Wortlaut.

Damit haben wir alle Voraussetzungen beisammen, auf Grund deren wir nunmehr einen affinen Raum konstruieren wollen. Zu dem Zweck haben wir nun der Reihe nach dessen *Punkte*, *Geraden*, *Inzidenz* und *Parallelismus* zu erklären und dafür die Aussagen A 1 bis A 4 zu beweisen.

Als *Punkte* nehmen wir (entsprechend der schon eingeführten Bezeichnung) die Elemente der obigen Produktmenge $\mathfrak{B} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{S}$ derart, daß jedes Elementepaar $\mathfrak{a}\alpha$ mit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$, $\alpha \in \mathfrak{S}$ für ein $\alpha \neq \mathfrak{o}$ genau einen Punkt darstellt, jedoch alle Elementepaare $\mathfrak{a}\mathfrak{o}$ mit beliebigem $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$ denselben Punkt, genannt *Nullpunkt*, definieren.

[7]) Die Namen „Vektoren", „Skalare", „Punkte" sind nach der Bedeutung gewählt, welche diesen Symbolen in den anschaulichen Fällen am besten entsprechen. Die „Punkte" können dann als Endpunkte der „Ortsvektoren" $\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{b}\beta$ usw. aufgefaßt werden.

Die *Geraden* werden in folgender Weise als *Punktmengen* erklärt. Wir wählen einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}\alpha \in \mathfrak{B}$ und einen beliebigen Vektor $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$ aus und halten beide fest; mit Hilfe eines über ganz $\mathfrak{S}$ variabel gedachten Skalars $\lambda$ bilden wir sodann die Punktmenge:

$$g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} = \{\mathfrak{c}\gamma \in \mathfrak{B};\ \mathfrak{c}\gamma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\lambda,\ \lambda \in \mathfrak{S}\}. \tag{14}$$

Diese Punktmengen $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ heißen Geraden. Zwei Geraden betrachten wir dann und nur dann als gleich, wenn sie als Punktmengen übereinstimmen. Die Menge der Geraden bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}$.

Übrigens folgt aus (14) nach (7) für $\lambda = \mathfrak{o}$, daß stets

$$\mathfrak{a}\alpha \in g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} \tag{15}$$

gilt. — Den Punkt $\mathfrak{a}\alpha$ wollen wir den „*Aufpunkt*" und $\mathfrak{b}$ die „*Richtung*" der Geraden $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ nennen.

Der Punkt $\mathfrak{b}\delta$ heiße mit der Geraden $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ genau dann *inzident*, wenn $\mathfrak{b}\delta \in g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ gilt; die *Inzidenz* ist also mit der Inklusion gleichbedeutend.

Eine Gerade $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ heiße dann und nur dann *parallel* zur Geraden $g_{\bar{\mathfrak{a}}\bar{\alpha},\bar{\mathfrak{b}}}$, wenn $\mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}$ ist, in Zeichen

$$g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} \parallel g_{\bar{\mathfrak{a}}\bar{\alpha},\bar{\mathfrak{b}}} \longleftrightarrow \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}. \tag{16}$$

Wir wollen weiter zeigen, daß unter Zugrundelegung dieser Erklärungen die Menge $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$ ein affiner Raum ist, der die Postulate A 1 bis A 4 aus § 1 erfüllt. Zur Vorbereitung dessen merken wir zunächst an, daß stets gilt:

$$\mathfrak{c}\gamma \in g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} \longleftrightarrow \mathfrak{a}\alpha \in g_{\mathfrak{c}\gamma,\mathfrak{b}}. \tag{17}$$

Diese Aussage ist nur eine andere Formulierung von B 3, wie sich unmittelbar aus der Definition (14) ergibt. Daraus ergibt sich weiter:

$$\mathfrak{c}\gamma \in g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} \rightarrow g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} = g_{\mathfrak{c}\gamma,\mathfrak{b}}. \tag{18}$$

Denn die Voraussetzung in (18) besagt nach (14), daß $\mathfrak{c}\gamma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta$ ist; daher folgt für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{b}\beta_1$ von $g_{\mathfrak{c}\gamma,\mathfrak{b}}$ nach B 4

$$\mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{b}\beta_1 = (\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta) + \mathfrak{b}\beta_1 = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta'$$

mit geeignetem $\beta'$. Dies bedeutet, daß $g_{\mathfrak{c}\gamma,\mathfrak{b}} \subseteq g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ ist. Wegen (17) gilt ebenso das Umgekehrte und mithin auch die Behauptung auf der rechten Seite von (18).

Nunmehr können wir sofort den Beweis von A 1 führen. Zu dem Zweck seien zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{c}\gamma$ gegeben. Wegen (18) können wir jedenfalls $\mathfrak{a}\alpha$ als Aufpunkt der gesuchten Geraden nehmen. Dann bleibt zu zeigen, daß sich ein $\mathfrak{b}$ finden läßt, für welches $\mathfrak{c}\gamma \in g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ gilt. Das bedeutet nach (14) die Lösung der Gleichung $\mathfrak{c}\gamma = \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta$, welche nach B 2 immer möglich und wegen $\mathfrak{c}\gamma \neq \mathfrak{a}\alpha$ nach (2) eindeutig in $\mathfrak{b}$ und $\beta$ ist. Es gibt also eine und nur eine mit $\mathfrak{a}\alpha$ und $\mathfrak{c}\gamma$ inzidente Gerade, was zu beweisen war.

Daß auch die Aussage A 2 zutrifft, ist nach Definition der Geraden und der Inzidenz klar, weil sich in (14) für zwei verschiedene $\lambda \in \mathfrak{S}$ wegen B 2 und (2) sicher auch zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{c}\gamma$ der Geraden ergeben.

Da durch (16) die Parallelität zweier Geraden auf die Gleichheit ihrer Richtungen zurückgeführt wird, sind die in A 3 geforderten Eigenschaften der Reflexivität und Transitivität für unseren Parallelismus evident.

Um schließlich noch die Gültigkeit von A 4 klar zu machen, sei $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ eine beliebige Gerade und $\mathfrak{c}\gamma$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $g_{\mathfrak{c}\gamma,\mathfrak{b}}$ eine Gerade, welche nach (15) mit $\mathfrak{c}\gamma$ inzidiert und nach (16) zu $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ parallel ist. Daß es nur eine solche Parallele gibt, folgt wiederum aus (16) und (18).

Es wird jetzt unmittelbar ersichtlich sein, wie die vorstehende Konstruktion abzuändern ist, damit an die Stelle der Eigenschaften A 3 und A 4 die Aussagen A 3*, A 4* treten. Diese sind ja lediglich eine Abschwächung der ersteren, so daß man nur die obige

Definition des Parallelismus entsprechend einzuschränken hat. Das geschieht durch die Definition:

Eine Gerade $g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}}$ soll parallel zu der Geraden $g_{\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{o},\bar{\mathfrak{b}}}$ heißen, wenn $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$ ist, in Zeichen:

$$g_{\mathfrak{a}\alpha,\mathfrak{b}} \parallel g_{\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{o},\bar{\mathfrak{b}}} \longleftrightarrow \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}. \tag{19}$$

Der Unterschied zur Definition (16) besteht allein darin, daß in einer Parallelbeziehung $g \parallel \bar{g}$ gemäß (19) hinter dem Parallelzeichen nur noch Geraden $\bar{g}$ erscheinen, welche mit dem festen Punkt $\mathfrak{a}\mathfrak{o} = O$ inzidieren. (Für die übrigen Geradenpaare kann man dann den Parallelismus unter Beachtung von $g \parallel g$ irgendwie festsetzen.) Geht man sodann die obigen Beweise von A 3 und A 4 noch einmal durch, so wird man erkennen, daß sich jetzt auf Grund der Parallelen-Definition (19) genau die Aussagen A 3*, A 4* in bezug auf den festen Punkt $O$ als zutreffend erweisen.

Es sei noch auf eine Besonderheit hingewiesen, welche beim Gebrauch unserer Parallelbeziehungen auftreten kann. Auch wenn eine algebraische Struktur $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften B 1 bis B 4 aus einem verallgemeinerten affinen Raum $\mathfrak{A}$ gewonnen wurde, dessen Parallelismus nicht symmetrisch und nicht transitiv war, so liefert die inverse Konstruktion des § 2 aus dieser algebraischen Struktur $\mathfrak{B}$ bei Benutzung der Parallelen-Definition (16) einen affinen Raum $\mathfrak{A}'$ zurück, dessen Parallelismus nunmehr symmetrisch und transitiv ist. Das liegt daran, daß in die Konstruktion des § 1 nur derjenige Teil der Parallelbeziehungen eingeht, welcher durch die Aussagen A 3* und A 4* beschrieben wird; daher können durch die inverse Konstruktion auch nur diese Eigenschaften oder der aus ihnen unmittelbar hervorgehende symmetrische und transitive Parallelismus[8]) zurückgewonnen werden. Das erste wird genau durch die Parallelen-Definition (19) verwirklicht, das zweite durch die Definition (16).

Ein Beispiel soll die Verhältnisse erläutern. Wir gehen aus von der gewöhnlichen reellen projektiven Ebene $E^2$, in der wir uns einen festen Kreis $K$ gegeben denken. Die Punktmenge $\mathfrak{B}$ des zu konstruierenden verallgemeinerten affinen Raumes $\mathfrak{A}$ sei die Gesamtheit der Punkte von $E^2$, die im Innern[9]) von $K$ liegen. Die Geradenmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ werde gebildet von den Strecken in $\mathfrak{B}$, deren Endpunkte auf $K$ liegen. Die Inzidenz in $\mathfrak{A}$ stimme mit der von $E^2$ überein.

Es bleibt der Parallelismus in $\mathfrak{A}$ zu erklären. Zu dem Zweck sei jede Gerade $g \in \mathfrak{C}$ in der Form $g = \bar{g} \frown \mathfrak{B}$ als Durchschnitt der Geraden $\bar{g}$ von $E^2$ mit dem Inneren von $K$ dargestellt. Sodann werde zu jeder Geraden $g \in \mathfrak{C}$ ein beliebiger Punkt $P_g \in \bar{g} - g$ fest gewählt, der also mit $\bar{g}$ inzidieren, aber im Äußeren von $K$ liegen soll. Ist nun $f \in \mathfrak{C}$ irgendeine weitere Gerade von $\mathfrak{A}$, so soll dann und nur dann $f \parallel g$ gesetzt werden, wenn $P_g \in \bar{f}$ gilt (Abb. 2), also:

$$f \parallel g \longleftrightarrow P_g \in \bar{f}. \tag{20}$$

Es ist klar, daß dieser Parallelismus bei genügend allgemeiner Wahl der Zuordnung $g \to P_g$ weder symmetrisch noch transitiv

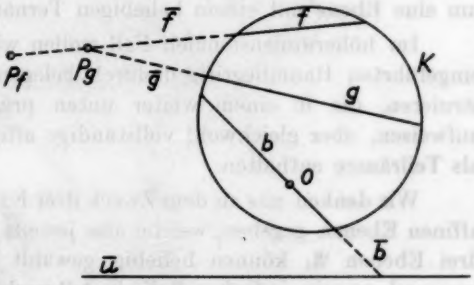

Abb. 2

[8]) Die in A 3* und A 4* bezüglich eines bestimmten Punktes $O$ gebrauchten Parallelbeziehungen $a \parallel b$ sind von der besonderen Art, daß zwar $a$ beliebig ist, aber $b$ immer mit $O$ inzidiert. Unter dem daraus hervorgehenden symmetrischen und transitiven Parallelismus verstehen wir den durch die folgende Definition gegebenen: Es soll für beliebige Geraden $c, d$ dann und nur dann $c \parallel d$ gesetzt werden, wenn es eine mit $O$ inzidente Gerade $b$ gibt, für die sowohl $c \parallel b$ als auch $d \parallel b$ gilt.

[9]) „Inneres" ist hier natürlich im Sinne der reellen Anordnung gemeint; es besteht also aus allen Punkten von $E^2$, die durch den Kreis $K$ von der unendlich fernen Geraden getrennt werden.

sein wird. Sind z. B. für zwei Geraden $f, g \in \mathfrak{C}$ die Punkte $P_f$, $P_g$ wie in Abb. 2 gewählt, so gilt zwar gemäß unserer Definition $f \parallel g$, aber nicht $g \parallel f$. Man kann aber die Gültigkeit der Postulate A 3* und A 4* sofort sicher stellen, wenn man die Zuordnung $g \to P_g$ für die Geraden eines bestimmten Büschels geeignet spezialisiert. Man lege z. B. einen Punkt $O \in \mathfrak{B}$ fest, sowie eine Gerade $\bar{u} \subset E^2$, welche den Kreis $K$ nicht trifft; dann ordne man jeder mit $O$ inzidierenden Geraden $b \in \mathfrak{C}$ den Punkt $P_b = \bar{b} \cap \bar{u}$ bei sonst beliebiger Abbildung $g \to P_g$ zu. Bei der eben gegebenen Parallelen-Definition (20) sind dann die Postulate A 3* und A 4* erfüllt, im allgemeinen aber weder A 3 noch A 4.

Geht man nun nach dem Verfahren des § 1 von unserem affinen Raum $\mathfrak{A}$ zur korrespondierenden algebraischen Struktur $\mathfrak{B}$ (bezüglich des eben ausgezeichneten Punktes $O$) über und danach mittels der Konstruktion von § 2 wieder zurück zu einem affinen Raum $\mathfrak{A}'$, so erhält man bei Verwendung der Vorschrift (16) in $\mathfrak{A}'$ einen symmetrischen und transitiven Parallelismus (bezeichnet durch $|'|$), für den im jetzigen Falle gilt:

$$f \,|'|\, g \longleftrightarrow \bar{f} \cap \bar{u} = \bar{g} \cap \bar{u}. \tag{21}$$

## § 3. Besondere Beispiele.

Um das Verhältnis unseres Begriffes eines verallgemeinerten affinen Raumes zu den bekannten Strukturen einer affinen Ebene über einem Ternärkörper und eines affinen Raumes über einen Schiefkörper zu umreißen, beginnen wir mit der Erörterung des ebenen Falles.

Wir gehen aus von einem verallgemeinerten affinen Raum $\mathfrak{A}$, der die Postulate A 1 bis A 4 aus § 1 befriedigt, also jetzt einen reflexiven, symmetrischen und transitiven Parallelismus besitzt. Wir machen nun $\mathfrak{A}$ zu einem zweidimensionalen Raum, indem wir das folgende Zusatzaxiom fordern:

A 5. *Ist $a \nparallel b$, so gilt stets $a \cap b \neq \emptyset$. Es gibt $a, b$ mit $a \nparallel b$.*

Zwei Geraden, die nicht parallel sind (in Zeichen: $\nparallel$), sollen sich also stets schneiden. Ein solcher affiner Raum $\mathfrak{A}$ stellt eine *vollständige* affine Ebene dar, *vollständig* in dem Sinn, daß die Hinzunahme der Parallelenbüschel als uneigentlicher Punkte und der Gesamtheit dieser uneigentlichen Punkte als (einziger) uneigentlicher Geraden unsere affine Ebene zu einer projektiven Ebene abschließt. Natürlich braucht in $\mathfrak{A}$ kein Schließungssatz, insbesondere nicht der Satz von Desargues zu gelten. Es handelt sich vielmehr um eine Ebene mit einem beliebigen Ternärkörper als Koordinatenbereich.

Im höherdimensionalen Fall wollen wir die eingangs geforderte Allgemeinheit des eingeführten Raumbegriffs dadurch belegen, daß wir eine Klasse von Beispielen konstruieren, die in einem weiter unten präzisierten Sinn dreidimensionalen Charakter aufweisen, aber gleichwohl vollständige affine Ebenen über vorgebbaren Ternärkörpern als Teilräume enthalten.

Wir denken uns zu dem Zweck drei Exemplare $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3$, solcher vollständigen affinen Ebenen gegeben, welche also jeweils die Axiome A 1 bis A 5 erfüllen sollen. Diese drei Ebenen $\mathfrak{A}_i$ können beliebig gewählt werden und brauchen untereinander nicht isomorph zu sein, jedoch soll die in A 2 vorkommende Kardinalzahl $s$ für alle drei Ebenen dieselbe sein.

Der erste Schritt unserer Konstruktion, die im Grunde nichts anderes als eine Art Umkehrung des sogenannten Zweitafelverfahrens der Darstellenden Geometrie ist, besteht darin, daß wir die beiden Ebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ längs einer Geraden miteinander verheften. Zu dem Zweck wählen wir in $\mathfrak{A}_1$ eine Gerade $k_1$ fest aus und bilden sie auf eine ebenso in $\mathfrak{A}_2$ ausgewählte Gerade $k_2$ umkehrbar eindeutig ab. Je zwei einander hierbei ent-

sprechende Punkte von $k_1$ und $k_2$ werden miteinander identifiziert, so daß die beiden Geraden $k_1$ und $k_2$ zu einer einzigen Geraden $k$ verschmelzen, welche danach mit allen ihren Punkten den beiden Ebenen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gemeinsam ist; darüber hinaus aber haben diese beiden Ebenen keine gemeinsamen Elemente.

Weiter wählen wir in jeder Ebene $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, eine Schar $\mathfrak{P}_i$ paralleler Geraden, welche $k$ schneiden, fest aus (Abb. 3). Mit Hilfe von $\mathfrak{P}_i$ projizieren wir die Punkte von $\mathfrak{A}_i$ auf die Gerade $k$. Es sei nämlich $Q_i \in \mathfrak{A}_i$ beliebig und $p_i \in \mathfrak{P}_i$ jene Gerade der Schar $\mathfrak{P}_i$, welche mit $Q_i$ inzidiert. Dann werde $Z(Q_i) = p_i \cap k$ gesetzt.

Nunmehr können wir die Punkte des zu konstruierenden Raumes, den wir wieder mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wollen, definieren als jene geordneten Punktepaare $(Q_1, Q_2)$ mit $Q_i \in \mathfrak{A}_i$, für welche $Z(Q_1) = Z(Q_2)$ ist. Für die Menge $\mathfrak{B}$ der *Punkte* von $\mathfrak{A}$ kann demnach geschrieben werden:

$$\mathfrak{B} = \{(Q_1, Q_2);\ Q_i \in \mathfrak{A}_i,\ i = 1, 2,\ \ Z(Q_1) = Z(Q_2)\}. \tag{22}$$

Die in $\mathfrak{A}$ noch zu erklärenden Geraden sind von zweierlei Art mit verschiedener Definition. Zunächst soll nämlich jedes geordnete Geradenpaar $(g_1, g_2)$ mit $g_i \in \mathfrak{A}_i$, aber $g_i \notin \mathfrak{P}_i$ eine *Gerade erster Art* von $\mathfrak{A}$ darstellen; die Menge dieser Geraden erster Art heiße $\mathfrak{E}^1$, also:

$$\mathfrak{E}^1 = \{(g_1, g_2);\ g_i \in \mathfrak{A}_i,\ g_i \notin \mathfrak{P}_i,\ i = 1, 2\}. \tag{23}$$

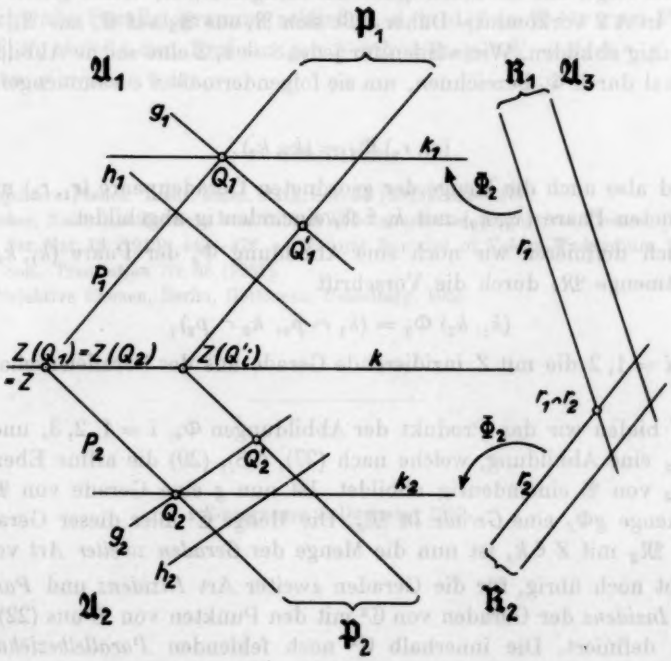


Abb. 3

Die *Inzidenz* zwischen den Punkten von $\mathfrak{B}$ und den Geraden aus $\mathfrak{E}^1$ wird erklärt durch die Festsetzung

$$(Q_1, Q_2) \in (g_1, g_2) \longleftrightarrow Q_1 \in g_1,\ Q_2 \in g_2. \tag{24}$$

Der *Parallelismus* für zwei Geraden aus $\mathfrak{E}^1$ wird eingeführt durch die Beziehung

$$(g_1, g_2) \parallel (h_1, h_2) \longleftrightarrow g_1 \parallel h_1,\ g_2 \parallel h_2. \tag{25}$$

Man erkennt wohl sofort, daß für die Geraden von $\mathfrak{C}^1$ die Axiome A 2 bis A 4 erfüllt sind. Ferner besitzen je zwei Punkte $(Q_1, Q_2)$, $(Q_1', Q_2')$ von $\mathfrak{B}$, für die $Z(Q_i) \neq Z(Q_i')$ ist, genau eine Verbindungsgerade $(g_1, g_2)$ in $\mathfrak{C}^1$, weil dann $g_i$ als Verbindungsgerade von $Q_i$ und $Q_i'$ in $\mathfrak{A}_i$ für jedes $i = 1, 2$ eindeutig bestimmt und wegen $Z(Q_i) \neq Z(Q_i')$ auch $g_i \notin \mathfrak{P}_i$ zutreffend ist (vgl. Abb. 3!).

Es fehlen in $\mathfrak{A}$ aber noch die Verbindungsgeraden von zwei Punkten $(Q_1, Q_2)$, $(Q_1', Q_2')$ mit $Z(Q_i) = Z(Q_i')$. Um auch diese zu erhalten, haben wir eben noch die Geraden zweiter Art in $\mathfrak{A}$ zu erklären. Wir bilden für jedes $Z \in k$ die Teilmenge

$$\mathfrak{M}_Z = \{(Q_1, Q_2) \in \mathfrak{B};\ Z(Q_1) = Z(Q_2) = Z\} \tag{26}$$

von (22). In jedem $\mathfrak{M}_Z$ sollen die Geraden dadurch erklärt werden, daß wir $\mathfrak{M}_Z$ auf die dritte (bisher noch nicht benutzte) vorgegebene affine Ebene $\mathfrak{A}_3$ eineindeutig abbilden.

Zur Durchführung legen wir in $\mathfrak{A}_3$ ein „Parallelkoordinatensystem" fest, indem wir in $\mathfrak{A}_3$ zwei verschiedene Scharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ paralleler Geraden auswählen und die Menge der Punkte von $\mathfrak{A}_3$ umkehrbar eindeutig auf die Menge der geordneten Geradenpaare $(r_1, r_2)$ mit $r_i \in \mathfrak{R}_i$ durch eine Abbildung $\Phi_1$ abbilden, welche folgendermaßen definiert wird:

$$(r_1, r_2)\, \Phi_1^{-1} = r_1 \cap r_2. \tag{27}$$

Sodann sei in $\mathfrak{A}_i$ für $i = 1, 2$ mit $\mathfrak{K}_i$ die Schar der zu $k$ parallelen Geraden bezeichnet. Aus A 2 und A 5 folgt, daß die Mächtigkeit der Mengen $\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{R}_i$ wieder gleich der Kardinalzahl $s$ ist (die in A 2 vorkommt). Daher läßt sich $\mathfrak{R}_i$ aus $\mathfrak{A}_3$ auf $\mathfrak{K}_i$ aus $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, umkehrbar eindeutig abbilden. Wir wählen für jedes $i = 1, 2$ eine solche Abbildung fest aus, die wir beidemal durch $\Phi_2$ bezeichnen, um sie folgendermaßen zusammengefaßt schreiben zu können:

$$(r_1, r_2)\, \Phi_2 = (k_1, k_2). \tag{28}$$

Durch $\Phi_2$ wird also auch die Menge der geordneten Geradenpaare $(r_1, r_2)$ mit $r_i \in \mathfrak{R}_i$ auf die der geordneten Paare $(k_1, k_2)$ mit $k_i \in \mathfrak{K}_i$ eineindeutig abgebildet.

Schließlich definieren wir noch eine Abbildung $\Phi_3$ der Paare $(k_1, k_2)$ mit $k_i \in \mathfrak{K}_i$ auf die Punktmenge $\mathfrak{M}_Z$ durch die Vorschrift

$$(k_1, k_2)\, \Phi_3 = (k_1 \cap p_1,\ k_2 \cap p_2), \tag{29}$$

worin $p_i$ für $i = 1, 2$ die mit $Z$ inzidierende Gerade aus der Parallelenschar $\mathfrak{P}_i$ sein soll (vgl. Abb. 3).

Endlich bilden wir das Produkt der Abbildungen $\Phi_i$, $i = 1, 2, 3$, und erhalten in $\Phi_Z = \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$ eine Abbildung, welche nach (27), (28), (29) die affine Ebene $\mathfrak{A}_3$ auf die Teilmenge $\mathfrak{M}_Z$ von $\mathfrak{B}$ eineindeutig abbildet. Ist nun $g$ eine Gerade von $\mathfrak{A}_3$, so nennen wir die Bildmenge $g\Phi_Z$ eine *Gerade in* $\mathfrak{M}_Z$. Die Menge $\mathfrak{C}^2$ aller dieser Geraden, gebildet für sämtliche $\mathfrak{M}_Z$ mit $Z \in k$, ist nun die Menge der *Geraden zweiter Art* von $\mathfrak{A}$.

Es bleibt noch übrig, für die Geraden zweiter Art *Inzidenz* und *Parallelismus* zu erklären. Die *Inzidenz* der Geraden von $\mathfrak{C}^2$ mit den Punkten von $\mathfrak{B}$ aus (22) wird einfach als Inklusion definiert. Die innerhalb $\mathfrak{C}^2$ noch fehlenden *Parallelbeziehungen* werden erkärt durch Rückgang auf den in $\mathfrak{A}_3$ gegebenen Parallelismus gemäß der Festsetzung

$$g\Phi_Z \parallel h\Phi_{Z'} \longleftrightarrow g \parallel h. \tag{30}$$

Die Konstruktion des gewünschten affinen Raumes $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}^1 \cup \mathfrak{C}^2$ ist damit abgeschlossen. In ganz $\mathfrak{A}$ gelten nunmehr in der Tat die Axiome A 1 bis A 4 ausnahmslos. Denn alle Punktepaare aus $\mathfrak{B}$ sind jetzt eindeutig verbindbar; der Parallelismus in $\mathfrak{C}^2$ ist nach (30) wieder reflexiv, symmetrisch und transitiv, weil dasselbe voraussetzungsgemäß für den Parallelismus in $\mathfrak{A}_3$ gilt; das Axiom A 4 ist bezüglich der Geraden von $\mathfrak{C}^2$

ebenfalls gültig, weil die Punktmengen $\mathfrak{M}_Z$ den ganzen Raum $\mathfrak{A}$ schlicht überdecken. Übrigens ist auf Grund unserer Definitionen jedes $\mathfrak{M}_Z$ eine zu $\mathfrak{A}_3$ isomorphe affine Ebene.

Der Raum $\mathfrak{A}$ hat nach seiner Konstruktion einen dreidimensionalen Aufbau und weist auch entsprechende Eigenschaften auf. Nimmt man z. B. in $\mathfrak{A}_1$ einen Punkt $O$ auf $k$, so gehen durch den (damit gemäß (22) gebildeten) Punkt $(O, O)$ von $\mathfrak{B}$ drei „Ebenen" $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3$, aus $\mathfrak{A}$, die zu den vorgegebenen affinen Ebenen $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3$, der Reihe nach isomorph sind. Es sind dies nämlich (als Punktmengen geschrieben) die folgenden Teilmengen von $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{M}_1 = \{(Q_1, Q_2);\ Q_1 \in \mathfrak{A}_1,\ Q_2 \in k,\ Z(Q_1) = Z(Q_2)\},$$
$$\mathfrak{M}_2 = \{(Q_1, Q_2);\ Q_1 \in k,\ Q_2 \in \mathfrak{A}_2,\ Z(Q_1) = Z(Q_2)\},$$
$$\mathfrak{M}_3 = \{(Q_1, Q_2);\ Z(Q_1) = Z(Q_2) = O\}.$$

($\mathfrak{M}_3$ ist die Punktmenge $\mathfrak{M}_Z$ aus (26) für $Z = O$). Die Ebenen $\mathfrak{M}_i$ haben zu je zweien die Punkte einer Geraden gemein. Jede andere Gerade von $\mathfrak{C}^1 \cup \mathfrak{C}^2$ hat entweder mit $\mathfrak{M}_i$ (für $i = 1, 2, 3$) genau einen Punkt gemein oder ist zu einer Geraden von $\mathfrak{M}_i$ parallel.

Andererseits ist $\mathfrak{A}$ sicher ein nichtdesarguesscher Raum, wenn mindestens eines der vorgegebenen $\mathfrak{A}_i$ eine nichtdesarguessche Ebene war. In diesem Fall muß sich also das Verhalten von $\mathfrak{A}$ hinsichtlich Inzidenz und Parallelismus wesentlich von dem eines gewöhnlichen affinen Raumes unterscheiden. Man findet z. B. in der Tat leicht, daß sich dann nicht alle Parallelogramme schließen, d. h. daß in $\mathfrak{A}$ für zwei Parallelenpaare $g \parallel g'$ und $h \parallel h'$, welche den Beziehungen $g \cap h \neq \emptyset$, $g \cap h' \neq \emptyset$, $h \cap g' \neq \emptyset$ genügen, im allgemeinen $g' \cap h' = \emptyset$ ist.

## Schrifttum.

[1] *M. Hall*, Projektive Planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 229—277.

[2] *L. A. Skornjakov*, Natürliche Bereiche von Veblen-Wedderburnschen projektiven Ebenen. [Russ.] Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **13** (1949), 447—472. — Natural Domains of Veblen-Wedderburn Projective Planes. Amer. Math. Soc., Translation Nr. 58 (1951).

[3] *G. Pickert*, Projektive Ebenen, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.

Eingegangen 8. Dezember 1959.

# Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees.

**A M. Wolfgang Krull, à l'occasion de son 60e anniversaire.**

Par *L. Lesieur* à Poitiers et *R. Croisot* à Besançon.

---

## Introduction.

$A$ étant un anneau commutatif noethérien et $\mathfrak{J}$ un idéal de $A$, W. Krull a montré au moyen de la décomposition en idéaux primaires que l'idéal $V = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n$ vérifie la relation $V = \mathfrak{J}V$. La démonstration n'est pas valable pour un anneau non commutatif noethérien à gauche; nous donnons un exemple pour lequel on a $V \neq \mathfrak{J}V$. Mais on peut remarquer que $V$ peut être considéré comme l'intersection des idéaux $Q$ tels que $\mathfrak{J}$ soit contenu dans le radical primaire de $Q$. On démontre alors que le théorème de Krull s'étend au cas non commutatif si l'on remplace le radical primaire par le radical tertiaire: $V$ étant l'intersection des idéaux à gauche (ou seulement bilatères) $Q$ tels qu'un idéal bilatère donné $\mathfrak{J}$ soit contenu dans le radical tertiaire de $Q$, on a $V = \mathfrak{J}V$. On en déduit, en utilisant un résultat de N. Jacobson, que l'intersection des idéaux à gauche dont le radical tertiaire contient le radical de Jacobson est nulle.

Considérons, dans le même ordre d'idées, le lemme d'Artin-Rees: $A$ étant un anneau commutatif noethérien unitaire, $U$ un $A$-module unitaire de type fini, $V$ un sous-module de $U$, $\mathfrak{J}$ un idéal de $A$ et $n$ un entier positif, il existe un entier positif $m$ tel que

$$\mathfrak{J}^m U \cap V \leqq \mathfrak{J}^n V.$$

Nous généralisons ce lemme au cas non commutatif sous la forme suivante: $A$ étant un anneau noethérien à gauche unitaire, $U$ un $A$-module unitaire de type fini, $V$ un sous-module de $U$, $\mathfrak{J}$ un idéal bilatère de $A$, et $X$ un sous-module de $V$ tel que $\mathfrak{J}$ soit contenu dans le radical tertiaire de $X$ (considéré comme sous-module de $V$), il existe un sous-module $Q$ de $U$ tel que $Q \cap V = X$, $\mathfrak{J}$ étant contenu dans le radical tertiaire de $Q$. Nous démontrons de plus que le lemme d'Artin-Rees est valable dans le module $U$ sous la forme initiale si et seulement si tout sous-module tertiaire de $U$ est primaire.

Les démonstrations utilisent la théorie des $(\mathfrak{C})$-algèbres que nous avons développée ailleurs (cf. L. Lesieur et R. Croisot, [6], Chapitre III)[1].

## § 1. Etude d'une certaine sous-algèbre d'une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$.

Considérons une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$. Soit $V$ un élément de $(L)$ et $(V)$ la sous-algèbre de $(L)$ constituée par l'ensemble des éléments $X \leqq V$ muni de l'ensemble $(\mathfrak{C})$ d'opérateurs (cf. Loc. cit., chapitre III § 5). Dans cette sous-algèbre, le résiduel à gauche de $X \in (V)$ par $Y \in (V)$ est le résiduel à gauche $X \cdot . Y$ de $X$ par $Y$, ces éléments étant considérés comme des éléments de $(L)$; le résiduel à droite de $X \in (V)$ par $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$ est $(X. \cdot \mathfrak{A}) \cap V$ où $X. \cdot \mathfrak{A}$ désigne le résiduel à droite par $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$ de $X$ considéré comme élément de $(L)$.

---

[1]) On pourra consulter aussi L. Lesieur et R. Croisot [3], où l'on définit une $(\mathfrak{C})$-algèbre satisfaisant à l'axiome $D$ (cas particulier, p. 83); une telle $(\mathfrak{C})$-algèbre est modulaire si le treillis $(L)$ est modulaire et $\cap$-continu. Elle est noethérienne si $(L)$ vérifie la condition de chaîne ascendante et artinienne si $(L)$ vérifie la condition de chaîne descendante. La théorie s'applique donc en particulier au cas de la $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne modulaire constituée par les sous-modules d'un $A$-module $U$ de type fini sur un anneau $A$ noethérien à gauche. Le treillis $(\mathfrak{C})$ d'opérateurs est alors l'ensemble des idéaux bilatères de $A$.

Nous dirons qu'un élément $X \leqq V$ est tertiaire (resp. primaire) relativement à $V$ si c'est un élément tertiaire (resp. primaire) de la $(\mathfrak{C})$-algèbre $(V)$. Explicitons ces définitions.

**Définition 1. 1.** Un élément $X \leqq V$ est dit *tertiaire relativement à* $V$ si l'on a

$$(X. \cdot \mathfrak{A}) \frown V > X,\ V \geqq C > X \rightarrow (X. \cdot \mathfrak{A}) \frown C > X.$$

On sait que cette implication est équivalente à la suivante:

$$(X. \cdot \mathfrak{A}) \frown V > X,\ V \geqq C,\ C \nleqq X \rightarrow X. \cdot \mathfrak{A} \frown C \nleqq X.$$

**Définition 1. 2.** Un élément $X \leqq V$ est dit *primaire relativement à* $V$ si l'on a

$$(X. \cdot \mathfrak{A}) \frown V > X \rightarrow \exists\ n \text{ tel que } \mathfrak{A}^n V \leqq X.$$

De même, nous appellerons radical tertiaire (resp. primaire) relativement à $V$, d'un élément $X \leqq V$, le radical tertiaire (resp. primaire) de $X$ dans la $(\mathfrak{C})$-algèbre $(V)$. D'où les définitions:

**Définition 1. 3.** *Le radical tertiaire* $\mathfrak{R}_3^V(X)$ d'un élément $X \leqq V$ *relativement à* $V$ est l'élément maximum $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$ tel que

$$(X. \cdot \mathfrak{A}) \frown C = X,\ C \leqq V \rightarrow C = X.$$

On sait que c'est aussi l'élément maximum tel que

$$(X. \cdot \mathfrak{A}) \frown C \leqq X,\ C \leqq V \rightarrow C \leqq X.$$

**Définition 1. 4.** *Le radical primaire* $\mathfrak{R}_1^V(X)$ d'un élément $X \leqq V$ *relativement à* $V$ est l'élément maximum $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$ tel qu'il existe un entier positif $n$ avec $\mathfrak{A}^n V \leqq X$.

La théorie des $(\mathfrak{C})$-algèbres (Cf. [6][2]) donne immédiatement les résultats suivants:

**Propriété 1. 1.** *Pour tout* $X \leqq V$, *on a*

$$\mathfrak{R}_1^V(X) \leqq \mathfrak{R}_3^V(X).$$

**Propriété 1. 2.** *Pour tout* $X_1 \leqq V$ *et tout* $X_2 \leqq V$, *on a*

$$\mathfrak{R}_3^V(X_1 \frown X_2) \geqq \mathfrak{R}_3^V(X_1) \frown \mathfrak{R}_3^V(X_2).$$

**Propriété 1. 3.** *Tout élément* $X < V$ *admet une décomposition réduite comme intersection d'un nombre fini d'éléments tertiaires relativement à* $V$. *Deux décompositions réduites d'un même élément ont même nombre de composants et mêmes éléments premiers associés.*

Rattachons maintenant la notion d'élément tertiaire relativement à $V$ à celle d'élément tertiaire (relativement à $U$).

**Propriété 1. 4.** *Soit* $Q$ *un élément quelconque de* $(L)$. *Posons* $X = Q \frown V$. *Tout résiduel essentiel*[3]) *de* $X$ *considéré comme élément de* $(V)$ *est un résiduel essentiel de* $Q$. *Si* $Q$ *est* $\mathfrak{P}$*-tertiaire, et si* $X$ *est distinct de* $V$, $X$ *est* $\mathfrak{P}$*-tertiaire relativement à* $V$[4]).

Soit $\mathfrak{P} = X \cdot . Y$ avec $Y \leqq V$ satisfaisant à

$$Z \leqq Y, Z \nleqq X \rightarrow X \cdot . Z = \mathfrak{P}.$$

On a $\mathfrak{P} = Q \cdot . Y$. Soit $Z' \leqq Y$ $(\leqq V)$ avec $Z' \nleqq Q$. On en déduit

$$Q \cdot . Z' = X \cdot . Z' \text{ avec } Z' \nleqq X,$$

d'où $X \cdot . Z' = \mathfrak{P}$ et $Q \cdot . Z' = \mathfrak{P}$. Par suite, $\mathfrak{P}$ est bien résiduel essentiel de $Q$.

Si $Q$ possède un seul résiduel essentiel $\mathfrak{P}$, il en est donc de même de $X$ ($X$ étant distinct de $V$), d'où la propriété.

---

[2]) On peut consulter aussi [3] et [4].

[3]) Cf. [6] ou [5].

[4]) On montre de la même manière que tout résiduel à gauche propre de $X$ considéré comme élément de $(V)$ set un résiduel à gauche propre de $Q$. On en déduit que, si $Q$ est primaire, secondaire ou unirésidué, il en est de même de $X$ considéré comme élément de $(V)$. Par contre, $Q$ peut être primal sans qu'il en soit ainsi de $X$.

**Propriété 1. 5.** *Tout élément $X$ de $(V)$ $\mathfrak{p}$-tertiaire relativement à $V$ est de la forme $X = Q \cap V$ où $Q$ est un élément $\mathfrak{p}$-tertiaire de $(L)$*[5]).

Soit $X = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$ une décomposition réduite de $X$ comme intersection d'éléments $\mathfrak{p}_i$-tertiaires de $(L)$. On en déduit $X = (Q_1 \cap V) \cap (Q_2 \cap V) \cap \cdots \cap (Q_n \cap V)$. Les éléments $Q_i \cap V$ sont $\mathfrak{p}_i$-tertiaires relativement à $V$ d'après la propriété 1. 4. Par suite, d'après la propriété 1. 3, en supprimant dans cette décomposition de $X$ autant d'éléments superflus qu'il est possible, il subsiste un *seul élément*, d'où la propriété.

Les propriétés 1. 4 et 1. 5 conduisent aux théorèmes suivants.

**Théorème 1. 1.** *Pour que l'élément $X < V$ soit $\mathfrak{p}$-tertiaire relativement à $V$, il faut et il suffit qu'il soit la forme*

$$X = Q \cap V$$

*où $Q$ est un élément $\mathfrak{p}$-tertiaire de $(L)$.*

**Théorème 1. 2.** *Pour tout élément $X \leqq V$, il existe $Q \in (L)$ tel que*

$$R_3^V(X) = R_3(Q) \text{ et } X = Q \cap V.$$

Pour $X = V$, il suffit de prendre $Q = U$. Soit alors $X \neq V$ et $X = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ une décomposition réduite de $X$ comme intersection d'éléments $X_i$ $\mathfrak{p}_i$-tertiaires relativement à $V$. Chaque élément $X_i$ est de la forme $Q_i \cap V$ où $Q_i$ est $\mathfrak{p}_i$-tertiaire d'après la propriété 1. 5. Posons $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$. Cette décomposition est certainement réduite. Par suite, d'après le théorème 3. 4 de [4], on a d'une part $R_3^V(X) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$, d'autre part $R_3(Q) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Le théorème en résulte.

## § 2. Généralisation d'un théorème de Krull.

Le théorème suivant, dû à W. Krull, est maintenant classique[6]):

*Dans un anneau commutatif noethérien, $\mathfrak{J}$ étant un idéal quelconque, si l'on pose $V = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n$, on a $V = \mathfrak{J}V$.*

La démonstration, qui utilise la décomposition d'un idéal comme intersection d'idéaux primaires, ne s'étend pas au cas d'un anneau non commutatif.

Considérons une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$. Soit $\mathfrak{J}$ un élément de $(\mathfrak{C})$. Envisageons l'élément $V$ de $(L)$ qui est l'intersection de tous les éléments $Q$ de $(L)$ tels que $\mathfrak{J} \leqq R_3(Q)$. Montrons que $\mathfrak{J}V = V$. Supposons $\mathfrak{J}V < V$. En posant $X = \mathfrak{J}V$, on a $\mathfrak{J} \leqq R_1^V(X) \leqq R_3^V(X)$. D'après le théorème 1. 2, il existe un élément $Q \in (L)$ tel que $X = Q \cap V$ avec $R_3^V(X) = R_3(Q)$. Il en résulte $V \leqq Q$ d'après la définition de $V$, d'où $V \leqq X = \mathfrak{J}V$, ce qui est impossible.

D'où le théorème:

**Théorème 2. 1.** *Soit une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$. Etant donné $\mathfrak{J} \in (\mathfrak{C})$, l'intersection de tous les éléments $Q$ de $(L)$ tels que $\mathfrak{J} \leqq R_3(Q)$ vérifie l'égalité $V = \mathfrak{J}V$.*

**Remarque.** $V$ étant défini comme ci-dessus, la démonstration précédente établit, plus généralement, que tout élément $X \leqq V$ tel que $\mathfrak{J} \leqq R_3^V(X)$ vérifie $X = V$.

Le théorème 2. 1 donne en particulier:

**Théorème 2. 2.** *$\mathfrak{J}$ étant un idéal bilatère d'un anneau noethérien bilatère $A$ et $U$ un $A$-module noethérien, l'intersection $V$ de tous les sous-modules $Q$ de $U$ qui vérifient $\mathfrak{J} \leqq R_3(Q)$ est telle que $V = \mathfrak{J}V$.*

La propriété 1 de N. Jacobson ([1] p. 200) entraîne alors le théorème suivant.

---

[5]) Cette propriété n'est pas valable si l'on remplace tertiaire par primaire, par exemple, à moins que $X$ soit intersection d'éléments primaires de $(L)$.

[6]) Cf. N. Jacobson [1], p. 200.

**Théorème 2. 3.** *$\mathfrak{J}$ étant le radical de Jacobson d'un anneau noethérien à gauche, l'intersection de tous les idéaux à gauche $Q$ tels que $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3(Q)$ est l'idéal nul.*

**Exemple.** Soit $A$ l'anneau de Birkhoff-Witt formé par l'algèbre obtenue en adjoignant à un corps commutatif $K$ les deux générateurs $x$ et $y$ tels que

$$xy - yx = x.$$

Prenons l'idéal bilatère premier $\mathfrak{J} = (y) = Ax + Ay$. On a

$$W_1 = \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n = \bigcap_{n \geq 1} (Ax + Ay^n) = (x) = Ax.$$

$$\mathfrak{J} W_1 = (Ax + Ay)\, Ax = Ax^2 + Ayx \neq W_1.$$

Par contre, soit $V$ l'intersection des idéaux à gauche $Q$ tels que $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3(Q)$. D'après le théorème 2. 2, $V$ est tel que $V = \mathfrak{J} V$. D'autre part, on a $V < W_1$, d'où l'on déduit $V \leqq \mathfrak{J}^n W_1$ et par suite $V \leqq \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n W_1 = W_2 = \bigcap_{n \geq 1} (Ax^2 + Ay^n x) = Ax^2$. On a de même $V \leqq \bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{J}^n W_2 = \bigcap_{n \geq 1} (Ax^3 + Ay^n x^2) = Ax^3$. En répétant ce raisonnement, on obtient $V \leqq \bigcap_{n \geq 1} Ax^n = 0$.

**Remarque.** Ce dernier résultat permet de conjecturer une généralisation d'une propriété classique du cas commutatif: $V = 0$ lorsque $\mathfrak{J} \neq A$, $A$ étant un anneau d'intégrité noethérien à gauche.

## § 3. Généralisation d'un lemme d'Artin-Rees.

Le résultat suivant est connu sous le nom de lemme d'Artin-Rees:

*Soient $A$ un anneau commutatif noethérien et $U$ un $A$-module de type fini. Etant donnés un sous-module $V$ de $U$, un idéal $\mathfrak{J}$ de $A$ et un entier positif $n$, il existe un entier positif $m$ tel que*

$$\mathfrak{J}^m U \cap V \leqq \mathfrak{J}^n V\text{[7]}.$$

Ce lemme n'est pas valable pour un anneau non commutatif noethérien à gauche unitaire et un $A$-module unitaire de type fini comme on le verra un peu plus loin.

Considérons une $(\mathfrak{C})$-algèbre noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$. Soient $V$ un élément de $(L)$, $\mathfrak{J}$ un élément de $(\mathfrak{C})$ et $X \leqq V$ vérifiant $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X)$. D'après le théorème 1. 2, il existe $Q$ tel que $\mathfrak{R}_3^V(X) = \mathfrak{R}_3(Q)$ et $X = Q \cap V$. On peut donc énoncer le théorème suivant qui généralise le lemme d'Artin-Rees.

**Théorème 3. 1.** *Soit une $(\mathfrak{C})$-algèbre noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$. Etant donnés $V \in (L)$, $\mathfrak{J} \in (\mathfrak{C})$ et $X \leqq V$ vérifiant $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X)$, il existe $Q \in (L)$ tel que*

$$\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3(Q) \text{ et } Q \cap V = X.$$

On en déduit notamment:

**Théorème 3. 2.** *Soient $A$ un anneau noethérien à gauche unitaire, $U$ un $A$-module unitaire de type fini, $V$ un sous-module de $U$. L'ensemble des sous-modules $X$ de $V$ tels que $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X)$ constitue une base des voisinages de zéro dans une topologie définie dans $V$. Cette topologie coïncide avec la topologie induite sur $V$ par la topologie définie dans $U$ au moyen d'une base de voisinages de zéro constituée par les sous-modules $Q$ de $U$ tels que $\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3(Q)$.*

Les sous-modules $X$ de $V$ considérés forment bien une base de voisinages de zéro dans une topologie $\mathfrak{C}_V$ définie dans $V$ d'après la propriété 1. 2 d'où résulte

$$\mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X_1),\ \mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X_2) \rightarrow \mathfrak{J} \leqq \mathfrak{R}_3^V(X_1 \cap X_2).$$

En appliquant ceci avec $U = V$, on voit que les sous-modules $Q$ de $U$ considérés forment une base de voisinages de zéro dans une topologie $\mathfrak{C}_U$ définie dans $U$.

---

[7]) Cf. O. Zariski et P. Samuel [7], p. 253.

Montrons que la topologie induite par $\mathfrak{C}_U$ sur $V$ est $\mathfrak{C}_V$. D' abord, $Q \cap V$ est un voisinage de zéro dans $\mathfrak{C}_V$ car on a, d'après la propriété 1. 4, $\mathcal{R}_3^V(Q \cap V) \geqq \mathcal{R}_3(Q) \geqq \mathfrak{J}$. D'autre part, pour tout $X$ tel que $\mathfrak{J} \leqq \mathcal{R}_3^V(X)$, il existe $Q$ tel que $\mathfrak{J} \leqq \mathcal{R}_3(Q)$ et $Q \cap V = X$ d'après le théorème 3. 1. C. q. f. d.

Donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que le lemme d'Artin-Rees soit valable.

Nous dirons qu'une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$, *vérifie le lemme d'Artin-Rees* si on a la propriété suivante:

Pour tout $V \in (L)$, tout $\mathfrak{J} \in (\mathfrak{C})$ et tout entier positif $n$, il existe un entier positif $m$ tel que

$$\mathfrak{J}^m U \cap V \leqq \mathfrak{J}^n V.$$

**Théorème 3. 3.** *Pour qu'une $(\mathfrak{C})$-algèbre $(L)$ noethérienne ou artinienne, modulaire, satisfaisant à l'axiome $D$ vérifie le lemme d'Artin-Rees, il faut et il suffit que tout élément tertiaire de $(L)$ soit primaire.*

La condition est suffisante. En effet, dans les hypothèses du lemme d'Artin-Rees, posons $X = \mathfrak{J}^n V$, d'où $\mathfrak{J} \leqq \mathcal{R}_1^V(X) \leqq \mathcal{R}_3^V(X)$. D'après le théorème 3. 1, il existe $Q \in (L)$ tel que $\mathfrak{J} \leqq \mathcal{R}_3(Q) = \mathcal{R}_1(Q)$ et $Q \cap V = X$. On en déduit l'existence d'un entier positif $m$ avec $\mathfrak{J}^m U \leqq Q$ d'où

$$\mathfrak{J}^m U \cap V \leqq Q \cap V = X = \mathfrak{J}^n V.$$

La condition est nécessaire. Soit $Q$ un élément tertiaire de $(L)$ et soit $\mathfrak{J}$ tel que $Q. \cdot \mathfrak{J} > Q$. Prenons $V = Q. \cdot \mathfrak{J}$ et considérons $\mathfrak{J} V$. Il existe donc un entier positif $m$ avec

$$\mathfrak{J}^m U \cap (Q. \cdot \mathfrak{J}) = \mathfrak{J}^m U \cap V \leqq \mathfrak{J} V \leqq Q,$$

d'où $Q$ étant tertiaire, $\mathfrak{J}^m U \leqq Q$, ce qui montre que $Q$ est primaire.

**Corollaire.** *Pour qu'un $A$-module unitaire $U$ de type fini sur un anneau $A$ noethérien à gauche vérifie le lemme d'Artin-Rees, il faut et il suffit que tout sous-module tertiaire de $U$ soit primaire.*

Il en résulte qu'on peut obtenir un contre exemple du lemme d'Artin-Rees dans le cas non commutatif en considérant un module dans lequel existe un sous-module tertiaire non primaire (Cf. l'exemple b) de L. Lesieur et R. Croisot [3], p. 102: prendre $n = 1$, $\mathfrak{J} = B$ et $V = C$)[8].

[8]) M. Lazard [2] a signalé un cas intéressant d'anneau $A$ non commutatif dans lequel le lemme d'Artin-Rees est valable pour un idéal $\mathfrak{J}$.

## Bibliographie.

[1] *N. Jacobson*, Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **37** (1956).

[2] *M. Lazard*, Sur le lemme d'Artin-Rees. Conférence faite à la Société Mathématique de France, Bordeaux, 1958 (non publié).

[3] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Théorie noethérienne des anneaux, des demigroupes et des modules dans le cas non commutatif, I. Colloque d'Algèbre supérieure, C. B. R. M, Bruxelles, 1956, 79—121.

[4] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Théorie noethérienne des anneaux, des demigroupes et des modules dans le cas non commutatif, III. Acad. Royale de Belgique, **44** (1958), 75—93.

[5] *L. Lesieur* et *R. Croisot*. La notion de résiduel essentiel. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **246** (1958), 357—360.

[[6] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences mathématiques Gauthier-Villars, Paris, 1960.

7] *O. Zariski* et *P. Samuel*, Commutative Algebra, I. Princeton, 1958.

Eingegangen 20. Januar 1960.